数理解析研究所講究録 1223 巻 2001 年 69-79

コンパクト NON-KÄHLER L.C.K. MANIFOLD に関する小島, FERRAND 型の RIGIDITY

神島 芳宣

ABSTRACT. We study two kinds of transformation groups of a compact locally conformally Kähler (l.c.K.) manifold (M, g, J). First we study compact l.c.K. manifolds by means of the existence of parallel l.c.K. flow (*i.e.*, a conformal, holomorphic flow which lifts to an action on the universal cover by non-trivial homotheties with respect to the Kähler metric.) It is shown that if a compact l.c.K. manifold admits a parallel l.c.K. flow, then there exists a metric with parallel Lee form in the conformal class of g. Moreover, under the same hypothesis, M admits a l.c.K. metric with parallel Lee form if and only if it admits a parallel l.c.K. flow. As a consequence, we determine the structure of the compact l.c.K. manifolds with parallel Lee form (so called, Vaisman manifolds). Next, suppose that $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is an n-tupple of complex numbers satisfying $0 < |\lambda_n| \leq \cdots \leq |\lambda_1| < 1$. A *primary Hopf manifold* M_Λ of type Λ is the compact quotient manifold of $\mathbb{C}^n - \{0\}$ by a subgroup Γ_Λ generated by the transformation $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_n z_n)$. We prove that the primary Hopf manifold M_Λ of type Λ supports a l.c.K. metric with parallel Lee form. Conversely, if a compact Hopf manifold $\mathbb{C}^n - \{0\}/\Gamma$ admits a l.c.K. metric with parallel Lee form ($n \geq 2$), then some finite cover is *biholomorphic* to a primary Hopf manifold M_Λ of type Λ. Finally, we introduce the Lee-Cauchy-Riemann (LCR) transformations as a class of diffeomorphisms preserving the specific G-structure of l.c.K. manifolds. We examine the rigidity of compact l.c.K. manifolds admitting non-compact connected group consisting of LCR transformations. In fact, if there exists of a $\mathbb{C}^*$ flow of closed LCR transformations on a compact l.c.K. non-Kähler manifold of complex dimension at least 2 whose S^1 subgroup is a parallel l.c.K. flow inducing the Lee field $\theta^\sharp$, then M is holomorphically conformal to the primary Hopf manifold M_Λ of type Λ with parallel Lee form. The detail of these results has been seen in [2].

1. 対称性と剛体性

一般に, この剛体性の問題はコンパクト多様体 M にノンコンパクトな群が M 上の**幾何構造を保つ**ように作用している時, その多様体は一意的に決まるか (rigid)

Date: April 13, 2001.
1991 *Mathematics Subject Classification.* MSC 1991: 57S25, 51M10, 53C25.

という漠然とした予想のことである．この予想を肯定的に示すものとして小畠，Lelong-Ferrandの結果(1970年)がある．

定理 1.1. n次元リーマン多様体Mの共形変換群を$\mathrm{Conf}(M)$とする．もしMがコンパクトで$\mathrm{Conf}(M)$がノンコンパクトならばMは標準球面S^nに共形的に同型である．

ここで球面S^nは共形平坦多様体である．S^nは今の場合そしてそのときに限り立体射影(変換)によって平坦なユークリッド空間と局所共形的に同値であるような共形構造を持っている．さらにcomplex versionとしてのCR多様体に対しても，上の予想に関して同様な結果を得た(1996年)．

定理 1.2. Mを$2n+1$次元強擬凸CR多様体とし，MのCR変換群を$\mathrm{Aut}_{CR}(M)$とする．もしMがコンパクトで連結成分$\mathrm{Aut}^0_{CR}(M)$がノンコンパクトならばMは標準球面S^{2n+1}にCR-同型である．

コンタクト構造ηをもつ多様体Mをコンタクト多様体とよぶ．Mの次元は奇数$2n+1$となり，コンタクト構造ηは$\mathbb{R}$-値1-formで$\eta\wedge d\eta^n\neq 0$を満たすことから$2n$次元部分束$\mathrm{Null}\ \eta=\{X\in TM|\eta(X)=0\}$を定める．$CR$-多様体$M$とはコンタクト部分$\mathrm{Null}\ \eta$上に作用する複素構造$J$をもつコンタクト多様体のことである．ここで複素構造Jとは，

(i) $J:\mathrm{Null}\ \eta\to\mathrm{Null}\ \eta$は概複素構造$(J\circ J=-1)$である．
(ii) $\mathrm{Null}\ \eta\otimes\mathbb{C}=T^{1,0}\oplus T^{0,1}$を$J$に対する固有値分解とすると$J$が積分可能；$[T^{1,0},T^{1,0}]\subset T^{1,0}$をみたす

もののことである．対$(\mathrm{Null}\ \eta, J)$はM上のCR構造といわれる．

今自然に，**奇数次元**多様体M上でholomorphic変換に対応する変換$f:M\to M$を定義しようとするとき，fは$\mathrm{Null}\ \eta$を保ち，微分写像がf_*が$\mathrm{Null}\ \eta$上の複素構造Jと可換となるようなdiffeomorphismとして考えることができる．このようなdiffeomorphismをMのCR変換という．この定義は複素多様体を内部に持つ超曲面と思うとき，また奇数次元という観点からは共形構造のcomplex analogueとも思える．実際，複素数空間$\mathbb{C}^{n+1}$の単位球面S^{2n+1}には自然に強擬凸なCR-構造

が入るが (もっと一般に Brieskorn 多様体等), 共形平坦性に対応してこの標準球面 S^{2n+1} はを spherical CR 多様体という. (余談だが, 球面 S^n 北極点を除いて, 立体射影により平面 $\mathbb{R}^n$ と共形同値と述べたが, spherical CR 多様体 S^{2n+1} は北極点を除くと Heisenberg 冪零空間と CR-同値である.)

Cauchy-Riemann の関係式から単位円の内部 $\mathbb{B}^{n+1}$ を保つ biholomorphic 変換は上の定義より S^{2n+1} 上に CR 変換として作用する. この定理 1.1, 1.2 の証明の本質的な所はノンコンパクト変換群の存在 (上の場合, それらは 共形 flow, CR-flow) とその作用が nonelliptic であるという事実はそのコンパクト多様体の基本群まで決定してしまうことである. これらをふまえて, ケーラー構造を持たないエルミート複素多様体として典型的なコンパクト Locally conformal Kähler 多様体 (l.c.K. 多様体) を取り上げ, その上の変換を調べ, コンパクト l.c.K. 多様体の剛体性について得られた結果を述べる. 一部は Liviu Ornea 氏 (ブカレスト大) との共同研究による.

2. L.C.KÄHLER 多様体と L.C.K. 変換

(M, g, J) を $2n$ (≥ 4) 次元複素 Hermitian 多様体とし, ω を $\omega(X,Y) = g(X, JY)$ により定義された fundamental two-form とおく.

定義 2.1. ω が積分可能条件

$$d\omega = \theta \wedge \omega \quad \text{かつ } d\theta = 0$$

をみたすとき, M は局所共形ケーラー (locally conformally Kähler (*l.c.K.*)) 多様体という.

この時, この閉 1-形式 θ は Leek 形式 (H.C. Lee 1943 年) とよばれ M の幾何学的性質を記述する. 上の定義からでは, 局所共形の意味がはっきりしないかもしれないのでもとの定義を復習する. (M, J) を与えられた複素多様体とするとき, (M, J) 上の l.c.K. 構造とは次の条件を満たす局所系 $\{U_\alpha, g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ のことである: $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は M の開被覆, 各 g_α は U_α 上で定義された ケーラー計量である. 共通部分 $U_\alpha \cap U_\beta$ では, ある正定数 $\lambda_{\beta\alpha}$ が存在して $g_\beta = \lambda_{\beta\alpha} g_\alpha$ を満たしている. この

とき, 明らかに族 $\{\lambda_{\beta\alpha}\}$ は M 上の 1-cocycle となるから $(H^1(M;\mathbb{R}^+)$ を局所的に定義された可微分正関の芽からなる層コホモロジー $H^1(M;\mathcal{S})$ の部分加群とみるとき, $H^1(M;\mathcal{S}) = 0$ だから), 各近傍で局所的定義された可微分正関数からなる局所族 $\{f_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が存在して $\delta^0 f(\alpha,\beta) = \dfrac{f_\alpha}{f_\beta} = \lambda_{\beta\alpha}$ $(U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset)$ を満たす. $g|U_\alpha = f_\alpha \cdot g_\alpha$ とおいて, M 上のエルミート計量 g が得られ g は局所共形的にケーラーである.

定義 2.2. 二つの *l.c.K.* 構造 $\{U_\alpha, g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{U_\alpha, g'_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ に対し, それらが同値とは c_α を定数とする局所系 $\{c_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ (もっと正確には細分) が存在して $g'_\alpha = c_\alpha \cdot g_\alpha$ を満たしているときにいう.

補題 2.3. 複素多様体上の局所共形ケーラー構造の同型類は局所共形ケーラー計量 (g のこと) の *conformal class* (共形類) と一対一に対応する

証明. 一つの l.c.K. 構造 $\{U_\alpha, g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ がもう一つの $\{U_\alpha, g'_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ と同値と仮定する. 定義より $g'_\alpha = c_\alpha \cdot g_\alpha$ である. 共通部分 $U_\alpha \cap U_\beta$ では $g'_\beta = \lambda'_{\beta\alpha} g'_\alpha$, $g_\beta = \lambda_{\beta\alpha} g_\alpha$ となっているから, $\lambda'_{\beta\alpha} = c_\beta \cdot \lambda_{\beta\alpha} \cdot c_\alpha^{-1}$. 一方 $\delta^0 f(\alpha,\beta) = \dfrac{f_\alpha}{f_\beta} = \lambda_{\beta\alpha}$ $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 同様に $\lambda'_{\beta\alpha} = \dfrac{f'_\alpha}{f'_\beta}$ がなりたっている. したがって M 上の大域的関数 τ が存在して $\tau|U_\alpha = c_\alpha f'_\alpha f_\alpha^{-1}$ となる. それぞれ, l.c.K. 計量 g, g' は $g|U_\alpha = f_\alpha \cdot g_\alpha$, $g'|U_\alpha = f'_\alpha \cdot g'_\alpha$ を満たしていることから, 各 α に対し $\tau \cdot g|U_\alpha = g'|U_\alpha$ である. ゆえに l.c.K. 構造 $\{U_\alpha, g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ の同値類は共形類 $[g]$ を定める.

逆に, もし $g' = \lambda \cdot g$ とすると, 基本2次形式 ω' は $d\omega' = \theta' \wedge \omega'$ $(\theta' = \theta + d\log\lambda)$ を満たすことが分かる. $d\omega' = 0$ から, (M, g', J) もまた l.c.K. 多様体である. 局所的に完全から $df_\alpha = \theta|U_\alpha$, $df'_\alpha = \theta'|U_\alpha$ とおく. $df'_\alpha = \theta'|U_\alpha = \theta|U_\alpha + d\log\lambda$ なので, ある定数 c_α があって U_α 上 $\log c_\alpha + f'_\alpha = f_\alpha + \log\lambda$ が成り立つ. 特に, $e^{f'_\alpha} e^{-f_\alpha} = \lambda c_\alpha^{-1}$. 定義より, $g'_\alpha = e^{-f'_\alpha} \cdot g' = e^{-f'_\alpha} \cdot c_\alpha \cdot g = c_\alpha \cdot g_\alpha$. だから l.c.K. structures $\{U_\alpha, g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{U_\alpha, g'_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は同値である.

この局所共形ケーラー計量 g に対する変換群として正則 (holomorphic) 共形変換が最初に考えられる.

定義 2.4 (局所共形ケーラー変換群).

$$\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M) = \{f : M \to M \text{ 微分同相} \mid f^*g = \lambda \cdot g,\ f_* \circ J = J \circ f_*,\ \lambda > 0\}.$$

上の定理 1.1 を使って, 次の基本的な結果が出る.

命題 2.5. 局所共形ケーラー多様体 M はコンパクトならば局所共形ケーラー変換群 $\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$ はコンパクト *Lie* 群になる.

以後, l.c.K. 多様体 (M, g, J) はコンパクトとする. したがって $\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$ は compact Lie 群となるので g を平均することより g に共形的な $\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$-不変なエルミート計量 g' が得られる. g' の基本 2 次形式からできる Lee 形式および反 Lee 形式をそれぞれ θ', $\theta' \circ J\theta' \circ J$ とすると, $\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$ の各元は θ', $\theta' \circ J$ を不変に保つ. 一方, コンパクトな局所共形 Kähler 多様体 M の $\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$ はコンパクト等長変換群となることからノンコンパクト部分群はでてこない. しかし, その代わり l.c.K. 多様体特有の性質として, 次の変換が考えられる. M のエルミート計量, 基本 2 次形式の普遍被覆空間 $\tilde{M}$ 上への lifts をそれぞれ $\tilde{g}$, $\tilde{\omega}$ とおく. 定義より Lee 形式 θ のリフト $\tilde{\theta}$ は完全だから, $\tau : \tilde{M} \to \mathbb{R}$ が存在して $d\tilde{\theta} = d\tau$ となる. このとき, $\Omega = e^{-\tau} \cdot \tilde{\omega}$ とおけば $\tilde{M}$ 上の 2 次形式 Ω は

$$d\Omega = 0$$

をみたす. したがって定数倍を除いて一意的にケーラー形式が定まる.

定義 2.6. $\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$ の 1-パラメーター部分群 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が *parallel l.c.K.* 作用であるとは $\tilde{M}$ 上へのリフト $\{\tilde{\varphi}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が Ω に関して非自明な相似変換; $\tilde{f}_t^*\Omega = a_t \cdot \Omega$ $(a_t \neq 1)$ となるときにいう.

与えられた l.c.K. 多様体 (M, g, J) に対し, $\mathcal{H}(\tilde{M}, \Omega, J)$ をケーラー構造 (h, J) に関する $\tilde{M}$ 上のすべての正則相似変換からなる群とする. 元 f_1, $f_2 \in \mathcal{H}(\tilde{M}, \Omega, J)$

は $f_i^*\Omega = c_{f_i}\cdot\Omega$ をみたすから (ここで c_{f_i} $(i=1,2)$ はある定数), $c_{f_2\circ f_1} = c_{f_2}\cdot c_{f_1}$ が成り立つ. したがって, (連続) 準同型:

$$(1) \qquad \rho : \mathcal{H}(\tilde{M},\Omega,J) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

が各 f に正数 c_f を対応させることにより得られる. $\pi_1(M)$ を M の基本群とすると, $\pi_1(M)\subset\mathcal{H}(\tilde{M},\Omega,J)$ であることに注意する. なぜなら, もし $\gamma\in\pi_1(M)$ なら, $\gamma^*\Omega = e^{-\gamma^*\tau}\cdot\gamma^*p^*\omega = e^{-\gamma^*\tau}\cdot p^*\omega = e^{-\gamma^*\tau+\tau}\cdot\Omega$ から $e^{-\gamma^*\tau+\tau}$ は定数にならなければならない $(n\geq 2)$. Parallel l.c.K. flow の基本的な性質は次の結果である:

補題 2.7. もし $\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$ が *parallel l.c.K. flow* をもつならば, 同時に $S^1\subset\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$ が存在して, そのリフト $\mathbb{R}$ は $\tilde{M}$ 上にケーラー計量 h に関して非自明な正則相似変換として作用する.

証明. $\{\varphi_t\}\subset\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$ を parallel l.c.K. flow とする. そのとき $\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$ における閉包 $\overline{\{\varphi_t\}}$ はコンパクトアーベル群であるから (命題 2.5), k-トーラス T^k $(k\geq 1)$ となる. $\widetilde{T^k}\subset\mathcal{H}(\tilde{M},\Omega,J)$ をトーラス群 $\overline{\{\varphi_t\}}$ のリフトとする. 準同型 $\rho:\mathcal{H}(\tilde{M},\Omega,J)\to\mathbb{R}^+$ に対し, かってな $S^1\subset\overline{\{\varphi_t\}}=T^k$ のリフト $\widetilde{\{S^1\}}$ の像が $\rho(\widetilde{\{S^1\}})=1$ だとすると, すべて $\rho(\widetilde{T^k})=1$ となってしまう. しかし parallel l.c.K. flow のリフト $\widetilde{\{\varphi_t\}}$ はもちろん, $\widetilde{T^k}$ に含まれているのだから, 定義より $\rho(\widetilde{\{\varphi_t\}})\neq 1$. これは矛盾である. 故に少なくとも一つは parallel l.c.K. flow S^1 が $\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$ の中に存在する. その S^1 のリフトの ρ による像は $\mathbb{R}^+$ の非自明な部分群であるから, 明らかにそのリフトは $\mathbb{R}$ に同型である.

□

この結果より S^1 のリフト $\tilde{S}^1=\{\varphi_t \mid t\in\mathbb{R}\}$ は準同形 $\rho:\tilde{S}^1\to\mathbb{R}^+$ が存在して

$$\varphi_t^*\Omega = \rho(t)\cdot\Omega$$

を満たす. Parallel l.c.K. S^1-作用の例としてはコンパクト l.c.K. 多様体上の正則複素トーラス作用がある. (ここで, 正則複素トーラス作用とは, 複素トーラス $T^1_{\mathbb{C}}$ の各元は正則変換で作用 $\mu:T^1_{\mathbb{C}}\times M\to M$ が複素多様体 $T^1_{\mathbb{C}}\times M$ から M への正則写像となっているものである. [6] 参照.) 定義より, parallel l.c.K. S^1-作用のリフ

トは $\mathbb{R}$-作用になる. 特に, 閉非球形 (aspherical) l.c.K. 多様体上の正則等長 S^1-作用は $\mathbb{R}$-作用にリフトするが必ずしも parallel l.c.K. 作用ではない. 例えば, 井上曲面と呼ばれる 4 次元 Solv 多様体 (3 次元 solv 多様体上の S^1-束) 上には決して parallel l.c.K. とはならない正則 (等長) S^1-作用がある.

補題 2.7 を使って, Parallel l.c.K. flow に関して次のことを証明した ([2] 参照).

定理 2.8. (M, g, J) をコンパクト *l.c.K.* 多様体 (非ケーラーかつ次元 4 以上) とする. もし $\mathrm{Aut}_{l.c.K.}(M)$ が *parallel l.c.K. flow* を持つならば, g の共形類の中に *parallel Lee* 形式 θ' を持つ *l.c.K.* 計量 g' が存在する ($\nabla'\theta' = 0$).

この定理の応用として, 懸念のコンパクト Vaisman 多様体の構造定理を得た.

系 2.9. (M, g, J) を *parallel Lee* 形式をもつコンパクト *l.c.K.* 多様体 (非ケーラーかつ次元 4 以上) とする. このとき, (M, J) 上に *parallel Lee* 形式 θ' を持つ *l.c.K.* 計量 g' が存在して次を満たす:

1. $\hat{g}$ の *parallel Lee* ベクトル場 $\hat{\theta}^\sharp$ は S^1-作用を生成する.
2. $(M, \hat{g}, J)$ は *Vaisman* 多様体 $(\mathbb{R}^+ \times W/\sigma(\pi_1^*), \hat{g}^*, J^*)$ に等長であり, さらに射影 $\hat{\mathrm{pr}}_2 : (\mathbb{R}^+ \times W, \hat{g}) \to (W/Q, \hat{g}_W)$ は *Sasakian orbifold* W/Q 上の *Riemannian submersion* である.
3. 普遍被覆空間 $\tilde{M}$ 上のケーラー形式は $d(e^t\pi^*\eta)$ の形でそのコンタクト形式 η は Q-不変かつ (η, J) は W 上の強擬凸 擬エルミート構造である.

3. *L.C.R*-変換と Hopf 多様体

一般に局所共形ケーラー計量 g は Lee 形式 θ, 反 Lee 形式 $\theta \circ J$ をあたえることをみたが, $g(X, \theta^\#) = \theta(X)$ とおいて, θ は M 上のベクトル場 $\theta^\#$ を定めるがわかる. この $\theta^\#$ は Lee ベクトル場とよばれる. このとき $\{\theta^\#, J\theta^\#\}$ は M 上に複素平面場を与える. $\{\theta^\#, J\theta^\#\}^\perp$ を g に関する直交部分束とするとするならば J-不変な分割: $TM = \{\theta^\#, J\theta^\#\} \oplus \{\theta^\#, J\theta^\#\}^\perp$ ができる.

定義 3.1. 微分同相写像 $f : M \to M$ が *Lee-Cauchy-Riemann* (*LCR*) 変換とは

(i) f は部分束 $\{\theta^\#, J\theta^\#\}^\perp$ をそれ自身に写し，その上で正則である，すなわち，$f_* \circ J = J \circ f_*$.

(ii) $f_*\theta^\# = \theta^\#\ mod\ \{\theta^\#, J\theta^\#\}^\perp$

(iii) M 上の関数 $\lambda > 0$ が存在して，$f_*(J\theta^\#) = \lambda \cdot (J\theta^\#)\ \ mod\ \{\theta^\#, J\theta^\#\}^\perp$.

注意することは f は一般に複素平面場 $\{\theta^\#, J\theta^\#\}$ 上 J-不変ではないことである．このとき次の形の剛体性結果を得た．

定理 3.2. (M, g, J) をコンパクト *l.c.K.* 多様体とし，θ を *Lee*形式とする．このとき，*LCR* 変換群からなる閉部分群 $\mathbb{C}^* = S^1 \times \mathbb{R}$ が存在して，その部分群 S^1 は *Lee* ベクトル場 $\theta^\#$ を誘導するような *parallel l.c.K.* 作用とするならば，$(M, \hat{g}, J)$ は *parallel Lee*形式をもつ Λ 型の *Primary Hopf*多様体 M_Λ と正則等長同型になる．

この定理は証明しないが，ここではparallel Lee形式をもつ Λ 型のPrimary Hopf多様体 M_Λ について説明する．([3] 参照.)

ω_0 を球面 $S^{2n-1} = \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ 上の通常のコンタクト形式

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n}(x_j dy_j\ -\ y_j dx_j)$$

とおく．正数 $\{a_i\}$ を

$$0 < a_1 \leq a_2 \cdots \leq a_n \tag{2}$$

となるように選ぶ．球面 S^{2n-1} 上の新たなコンタクト形式 η を次のように定義する．

$$\eta = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot |z_j|^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j dy_j\ -\ y_j dx_j)$$

このとき，Null η = Null ω_0 に注意する．次に，S^{2n-1} 上の 1-径数変換群 $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を

$$\psi_t(z_1, \cdots, z_n) = (e^{it\cdot a_1} z_1, \cdots, e^{it\cdot a_n} z_n)$$

によって与え, それが誘導するベクトル場を A とおく.

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j (x_j \frac{d}{dy_j} \ - \ y_j \frac{d}{dx_j}).$$

J_0 を $\mathbb{C}^n$ の複素構造の $\mathbb{C}^n - \{0\}$ への制限とする. $\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1} = \mathbb{C}^n - \{0\}$ に対し, N を球面 S^{2n-1} 上の正規直交ベクトル場とすると $(\frac{d}{dt} = N)$, $\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}$ 上の複素構造 $J_A : T(\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}) \longrightarrow T(\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1})$ が次のように定義される:

(3)
$$J_A N = -A, \quad J_A A = N$$
$$J_A | \operatorname{Null}\ \eta = J_0.$$

$T(\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}) = \{N, A\} \oplus \operatorname{Null}\ \eta$ であるから J_A は $\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}$ 上の概複素構造である.

S^{2n-1} 上の 1-parameter 変換群は $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset T^n \subset \mathrm{U}(n)$ を満たす. 一方, S^{2n-1} 上の強擬凸 擬エルミート構造 (ω_0, J_0) を保つ擬エルミート変換群 $\mathrm{Psh}(S^{2n-1}, \omega_0, J_0)$ は $\mathrm{U}(n)$ と同型だから各元 ψ_t は定義より,

(4)
$$(\psi_t)_* \circ J_0 = J_0 \circ (\psi_t)_*$$

を満たしている. 次に J_A が $\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}$ 上の複素構造であることをしめす.
$\{N, J_A N,\ J_A | \operatorname{Null}\ \eta\}$ から, 実際 J_A が概複素構造であることは明らか. 複素構造であることは
$\operatorname{Null}\ \omega_0 \otimes \mathbb{C} = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$ とおくと,

$$T(\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}) \otimes \mathbb{C} = \{N - iJ_A N\} + T^{1,0} \oplus \{N + iJ_A N\} + T^{0,1}$$

が J_A に対する固有値分解. $\tilde{T}^{1,0} = \{N - iJ_A N\} + T^{1,0}$ とおく. $X \in T^{1,0}$ に対し,

$$[N - iJ_A N, X] = [N, X] - i[J_A N, X] = -i[J_A N, X]$$

また

$$[J_A N, X]_x = \lim_{t \to 0} \frac{X_x - (\psi_t)_* X_{\psi_{-t} x}}{t} \in \operatorname{Null}\ \omega_0$$

から, J_A の定義と(4) より $J_A([J_A N, X]_x) = J_0([J_A N, X]_x) = i[J_A N, X]_x$ となり, $[\tilde{T}^{1,0}, \tilde{T}^{1,0}] \subset \tilde{T}^{1,0}$ がいえるので, J_A は積分可能.

さらに $\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}$ 上の l.c. K. 計量 g_A は $\tilde{g}_A(X,Y) = \Theta(J_AX, Y)$ で

$$\Theta = 2\frac{1}{e^t} \cdot d(e^t\eta)$$

とかける. l.c. K. 計量 g_A は明らかに parallel Lee 形式を持ち, $\mathbb{R}^+ \times T^n$- 不変である. $H : \mathbb{R}^+ \times S^{2n-1} \to \mathbb{C}^n - \{0\}$ を

$$H(e^t, (z_1, \ldots, z_n)) = (e^{-a_1t}z_1, \ldots, e^{-a_nt}z_n),$$

で定義された微分同相写像とすると $H_*J_A = J_0H_*$ が成り立つことが示せ, H は (J_A, J_0)-双正則写像である. この H を通して各 $\alpha \in \mathbb{R}^+ \times \mathrm{PSH}(S^{2n-1}, \eta_A, J_0)$ に双正則写像 $H \circ \alpha \circ H^{-1}$ を対応させることにより忠実表現

$$\mu : \mathbb{R}^+ \times \mathrm{PSH}(S^{2n-1}, \eta_A, J_0) \longrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^n - \{0\}, J_0)$$

が得られる. 少なくとも $T^n \subset \mathrm{PSH}(S^{2n-1}, \eta_A, J_0)$ であることから, S^1 から n 組 $c_1, \ldots, c_n$ をとり. 元 $(e, (c_1, \ldots, c_n)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathrm{PSH}(S^{2n-1}, \eta_A, J_0)$ により生成される無限巡回群 $\mathbb{Z}$ をとる. この時 $\mu(\mathbb{Z})$ は元 $(e^{-a_1} \cdot c_1, \ldots, e^{-a_n} \cdot c_n)$ により生成され $\mathbb{C}^n - \{0\}$ 上に固有不連続に作用している. $\lambda_j = e^{-a_j} \cdot c_j$ とおいて, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ とかける. したがって $\mu(\mathbb{Z})$ は $\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\}$ により生成される. 条件 (2) を使って

$$0 < |\lambda_n| \leq \cdots \leq |\lambda_1| < 1$$

が成り立つ.

定義 3.3. $M_\Lambda = \mathbb{C}^n - \{0\}/\mu(\mathbb{Z})$ を M_Λ を Λ 型の primary Hopf 多様体とよぶ.

実際, $n = 2$ の時は, M_Λ はケーラー階数 1 の primary Hopf 曲面である. Parallel Lee 形式を持つ l.c.K. 計量 g_A は明らかに $\mathbb{Z}$-不変なので商空間 $\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}/\mathbb{Z}$ 上に parallel Lee 形式を持つ l.c.K. 計量 $\hat{g}_A$ を誘導する. H は正則微分同相は $\hat{H} : \mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}/\mathbb{Z} \longrightarrow M_\Lambda$ を導くことから $M_\Lambda = \mathbb{C}^n - \{0\}/\mu(\mathbb{Z})$ は parallel Lee 形式を持つ l.c.K. 計量多様体である.

定理 3.2 は閉 LCR 変換群 $\mathbb{C}^* = S^1 \times \mathbb{R}$ の存在のもとに $\tilde{M}$ から $\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}$ への共形正則同値写像が構成され, ホロノミー群を計算して結果が得られる.

REFERENCES

[1] P. Gauduchon, L. Ornea, *Locally conformally Kähler metrics on Hopf surfaces*, Annales de l'Inst. Fourier, **48** (1998), 1107-1127.

[2] Y. Kamishima, L. Ornea, *Geometric flow on compact locally conformally Kähler manifolds*, Preprint.

[3] Y. Kmaihsima, *Locally conformally Kählerian structures and uniformization, Geometry, Topology and Physics, Proceedings, Apanasov, Bradlow, Rodrigues, Uhlenbeck (eds.)*, Walter de Gruyter & Co., Berlin· New York, pp. 173–190, 1997.

[4] Y. Kamishima, *Geometric flows on compact manifolds and global rigidity*, Topology, **35** (1996), 439-450.

[5] Y. Kamishima, *Locally conformal Kähler manifolds with a family of constant curvature tensors*, Kumamoto J. Math., **11** (1998), 19-41.

[6] Y. Kamishima, *Holomorphic torus actions on compact locally conformal Kähler manifolds*, Compositio Math., **124** (2000), 341-349.

[7] J. Lelong-Ferrand, *Transformations conformes et quasi conformes des variétés riemanniennes compactes*, Acad. Roy. Belgique Sci. Mem. Coll., **8** (1971), 1-44.

[8] M. Obata, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom., **6** (1971), 247–258.

[9] F. Tricerri, *Some examples of locally conformal Kähler manifolds*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino **40** (1982), 81-92.

[10] I. Vaisman, *Locally conformal Kähler manifolds with parallel Lee form*, Rend. Mat. **12** (1979), 263-284.

[11] I. Vaisman, *Generalized Hopf manifolds*, Geometriae Dedicata, 13(1982), 231-255.

[12] S. M. Webster, *On the transformation group of a real hypersurface*, Trans. Amer. Math. Soc., **231** (1977), 179-190.

[13] S. M. Webster, *Pseudohermitian geometry of a real hypersurface*, J. Diff. Geom., **13** (1978), 25-41.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY,
MINAMI-OHSAWA 1-1, HACHIOJI, TOKYO 192-0397, JAPAN

E-mail address: `kami@comp.metro-u.ac.jp`