

## トールス上のランキン流れとそのエネルギー\*

広島大学 伊藤 雅明 (Masaaki Ito)  
 広島大学 柴 雅和 (Masakazu Shiba)

## 1. 背景

Koebe と Courant とによって示された一般一意化定理は, Riemann の写像定理の著しい一般化の 1 つであるばかりでなく, その原型である Riemann の定理の物理的側面を非常に鮮明に意識している. その関数論的な表現は次のようである:

任意の平面領域  $G$  とその任意の内点  $z_0$  に対して, 次の性質をもつ  $G$  上の有理型関数  $f$  が存在する:

- (1)  $f$  は  $G$  上で単葉,
- (2)  $f$  は  $z_0$  に単純な極をもつ,
- (3)  $\mathbb{C} \setminus f(G)$  は水平な線分の合併集合でありその全面積が 0 である.

理想境界の各連結成分の上で  $\text{Im } f$  が定数値をとることを直感的に主張する最後の主張は, 流体力学の言葉を借りれば,  $G$  上の理想流体の定常流においては境界がこの流れの流線の一部分を形成することを述べている. まさに  $G$  から流れ出ることのない流れの壁になっている.

本来は静電場的な意味をもっていた Riemann 写像定理は, いわゆる Joukowski 変換

$$J(z) := z + 1/z$$

を媒介として流体力学的意味をもつようになり, さらに Koebe-Courant の結果の特別な場合としての位置を占めるようになる.

ところで, Joukowski 変換それ自身は, 単位円板  $\mathbb{D}$  の内部 (あるいは外部) の上の流体力学的現象を表す関数であり, 円周と線分との対応をつける. それは, 平面全体における一様流れと原点 (あるいは無限遠点) での 2 重湧き出し (dipole flow) との重ね合わせである. この 2 重湧き出しを 1 対の湧き出し・吸い込み対に分離したものとして得られる流れは, 単位円板ではなく Rankine 卵と呼ばれるある凸閉集合の外部の流れである. いうなれば, Rankine 卵を与える関数の退化したものが Joukowski 関数である. 流体力学における "Rankine 卵形" は, 平面の一様流と 1 対の湧き出し・吸い込みとの重ね合わせとして得られる流れの閉じた流線によってできる図形であるが, 単連結領域の等角写像論の中では Joukowski 変換の一般化として捉えることもできる ([6]).

Rankine 卵の関数論的な性質, 特に対応する写像関数による像の補集合の面積などは, [6] において調べられた. またその一般的な性質については [11] において調べられた. 問題の 1 つは, 湧き出し・吸い込みの強さを径数として写像関数の性質, 像領域の性質 (特にその補集合の面積の値域) を調べることである.

\*これは日本学術振興会科学研究費による補助を受けている. 課題番号 11640121 および 11440048.  
 E-mail: ito@amath.hiroshima-u.ac.jp, shiba@amath.hiroshima-u.ac.jp

本稿では、Rankine 卵形の平面から種数 1 の Riemann 面への拡張を考える。このとき平面とは違った新しい局面が現れる。平面領域においては登場しなかったモジュラスが本質的な役割を果たす。その一般論は [9] や [10] に始まるが、ここでは深入りしないでおく。

Weierstrass のいわゆる  $\zeta$  関数が Joukowski 関数の一般化のよい候補を与えるであろうことは容易に察知される。実際、それはまさしく 2 重湧き出しをもった多価関数であり、automorphic かつ polymorphic な性質を同時に持っている。したがって、像領域は再びトーラスである。一般論 ([10]) によって、そのモジュラスはある限られた範囲 — 上半平面内のある閉円板上 — しか動けない。この円板の性質については、数値的なものも含めて、いくつかの結果がある (たとえば [14])。

モジュラスを調べることの関数論的重要性は明らかであるが、他方で流れの運動エネルギーもまた物理的に重要な意味をもつ。これらはそれぞれ周期平行四辺形として生じる長方形の辺の長さの比 (すなわち 2 辺の商) と面積 (すなわち 2 辺の積) によって与えられる。ここではこの点に関する考察を主として行い、エネルギーの方がより自然な結果に繋がることを示す。また、エネルギーがほとんどの場合には 2 重極の強さの 2 次関数である一方で、エネルギーが強さの 1 次関数に退化する 2 つの場合があって、このように特別な振る舞いを見せるときの 2 つのモジュラスは互いに他の逆数であることを示す。

以下の概観を把握するために、ここで Rankine 卵の構成方法を略述する。径数  $\mu$  が適当な範囲にあるとき、Weierstrass  $\zeta$  関数を用いて拵えた関数

$$F_\mu(z) := z + \mu\zeta(z), \quad \mu > 0,$$

は、 $\zeta$  の構成に用いた 1 組の基本周期に対応するトーラス  $T$  上のポテンシャル流れを表し、平面の場合と同様に、 $T$  を 2 つの部分に分けて流れる：1 つは 2 重極を含むある凸領域  $B_\mu$  を流れ、もう 1 つはその外部を流れる。この流れを  $T$  上の 2 重湧き出し Rankine 流れ (dipole Rankine flow) と呼ぼう。

関数  $F_\mu$  が非コンパクトなトーラス  $T \setminus \bar{B}_\mu$  からまた別の非コンパクトなトーラスの上への等角写像を与えることは、それが automorphic かつ polymorphic であることを利用して確かめられる。像トーラスは容易に通常の意味での (コンパクトな) トーラスに埋め込まれ、そのモジュラスもまた原理的には計算される。

一般の場合における等角的埋め込みについては [9] などを、また種数 1 の場合についての詳しい議論については [10], [11] などを、参照されたい。後者においては平面単葉関数論との深い関係についても議論されている。また、本稿で行うものとは全く異なった代数的方法が、例えば [4] にあることを注意しておく。

本稿と研究集会の表題との主たる関連は、非コンパクトなトーラスの等角写像を構成するのに不連続群に対する automorphic および polymorphic な性質の 2 つを用いることである。また、双曲的構造と関連する話題も含んでいるが、これについては付録で簡単に触れるにとどめた。

## 2. 準備

固定された  $\omega_1, \omega_3 \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$ , に対して、 $z$  平面内に格子

$$L[2\omega_1, 2\omega_3] := \{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}$$

と、それから自然に導かれるトーラス

$$T_0 := \mathbb{C}/L[2\omega_1, 2\omega_3]$$

さらに、基本周期  $2\omega_1, 2\omega_3$  をもつ Weierstrass の  $\wp$  関数

$$\wp(z) = \wp(z; \omega_1, \omega_3) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left\{ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}$$

および Weierstrass  $\zeta$  関数

$$\zeta(z) = \zeta(z; \omega_1, \omega_3) := \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left\{ \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right\} = \frac{1}{z} - \int_0^z \left\{ \wp(z) - \frac{1}{z^2} \right\} dz$$

を考える。よく知られているように、

$$\wp(z) = -\zeta'(z)$$

であり、複素数

$$\eta_k := \zeta(\omega_k)$$

は関数方程式

$$\zeta(z + 2\omega_k) = \zeta(z) + 2\eta_k, \quad k = 1, 2, 3$$

を満たす。ここで、 $\omega_2 := -(\omega_1 + \omega_3)$ 。

基本周期を用いて

$$g_3 = 140 \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6} \quad \text{and} \quad g_2 = 60 \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}$$

とおくとき、 $\wp$ -関数は関数方程式

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

を満たすことなど、楕円関数については多くの結果が知られているが、以下で直接に必要なとするわけではないので詳細は省略する。楕円関数についての一般論は、例えば、[2] あるいは [7] に詳しい。

### 3. 2重湧き出しをもつ Rankine 流れ

以下では殆どの場合に周期を

$$2\omega_1 = 1, \quad 2\omega_3 = \tau_0$$

のように正規化するけれども、計算の意味を失わないようにするために、敢えて一般的な記号を使いつづけることをも許そう。

さて正の実数  $\mu$  で

$$0 < \mu < \frac{1}{\wp(\omega_1)}$$

を満たすものを1つ固定すれば、関数

$$F_\mu(z) := z + \mu\zeta(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

は  $T_0 := \mathbb{C}/L[1, \tau_0]$  の上のポテンシャル流れである。ここではこの流れを  $T_0$  上の2重湧き出し Rankine 流れ (dipole Rankine flow) と呼ぶ。2重周期的流れについては、[3] や [15] (p. 263, Prob. 1427) を参照。

この流れは、 $T_0$  上に2つの淀み点  $\pm z_0$  をもつが、それらは方程式

$$0 = F'_\mu(z_0) = 1 - \mu\wp(z_0)$$

の解である。考察を  $z_0 > 0$  の場合に限って行えば十分である。径数  $\mu$  に関する仮定から、これらの淀み点を通過する流線

$$L_\mu : \text{Im}(z + \mu\zeta(z)) = 0$$

は2重極を含むある凸領域  $B_\mu$  を囲む。これを2重湧き出し Rankine 卵 (dipole Rankine ovoid) と呼ぶことにする。

関数  $F_\mu$  は auto- かつ polymorphic である：

$$F_\mu(z + 2\omega_k) = (z + 2\omega_k) + \mu\zeta(z + 2\omega_k) = F_\mu(z) + (2\omega_k + \mu \cdot 2\eta_k), \quad k = 1, 2, 3.$$

したがって、 $F_\mu$  は  $T_0 \setminus \bar{B}_\mu$  からある水平截線の入ったトーラス (horizontal slit torus)

$$R_0(\mu) := T_0(\mu) \setminus \Sigma_0(\mu)$$

の上への1対1正則写像を定義する。ここで、 $T_0(\mu)$  はトーラス、 $\Sigma_0(\mu)$  は  $T_0(\mu)$  上の水平な直線分である (直線は、凸性と同様に、自然な距離を用いて定義され、水平であることはトーラスの測地線として選ばれたホモロジー基底との関係として定義される)。

容易に確かめられるように

$$F_\mu(\omega_1) > 0 \quad \text{すなわち} \quad \omega_1 + \mu\eta_1 > 0$$

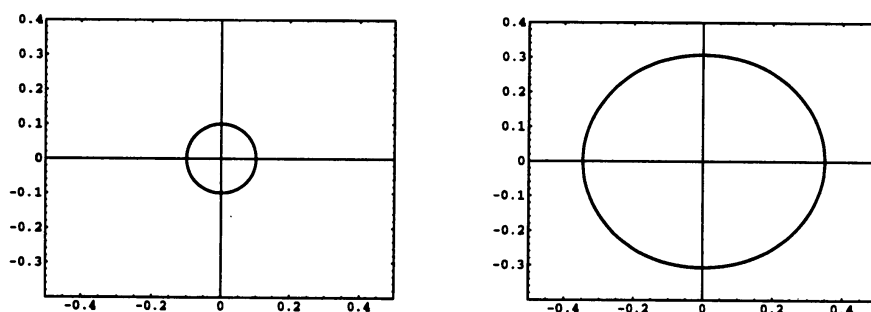


Figure 1.  $\omega_1 = 0.5$  および  $\omega_3 = 0.4i$  の場合の2重湧き出し Rankine 卵。  $\mu$  の値は左図では 0.01, 右図では 0.1.

だから、新しいトーラス  $T_0(\mu)$  のモジュラス  $\tau_0(\mu)$  と線分  $\Sigma_0(\mu)$  の ( $2\omega_1 = 1$  と比較した) 長さ  $\ell_0(\mu)$  は

$$\frac{\omega_3 + \mu\eta_3}{\omega_1 + \mu\eta_1} = \frac{\tau_0 + \mu \cdot 2\zeta(\tau_0/2)}{1 + \mu \cdot 2\zeta(1/2)}$$

および

$$\frac{2|F_\mu(z_0)|}{1 + \mu \cdot 2\zeta(1/2)} = \frac{2|z_0 + \mu\zeta(z_0)|}{1 + \mu \cdot 2\zeta(1/2)}$$

である。

非コンパクトなトーラス  $R$  上の非回転的なソレノイダル流れは、 $R$  を部分領域として含むトーラス  $T$  上の流れの  $T$  上への制限として得られるとき、一様に接続可能 (uniformly extendable) と呼ぶことにすれば

**定理.** 2重湧き出し Rankine 流れはすべて一様に接続可能である。

#### 4. 2重湧き出し Rankine 流れのエネルギー

関数  $F_\mu$  の導関数

$$F'_\mu(z) = 1 + \mu\zeta'(z) = 1 - \mu\rho(z)$$

は  $T_0$  上の 1 価な有理型関数であるから、関数 (厳密に言えば 関数 ではなくあるトーラスの中への 写像)  $F_\mu$  をよ詳しく調べるためには、その基本領域の上半部分

$$Q^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2} (= \omega_1), 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\operatorname{Im} \tau_0}{2} (= \operatorname{Im} \omega_3)\}$$

での挙動をより詳しく調べればよい ([15] 参照)。このとき、 $T_0$  全体の上での流れは対称性によって得られる： $Q^+$  を実軸に関して対称に写して  $Q^-$  とすればよい。 $T_0$  上の 2重湧き出し Rankine 卵  $B_\mu$  は 2 つの領域

$$B_\mu^\pm := \{z \in Q^\pm \mid \operatorname{Im} F_\mu(z) \leq 0\}$$

と実軸上の開線分  $(-z_0, z_0)$  との合併集合として与えられる。

Weierstrass  $\zeta$  関数は Joukowski 変換の完全な対置物ではない；実際トーラス上での 2重湧き出し Rankine 卵は一般に円板にはならないことが数値的に確かめられる。図 2 を参照。

2重湧き出しの強さ  $\mu$  の関数としてみたとき、数学的に意味のあるモジュラスの変化と同様に、流れの運動エネルギーの変化もまた物理的に興味深い。この問題については次の定理を示すことができる：

**定理.** 2重湧き出し Rankine 流れの  $T_0 \setminus \bar{B}_\mu$  上での総エネルギー ( $B_\mu$  の上でのエネルギーはもちろん無限大)

$$\mathcal{E}(\mu) = \frac{4}{i} \cdot \left\{ \frac{\tau_0}{2} + \mu\zeta\left(\frac{\tau_0}{2}\right) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \mu\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = \frac{4}{i} \cdot \left( \frac{\tau_0}{2} + \mu\eta_3 \right) \cdot \left( \frac{1}{2} + \mu\eta_1 \right)$$

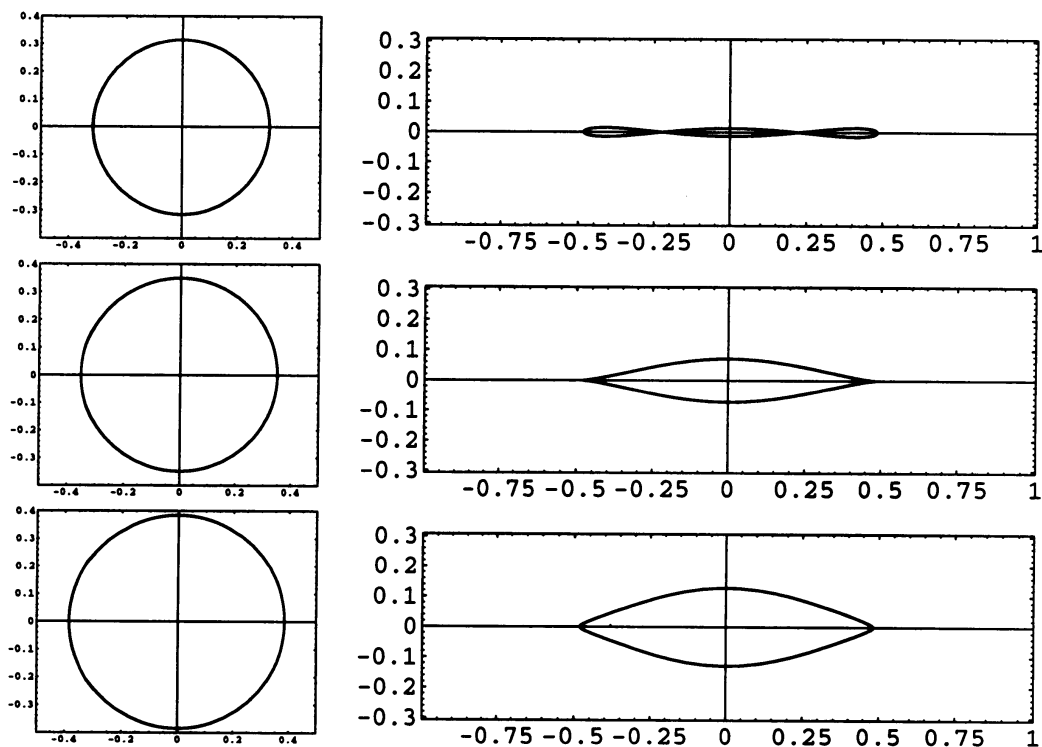


Figure 2. 2重湧き出しのまわりの同心円周とそれらの像；2番目の円周は淀み点を通して描かれたもの。

は、一般には  $\mu$  の2次関数であるが、例外的に1次関数となる場合がある。

Legendre の関係式

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \pi i / 2$$

によって、

$$\eta_1 = 0 \quad (\text{あるいは} \quad \eta_3 = 0)$$

に従って

$$\eta_3 = -\pi i \quad (\text{あるいは} \quad \eta_1 = \pi i / \tau_0)$$

であるから、

$$\mathcal{E}(\mu) = \begin{cases} -2\pi\mu + \text{Im } \hat{\tau}_0 & \text{if } \eta_1 = 0, \\ 2\pi\mu + \text{Im } \check{\tau}_0 & \text{if } \eta_3 = 0 \end{cases}$$

である。ただし、 $\hat{\tau}_0, \check{\tau}_0$  は

$$\zeta\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{\hat{\tau}_0}{2}\right) = 0, \quad \zeta\left(\frac{\check{\tau}_0}{2}; \frac{1}{2}, \frac{\check{\tau}_0}{2}\right) = 0$$

を満たす複素数。

モジュラス  $\tau_0(\mu)$  についても、再び Legendre の関係式を用いれば、

$$\tau_0'(\mu) = \frac{\eta_3\omega_1 - \eta_1\omega_3}{(\omega_1 + \mu\eta_1)^2} = -\frac{\pi i}{2(\omega_1 + \mu\eta_1)^2},$$

したがって

定理.  $\text{Im } \tau_0(\mu)$  は  $\mu$  の減少関数である.

エネルギーが  $\mu$  が例外的に 1 次関数となるのは、上で見たようにそのモジュラス  $\hat{\tau}_0, \check{\tau}_0$  が、関係式

$$\zeta\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{\hat{\tau}_0}{2}\right) = 0, \quad \zeta\left(\frac{\check{\tau}_0}{2}; \frac{1}{2}, \frac{\check{\tau}_0}{2}\right) = 0$$

を満たす場合であるが、このようなモジュラスはそれぞれただ 1 つずつ存在することが  $\zeta$ -関数の基本的な性質から容易に知られる. さらに、次の定理が得られる.

定理.  $\hat{\tau}_0\check{\tau}_0 = 1$ .

実際、この関係式は  $\zeta$ -関数の初等的な性質

$$\lambda\zeta(\lambda z; \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \zeta(z; \omega_1, \omega_3), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

と上に述べた一意性とから直接に従う.

## 5. 付録： 截線入りトーラスのスパン

スパンの概念は、平面領域に対して、Schiffer によって与えられた；それは、粗く言えば、領域の境界の大きさを関数論的に表したものであるが、特に 0 か正かの区別がいわゆる族  $O_{AD}$  の特徴づけを与えることが著しい性質である、この観点から、Schiffer 以来、Riemann 面に対して様々な形で拡張されたけれども、その殆どすべては、解析性というより調和性に関する退化条件の特徴づけであったり、Riemann 面の局所座標系に依り面の内在的な性質とは言い難かったり、まだまだ検討の余地が残されている.

前節で得た截線入りトーラス  $R_0(\mu)$  はある意味で平面の場合における水平 (平行) 截線領域の拡張を与えるものであるが、平面の場合と同様に、それはある垂直截線入りトーラス (vertical slit torus)  $R_1(\mu)$  の上に 1 対 1 等角に写像される.  $R_1(\mu)$  は、ある (コンパクトな) トーラス  $T_1(\mu)$  からその上のある垂直な線分  $\Sigma_1(\mu)$  を取り去って得られる種数 1 の非コンパクトな Riemann 面であり、垂直であることの認識は、あらためて言うまでもなく、トーラス  $T_1$  の自然な曲線系  $\{a_1, b_1\}$  の  $a_1$  に対する状態を見てのものである. トーラス  $T_1(\mu)$  のモジュラス  $\tau_1(\mu)$  と截線  $\Sigma_1(\mu)$  の (トーラスの大きさに比した) 長さは、数値的に計算されている. これらについては [14] を参照.

非コンパクトなトーラス  $T_0 \setminus \bar{B}_\mu$  のこれら 2 つの特別な実現 — 水平ならびに垂直平行截線入りのトーラス — は、 $T_0 \setminus \bar{B}_\mu$  をコンパクトなトーラスに埋め込む全ての可能性を描くのに十分なデータを与える. 特に、これら 2 つのトーラスのモジュラスを直径とする閉円板が重要な役割を果たす. (その詳細と一般論については、[10]. [11] を参照.)

非コンパクトなトーラス  $T_0 \setminus \bar{B}_\mu$  のスパンは

$$\sigma := \frac{1}{i}(\tau_1(\mu) - \tau_0(\mu))$$

で定義される。これが古典的なスパンの非常に自然な拡張概念であることは、容易に確かめられるがここでは割愛する ([10], [11]. さらに, [14], [8] も参照.)

スパンの重要性を思い出すために, ここには3つの定理を挙げる.

**定理.** 水平截線入りトーラス  $R_0(\mu)$  および垂直截線入りトーラス  $R_1(\mu)$  は, 次の意味でそれぞれ極小および極大である: 非コンパクトなトーラス  $T_0 \setminus \bar{B}_\mu$  が等角的に埋め込まれ得るあらゆるトーラスの中で,  $R_0(\mu)$  (あるいは  $R_1(\mu)$ ) は, そのモジュラスがそれぞれ最小 (あるいは最大) である.

**定理.** 2点  $\tau_0(\mu), \tau_1(\mu)$  を直径の両端とする閉円板  $M$  によって, 非コンパクトなトーラス  $T_0 \setminus \bar{B}_\mu$  を等角に埋め込むことのできる全てのトーラス (のモジュラス) が表される.

**定理.** 非コンパクトなトーラス  $T_0 \setminus \bar{B}_\mu$  をトーラスに等角に埋め込もうとするとき, 埋め込まれた像の補集合の面積が最大になるのは円板  $M$  の中心においてであって, 最大面積は  $\sigma/4$  に等しい. ただし面積は, トーラス上の第1種正規微分から導かれる自然な距離によって測られたものとする.

上に述べた一連の定理においては, 等角的埋め込みがそれぞれの曲面に予め与えられた標準ホモロジー基底を対応づけるものと仮定してあり, このことは本来最初の段階で断っておくべきことであるが, 目下のように Rankine 卵の外部として得られた面とトーラスとの対応が明らかな場合には取って述べる必要もあまい. 詳細については [9], [10] および [11] を参照.

ここで述べた結果とは対照的に, 次の定理では標準ホモロジー基底への言及がまったく不要である ([11]).

**定理.** 埋め込まれたトーラス全体の面積に対する除外面積の割合は, 円板  $M$  の双曲的中心で最大値をとり, その値は  $\sigma_H/2$  である. ただし,

$$\sigma_H := \log \frac{\operatorname{Im} \tau_1}{\operatorname{Im} \tau_0} = \log \frac{\tau_1}{\tau_0}$$

は双曲的円板  $M$  の双曲的直径を表す.

## REFERENCES

1. Ahlfors, L. V. and L. Sario: Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, Princeton, 1960.
2. Akhiezer, N. I.: Elements of the theory of elliptic functions, Russian original: Nauka, Moscow, 1970. Engl. transl.: Amer. Math. Soc., Providence, 1990, 237pp.
3. Betz, A.: Konforme Abbildung, 2. neubearbeitete Aufl., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964, 407S.
4. Horiuchi, R. and M. Shiba: Deformation of a torus by attaching the Riemann sphere, J. Reine Angew. Math. **456**(1994), 135-149.
5. Ito, M. and M. Shiba: Area theorems for conformal mapping and dipole Rankine ovoids, in "Proc. Computational Methods and Function Theory 1997", ed. by N. Papamichael, St. Ruscheweyh, and E. B. Saff, World Scientific, 1999, pp. 275-283.



6. Ito, M. and M. Shiba: Nonlinearity of energy of Rankine flows on a torus, To appear in *Nonlinear Analysis: Series A, Theory and Methods*.
7. Lawden, D. F.: *Elliptic functions and applications*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1989, 334pp.
8. Masumoto, M.: Estimates of the euclidean span for an open Riemann surface of genus one, *Hiroshima Math. J.* **22**(1992), 573-582.
9. Shiba, M.: The Riemann-Hurwitz relation, parallel slit covering map, and continuation of an open Riemann surface of finite genus, *Hiroshima Math. J.* **14**(1984), 371-399.
10. Shiba, M.: The moduli of compact continuations of an open Riemann surface of genus one, *Trans. Amer. Math. Soc.* **301**(1987), 299-311.
11. Shiba, M.: The euclidean, hyperbolic, and spherical spans of an open Riemann surface of low genus and the related area theorems, *Kodai Math. J.* **16**(1993), 118-137.
12. Shiba, M. and K. Shibata: Singular hydrodynamic continuations of finite Riemann surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **25**(1985), 745-755.
13. Shiba, M. and K. Shibata: Hydrodynamic continuations of an open Riemann surface of finite genus, *Complex Variables* **8**(1987), 205-211.
14. Shiba, M. and K. Shibata: Conformal mapping of geodesically slit tori and an application to the evaluation of the hyperbolic span, *Hiroshima Math. J.* **24**(1994), 63-76.
15. Volkovyskii, L. I., G. L. Lunts, and I. G. Aramanovich: A collection of problems on complex analysis, Russian original: Fizmatgiz, Moscow, 1960. English transl.: Pergamon Press, Oxford, 1965. Reprint: Dover Publ., New York, 1991, 426pp.