数理解析研究所講究録 1223 巻 2001 年 50-55

λ length の複素化について

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科
(Graduate School of Mathematics, Nagoya University)
中西敏浩
(Toshihiro Nakanishi)

Abstract. Punctured surface group の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現の空間に座標系を導入するために R. C. Penner [Pe] による λ length の複素化を考える。[Pe] と同様の議論で写像類群の有理表現や写像類群の作用で不変な正則 2-形式などを得る。

1. Trace Identities.

$SL(2,\mathbb{C})$ の行列について以下の恒等式が成り立つ。

(1) $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}A^{-1}$
(2) $\mathrm{tr}AB+\mathrm{tr}AB^{-1}=\mathrm{tr}A\mathrm{tr}B.$

この式を出発点にさまざまな恒等式を得ることができる。特に興味深いのは

Proposition 1.1. (Ptolemy equation) $A,B,C,D\in SL(2,\mathbb{C})$ は $\mathrm{tr}ABCD=-2$ をみたすとする。このとき $x=(\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}BCD)$, $y=(\mathrm{tr}B+\mathrm{tr}CDA)$, $z=(\mathrm{tr}C+\mathrm{tr}DAB)$, $w=(\mathrm{tr}D+\mathrm{tr}ABC)$, $u=(\mathrm{tr}AB+\mathrm{tr}CD)$, $v=(\mathrm{tr}BC+\mathrm{tr}AD)$ とおくと

$$xz+yw=uv. \tag{1.1}$$

この (1.1) 式は punctured surface group の $SL(2,\mathbb{C})$ への表現空間への写像類群の作用を具体的に書き下すのに用いられる。

Proposition 1.2. $A,B,C\in SL(2,\mathbb{C})$ とし $D=(ABC)^{-1}$ とおく。このとき $X=\mathrm{tr}BC$, $Y=\mathrm{tr}CA$, $Z\doteq\mathrm{tr}AB$ は次式をみたす。

$$X^2+Y^2+Z^2+XYZ-(\mathrm{tr}A\mathrm{tr}D+\mathrm{tr}B\ \mathrm{tr}C)X-(\mathrm{tr}B\mathrm{tr}D+\mathrm{tr}C\mathrm{tr}A)Y-(\mathrm{tr}C\mathrm{tr}D+\mathrm{tr}A\mathrm{tr}B)Z$$
$$+(\mathrm{tr}A)^2+(\mathrm{tr}B)^2+(\mathrm{tr}C)^2+(\mathrm{tr}D)^2+\mathrm{tr}A\mathrm{tr}B\mathrm{tr}C\mathrm{tr}D-4=0.$$

ここで $a=-\mathrm{tr}A, b=-\mathrm{tr}B, c=-\mathrm{tr}C, d=-\mathrm{tr}D, x=-\mathrm{tr}BC, y=-\mathrm{tr}CA, z=-\mathrm{tr}AB$ とおくと上式は

$$x^2+y^2+z^2-xyz+(ad+bc)x+(bd+ca)y+(cd+ab)z+a^2+b^2+c^2+d^2+abcd-4=0$$

となる。もし $\mathrm{tr}D=-2$ ならば $L_1=x+a,\ L_2=y+b,\ L_3=z+c$ とおくことにより、この式はさらに

$$\frac{L_1}{L_2L_3}+\frac{L_2}{L_3L_1}+\frac{L_3}{L_1L_2}+\frac{a}{L_1}+\frac{b}{L_2}+\frac{c}{L_3}=1. \tag{1.2}$$

注. トレースの負をパラメータに選ぶのは Fuchs 群に制限して表現を考えるときに便利なことが多いからである。また、こうしておくと例えば $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B=\mathrm{tr}C=0$ のとき (1.2) は古典的な Markov の方程式 $x^2+y^2+z^2=xyz$ の形になる。

Proposition 1.3. $A,B,C,D\in SL(2,\mathbb{C})$ は

$$ABA^{-1}B^{-1}CD=1$$

をみたすとする。もし $\mathrm{tr}D=-2$ ならば $L_1=-(\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}BA^{-1}BC)$, $L_2=-(\mathrm{tr}ABA^{-1}+\mathrm{tr}B^{-1}C)$, $L_3=-(\mathrm{tr}A^{-1}+\mathrm{tr}B^{-1}CAB)$, $L_4=-(\mathrm{tr}AB+\mathrm{tr}A^{-1}B^{-1}C)$, $L_5=-(\mathrm{tr}C+\mathrm{tr}ABA^{-1}B^{-1})$, $c=-\mathrm{tr}C$ とおくとき、これらは次式をみたす。

$$\left(\frac{L_1}{L_2L_4}+\frac{L_2}{L_4L_1}+\frac{L_4}{L_1L_2}\right)+\left(\frac{L_2}{L_3L_4}+\frac{L_3}{L_4L_2}+\frac{L_4}{L_2L_3}\right)-\left(\frac{L_1}{L_3L_5}+\frac{L_3}{L_5L_1}+\frac{L_5}{L_1L_3}\right)-\frac{c}{L_5}=-1. \tag{1.3}$$

2. Traces as parameters for representation space of a punctured surface group.

m 個の境界成分を持つ種数 g の向きのついたコンパクト面 $F_{g,m}$ から 1 点 p を除いたものを $F'_{g,m}$ で表わす。$F'_{g,m}$ の基本群 $G'(g,m)$ は

$$生成元: A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g, C_1, \ldots, C_m,$$

をもつ自由群で $D=C_m^{-1}\cdots C_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{g}B_iA_iB_i^{-1}A_i^{-1}\right)$ は puncture を周回する単純ループのホモトピー類である。

$$\hat{R}'(g,m)=\{\rho: G'(g,m)\to SL(2,\mathbb{C}) : \rho \text{ は忠実な表現で } \mathrm{tr}D=-2\}$$

を定義すると (1.2),(1.3) は $\hat{R}'(0,3)$ または $\hat{R}'(1,1)$ の表現による群の像のトレースたちがみたすべき恒等式を与えている。逆に(1.2),(1.3)をみたすトレースを与えたとき $\hat{R}'(0,3)$ または $\hat{R}'(1,1)$ の表現を $(SL(2,\mathbb{C})$ の内部同型の合成を除いて)一意的に回復できるかどうかを見てみる。$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とおく。

Proposition 2.1. ($\hat{R}'(0,3)$ の場合) $a,b,c \in \mathbb{C}$ とする。もし $L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{C}^*$ が (1.2) をみたせば(同じ元による共役を除き) $A,B,C \in SL(2,\mathbb{C})$ が定まり $\mathrm{tr}ABC = -2$ かつ $a = -\mathrm{tr}A$, $b = -\mathrm{tr}B$, $c = -\mathrm{tr}C$, $L_1 = -a - \mathrm{tr}BC$, $L_2 = -b - \mathrm{tr}CA$, $L_3 = -c - \mathrm{tr}AB$.

実際、

$$A = \begin{pmatrix} -L_2/L_3 - a & a + L_2/L_3 + L_3/L_2 \\ -L_2/L_3 & L_2/L_3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -L_1/L_3 - b & L_1/L_3 \\ -b - L_1/L_3 - L_3/L_1 & L_1/L_3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & L_1/L_2 \\ -L_2/L_1 & -c \end{pmatrix}$$

となる。

Proposition 2.2. ($\hat{R}'(1,1)$ の場合) $c \in \mathbb{C}$ とする。もし $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 \in \mathbb{C}^*$ が (1.3) をみたせば(同じ元による共役を除き) $A,B,C \in SL(2,\mathbb{C})$ が定まり $\mathrm{tr}ABA^{-1}B^{-1}C = -2$ かつ $c = -\mathrm{tr}C$, $L_1 = -(\mathrm{tr}A + \mathrm{tr}BA^{-1}BC)$, $L_2 = -(\mathrm{tr}ABA^{-1} + \mathrm{tr}B^{-1}C)$, $L_3 = -(\mathrm{tr}A^{-1} + \mathrm{tr}B^{-1}CAB)$, $L_4 = -(\mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}A^{-1}B^{-1}C)$, $L_5 = -(\mathrm{tr}C + \mathrm{tr}ABA^{-1}B^{-1})$.

実際、

$$A = \begin{pmatrix} L_4/L_2 - L_3/L_5 + (L_2^2 + L_1L_3)/(L_2L_4) & L_5/L_3 + L_3/L_5 - (L_2^2 + L_4^2 + L_1L_3)/(L_2L_4) \\ -L_3/L_5 & L_3/L_5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} L_2/L_5 & -L_2/L_5 + (L_2^2 + L_1L_3)/(L_3L_4) \\ -L_4/L_1 + L_2/L_5 & R \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & L_1/L_3 \\ -L_3/L_1 & -c \end{pmatrix}$$

ただし

$$R = (-L_2L_4L_5^2 + L_1L_2^2L_5 + L_3L_4^2L_5 + L_1^2L_3L_5 - L_1L_2L_3L_4)/(L_1L_3L_4L_5)$$

となる。

Lemma 2.3. $A, B \in SL(2,\mathbb{C})$ は $\mathrm{tr}AB = -2$ をみたすとする。もし $\mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B = 0$ ならば A, B は可解群を生成する。

したがって

$$\hat{R}'_{ns}(g,n) = \{\rho \in \hat{R}'(g,m) : \rho(G'(g,m)) \text{ は可解部分群をもたない}\}$$

上の $SL(2,\mathbb{C})$ の作用を $A \in SL(2,\mathbb{C}), \rho \in \hat{R}'_{ns}(g,m)$ にたいして

$$(A,\rho) \to \rho^A(g) = A^{-1}\rho(g)A \qquad (g \in G'(g,m))$$

で定めると Proposition 2.1 における L_1, L_2, L_3 および 2.2 における L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 はそれぞれ orbit space $R'_{ns}(0,3), R'_{ns}(1,1)$ のパラメータとなる。

一般の $G'(g,m)$ は $G'(0,3), G'(1,4)$ のいくつかのコピーから、$G'(0,2)$ と同型な部分群での融合積を繰り返して得られる。このことにより、たとえば

Corollary. $A,B,C,D,E \in SL(2,\mathbb{C})$ は $\mathrm{tr}ABCDE = -2$ をみたすとする。$L_1 = -(\mathrm{tr}A + \mathrm{tr}BCDE)$, $L_2 = -(\mathrm{tr}B + \mathrm{tr}CDEA)$, $L_3 = -(\mathrm{tr}C + \mathrm{tr}DEAB)$, $L_4 = -(\mathrm{tr}D + \mathrm{tr}EABC)$,$L_5 = -(\mathrm{tr}E + \mathrm{tr}ABCD)$,$L_6 = -(\mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}CDE)$,$L_7 = -(\mathrm{tr}ABC + \mathrm{tr}DE)$,$a = -\mathrm{tr}A$,$b = -\mathrm{tr}B$,$c = -\mathrm{tr}C$,$d = -\mathrm{tr}D$,$e = -\mathrm{tr}E$ とおくと

$$S(L_1,L_2,L_6) + S(L_3,L_6,L_7) + S(L_4,L_5,L_7) + \frac{a}{L_1} + \frac{b}{L_2} + \frac{c}{L_3} + \frac{d}{L_4} + \frac{e}{L_5} = 1,$$

ここで

$$S(x,y,z) = \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}.$$

3. Complexified λ length.

3.1. 表現 $\rho \in \hat{R}'(g,m)$ に対して $\mathrm{tr}\rho$ は基本群 $G'(g,m)$ の基点に関係なくループの free homotopy class のみで定まるので穴あき曲面 $F'_{g,m}$ 上のループに c に対して $\mathrm{tr}\rho(c)$ が定義できる。

曲面 $F_{g,m}$ 上の p を基点にもつ単純ループ $\bar{c}$ を考える。$\bar{c}$ から p を除いたものを c とする。$\bar{c}$ の十分小さい帯状近傍は $\bar{c}$ に freely homotopic な単純ループ c_1, c_2 を境界にもつ。これらは $(g,m) = (1,0)$ の場合を除いて $F'_{g,m} = F_{g,m} \setminus \{p\}$ では freely homotopic でない。$\rho \in \hat{R}'(g,m)$ に対して

$$L(c,\rho) = -(\mathrm{tr}\rho(c_1) + \mathrm{tr}\rho(c_2))$$

を ρ についての c の complexified λ length とよぶ。

3.2. 曲面 $F_{g,m}$ にまず m 個の境界曲線に freely homotopic な p を基点とする単純ループ $\bar{c}_1, ..., \bar{c}_m$ を描く。次にこれらのループに沿って曲面を切り境界曲線を含む成分をすべて切り落としてできる曲面を p

を基点とする単純ループ $\bar{c}_{m+1}, ..., \bar{c}_d$ $(d = 6g - 6 + 2m + 3)$で三角形分割する。このとき $c_i = \bar{c}_i \setminus \{p\}$ $(i = 1, ..., d)$ とし、$(c_1, ..., c_d)$ を $F'_{g,m}$ の ideal triangulation と呼ぶことにする。

Theorem 3.1. $\Delta = (c_1, ..., c_d)$ を $F'_{g,m}$ の ideal triangulation とする。このとき

$$\iota_\Delta : R_{ne}(g, m) \to \mathbb{C}^d \qquad \iota_\Delta([\rho]) = (L(c_1, \rho), ..., L(c_d, \rho), \mathrm{tr}\rho(c_1), ..., \mathrm{tr}\rho(c_m))$$

は単射で、その像はある代数的超曲面に含まれる。

4. Rational representation of mapping class group.

4.1. 以下では境界曲線のない場合、すなわち $m = 0$ の場合を考える。記号も $F_{g,0} = F_g$ などと記すことにする。$\Delta = (c_1, ..., c_d)$ を F'_g の ideal triangulation とする。c_i に両側から接する 2 つの三角形 T, T' が存在する。ただし $T \neq T'$ とは限らない。このとき Δ から c_i を除き、替わりに $T \cup T'$ のもう一つの対角線が定めるループ c'_i を加えてできる Δ' は Δ から(c_i での) elementary move で得られるという。今 $T \cup T'$ の辺を a, b, c, d とし a と c が対辺の関係にあり、さらに c_i は a, d と b, c を分離しているとすると Proposition 1.1 (Ptolemy equation) から λ length 座標は以下をみたす。

$$L(c'_i) = \frac{L(a)L(c) + L(b)L(d)}{L(c_i)}. \tag{4.1}$$

したがって Theorem 3.1 の写像に対して $\Psi_{\Delta', \Delta} = \iota_{\Delta'} \circ \iota_\Delta^{-1}$ は $\mathbb{C}^d$ の有理写像となる。

Theorem (R.C.Penner) 任意の F'_g の ideal triangulations Δ, Δ' は elementary move の有限操作で移りあう。

よって 任意の F'_g の ideal triangulations Δ, Δ' に対して $\Psi_{\Delta', \Delta} = \iota_{\Delta'} \circ \iota_\Delta^{-1}$ は有理写像である。

$\mathcal{MC}_{g,1}$ を F'_g の(向きを保つ)写像類群とすると $\mathcal{MC}_{g,1}$ の元を一つの写像 h で代表させるとき、F'_g の ideal triangulation Δ を一つ固定しておく。このとき $h^*\Delta = h^{-1}(\Delta)$ も F'_g の ideal triangulation である。h に対して $\mathcal{R}_h = \Psi_{h^*(\Delta), \Delta}$ は有理写像となる。

4.2. Δ を F'_g の ideal triangulation とし、それが定める三角形を $T_1, ..., T_q$ とする。各 T_j の辺であるループを c_{j1}, c_{j2}, c_{j3} とし対応する λ length 座標を L_{j1}, L_{j2}, L_{j3} とするとき

$$\omega = \sum_{j=1}^{q} (d \log L_{j1} \wedge d \log L_{j2} + d \log L_{j2} \wedge d \log L_{j3} + d \log L_{j3} \wedge d \log L_{j1})$$

は $(\mathbb{C}^*)^d$ 上に $\mathcal{MC}_{g,1}$ の作用で不変な正則 2-形式を与える。

参考文献

[Pe] Penner, R. C., *The decorated Teichmüller space of punctured surfaces*, Commun. Math. Phys. **113** (1987), 299-339.