数理解析研究所講究録 1224 巻 2001 年 36-60

Bootstrap and Permutation Tests for the Equality of Two Regression Functions by Curve Resampling

千葉大学大学院　桜井 裕仁 (Hirohito Sakurai)
Graduate School of Science and Technology, Chiba Univ.

千葉大学理学部　田栗 正章 (Masaaki Taguri)
Faculty of Science, Chiba Univ.

概　要

本稿では, まず従来のリサンプリング法を拡張する curve resampling 法を提案する. 次に, curve resampling 法による 2 つのノンパラメトリック回帰関数の有意差検定法を提案し, そのサイズと検出力をシミュレーションにより検討する. 最後に, 実際のデータへの適用例として, 人工衛星と地上のレーダーという 2 種類の方法で計測された高度 80〜90 (km) (11 高度, 13 日分) の風速データを取り上げ, 平均的に見て両計測方法間に差があるか否かの検討を行う.

1　はじめに

1979 年頃に B. Efron により提唱されたブートストラップ法は, 代表的なリサンプリング法である. 初期の段階の研究では, データが互いに独立に同一の分布に従う (i.i.d.) という仮定が置かれていたが, 我々が実際に得られるデータに対しては, そのような理想化された仮定を置くことが現実的ではない場合も多い. 例えば, 経済学や医学, 薬学などの分野でよく扱われる時系列データや縦断的データの場合には, データが複雑な相関構造を有しており, そのようなデータの解析を行う場合には, 既存の手法だけでは対応できないことも多い. そのため, より緩やかな仮定のもとで機能するような修正法がいくつも提案されており (例えば, Shao and Tu (1995), Davison and Hinkley (1997) を参照), 現在もその適用範囲拡大化の研究が行われている.

本稿では, 複雑な構造を有するデータへのブートストラップ法の適用例として, 縦断的データの場合を取り上げ, 特に独立な 2 群の縦断的データが与えられる場合に, 平均的に見て両者の間に差があるか否かを検討するための方法を提案する. まず 2 節では, 各群のデータに対してノンパラメトリック回帰モデルを想定し, 2 つの回帰関数の有意差検定を行う問題として定式化する. これは, 従来の 2 標本問題における平均値の差の検定問題の 1 つの拡張とみなすことができる. 3.1 節では, 2 つの回帰関数の差を測るために, 両者の間に挟まれる部分の面積に着目する. しかしこのとき, 離散的に与えられる観測値だけでは面積を求めることができないため, 本稿では, 隣り合う観測値間の補間値として線形補間値を用い, 2 つの回帰関数に挟まれる部分の面積を台形則により近似する.

次に, このような量に基づいて検定統計量を構成するが, 検定統計量の帰無仮説の下での分布 (以下では帰無分布と呼ぶ) の近似には, リサンプリング法を用いる. この場合, 初期標本から抽出したリサンプルにおいても, 再び上述のような面積の計算が必要となる. そこで 3.2 節, および 3.3 節では, 従来のリサンプリング法を拡張する方法 (以降では, curve resampling 法と呼ぶ) に基づく検定法を提案する. これは, 縦断的データにおける各 subject

を曲線とみなし, 曲線の集合 (初期標本) からリサンプリングする方法である. ここで, もし各 subject の長さが 1 の場合には, 従来の i.i.d. データの場合のリサンプリング法と同じである.

本稿で提案する curve resampling 法は, 一見すると, 離散値で与えられるデータをひとまとめにしてリサンプリングするので, ベクトルをリサンプリングしているように見える. しかしここでは, 隣り合う観測値間の補間値も保存したままリサンプリングしている点に注意が必要である. これと同様な方法, すなわち, データが本質的に関数で表現される場合に, データを関数として扱う方法には, 関数データ解析 (例えば, Ramsay and Silverman (1997) を参照) がある. ただしこの場合の関数とは, 離散値で与えられたデータを平滑化もしくは補間して得られた関数を指す (下川他, 2000).

4 節では, 3.2 節, および 3.3 節で提案した検定のサイズと検出力をシミュレーションにより検討する. 最後に 5 節では, 上記検定法の実際のデータへの適用例として, 人工衛星と地上のレーダーという 2 種類の方法で計測された高度 80〜90 (km) (11 高度, 13 日分) の風速データを取り上げ, 平均的に見て両計測方法間に差があるか否かの検討を行う.

2 問題の定式化

2.1 対応のある 2 組の縦断的データの場合

2 群のデータが $\{(Y_i(t), X_i(t))\}_{i=1}^{m}$ $(t = 1, \ldots, n)$ という形で与えられる場合を考える. ただし, $Y_i(t)$ と $X_i(t)$ は, 互いに独立に計測されていると仮定する. このとき, 各群のデータに対してノンパラメトリック回帰モデル

$$\begin{cases} Y_i(t) = f_1(t) + \varepsilon_i(t), & \varepsilon_i(t) \sim F_1(0, \sigma_1^2(t)), \\ X_i(t) = f_2(t) + \eta_i(t), & \eta_i(t) \sim F_2(0, \sigma_2^2(t)) \end{cases} \tag{1}$$

を想定する. ただし, $f_1(t)$, $f_2(t)$ は回帰関数, $\varepsilon_i(t)$ は平均 0, 分散 $\sigma_1^2(t)$ をもつ未知の分布 F_1 に従う確率変数, $\eta_i(t)$ は平均 0, 分散 $\sigma_2^2(t)$ をもつ未知の分布 F_2 に従う確率変数とする. ここで, すべての i, t に対して, $\varepsilon_i(t)$ と $\eta_i(t)$ は互いに独立であるとし, さらに, $i_1 \neq i_2$ に対して, $\varepsilon_{i_1}(t)$ と $\varepsilon_{i_2}(t)$, $\eta_{i_1}(t)$ と $\eta_{i_2}(t)$ は互いに独立であるとする. このとき,

$$H_0: \text{ すべての } t \text{ に対して } f_1(t) = f_2(t) \quad \text{vs.} \quad H_1: \text{ ある } t \text{ に対して } f_1(t) \neq f_2(t) \tag{2}$$

という検定問題を考える. ただし, H_0 と H_1 は, それぞれ帰無仮説と対立仮説を表す.

2.2 対応のない 2 組の縦断的データの場合

一般に, 2 群のデータが $\{Y_i(t)\}_{i=1}^{m_1}$, $\{X_j(t)\}_{j=1}^{m_2}$ $(t = 1, \ldots, n)$ という形で与えられる場合を考える. このとき, 各群のデータに対してノンパラメトリック回帰モデル

$$\begin{cases} Y_i(t) = f_1(t) + \varepsilon_i(t), & \varepsilon_i(t) \sim F_1(0, \sigma_1^2(t)), \\ X_j(t) = f_2(t) + \eta_j(t), & \eta_j(t) \sim F_2(0, \sigma_2^2(t)) \end{cases} \tag{3}$$

を想定する．ただし，$f_1(t)$, $f_2(t)$ は回帰関数，$\varepsilon_i(t)$ は平均 0, 分散 $\sigma_1^2(t)$ をもつ未知の分布 F_1 に従う確率変数，$\eta_j(t)$ は平均 0, 分散 $\sigma_2^2(t)$ をもつ未知の分布 F_2 に従う確率変数とする．ここで，すべての i, j, t に対して，$\varepsilon_i(t)$ と $\eta_j(t)$ は互いに独立であるとし，さらに，$i_1 \neq i_2$ と $j_1 \neq j_2$ に対して，$\varepsilon_{i_1}(t)$ と $\varepsilon_{i_2}(t)$, および $\eta_{j_1}(t)$ と $\eta_{j_2}(t)$ が互いに独立であるとする．このとき，(2) と同様の検定問題，すなわち，

$$H_0: \text{すべての}\, t \,\text{に対して}\, f_1(t) = f_2(t) \quad \text{vs.} \quad H_1: \text{ある}\, t \,\text{に対して}\, f_1(t) \neq f_2(t)$$

を考える．

3 検定方法

Sakurai *et al.* (1999) では，2 つの平均曲線の有意差検定を行うために，2 曲線の下の面積 (AUC (Area Under the Curve); 例えば Gibaldi and Perrier (1982) を参照) の差に基づき，検定統計量を構成している．本節でも，同様にして検定統計量を構成する．しかし一般に，2 つの回帰関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ の有意差検定を行う場合には，両者が開区間 $(1, n)$ 上で複数回交差する可能性があるため，若干の修正を要する．

本稿では，$f_1(t)$ と $f_2(t)$ との間に挟まれる部分の面積

$$S = \int_1^n |f_1(t) - f_2(t)| dt \tag{4}$$

が，(2) で与えられる帰無仮説の下では 0 となり，対立仮説の下では正の値を取ることに着目する．よって以下では，2 節の検定問題 (2) の代わりに

$$H_0: \ S = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \ S > 0 \tag{5}$$

という検定問題を考えればよい．

3.1 節では，2 つの回帰関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ との間に挟まれる部分の面積 (4) を台形則により推定し，3.2 節と 3.3 節では，それに基づく量を検定統計量とした検定法を提案する．

3.1 検定統計量の構成

一般に，対になったデータ $\{(Y_t, X_t)\}_{t=1}^n$ に対し，ノンパラメトリック回帰モデル

$$Y_t = f_1(t) + \xi_t, \quad X_t = f_2(t) + \zeta_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

を想定する．ただし，$f_1(t)$, $f_2(t)$ は回帰関数，ξ_t, ζ_t は平均 0, 有限な分散をもつ未知の分布に従う誤差項とする．この場合，2 つの回帰関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ に挟まれる部分の面積 $\int_1^n |f_1(t) - f_2(t)| dt$ の台形則による推定量は，$D_t = Y_t - X_t$ $(t = 1, \ldots, n)$ を定義しておけば，

$$\begin{aligned} T_{1n} =& T_{1n}(D_1, \ldots, D_n) \\ =& \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n-1} (|D_t| + |D_{t+1}|) I\{D_t D_{t+1} \geq 0\} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{|D_t|^2 + |D_{t+1}|^2}{|D_t| + |D_{t+1}|} I\{D_t D_{t+1} < 0\} \end{aligned} \tag{6}$$

により与えられる (Sakurai and Taguri, 2000). ただし, $I\{\cdot\}$ は定義関数を表し, 区間 $(t,\ t+1)$ での Y_t, X_t の値は, それぞれ $(Y_t,\ Y_{t+1})$, $(X_t,\ X_{t+1})$ の線形補間値を用いている.

3.2 節, 3.3 節では, 2 つの回帰関数の有意差検定 (5) を行うために, (6) の $\{D_1, \ldots, D_n\}$ を (1), および (3) から計算される量に置き換えて検定統計量を構成する. ただし検定統計量の帰無分布は, 1 節で述べたような curve resampling 法により近似する.

3.2 対応のある 2 群の回帰関数の有意差検定

(1) で与えられる 2 群のデータ $\{(Y_i(t), X_i(t))\}_{i=1}^m$ $(t = 1, \ldots, n)$ から, 標本平均関数

$$\bar{Y}(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i(t), \quad \bar{X}(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i(t), \tag{7}$$

および標本分散関数

$$\hat{\sigma}_1^2(t) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\{Y_i(t) - \bar{Y}(t)\}^2, \quad \hat{\sigma}_2^2(t) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\{X_i(t) - \bar{X}(t)\}^2 \tag{8}$$

を計算する. ここで, $\mathrm{Var}(\bar{Y}(t) - \bar{X}(t)) = \{\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t)\}/m$ より, これに対する 1 つの自然な推定量として,

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\bar{Y}(t) - \bar{X}(t)) = \frac{1}{m}\{\hat{\sigma}_1^2(t) + \hat{\sigma}_2^2(t)\} \tag{9}$$

が考えられる. ただし $\hat{\sigma}_1^2(t)$, $\hat{\sigma}_2^2(t)$ は, (8) により与えられる量である. いま, (7) から計算される標本平均関数の差 $\bar{Y}(t) - \bar{X}(t)$ を (9) の正の平方根で割った

$$Z_1(t) = \frac{\bar{Y}(t) - \bar{X}(t)}{\sqrt{\{\hat{\sigma}_1^2(t) + \hat{\sigma}_2^2(t)\}/m}}, \quad t = 1, \ldots, n \tag{10}$$

を, 標準化した系列と呼ぶことにする.

本節の Algorithm 3.1 では, curve resampling 法による 2 群の回帰関数の有意差検定法を提案する. この検定では, (10) によって標準化した系列 $\{Z_1(1), \ldots, Z_1(n)\}$ と, 3.1 節で構成した (6) を組み合わせた量を検定統計量とする. すなわち, 検定統計量として,

$$T_{1n} = T_{1n}(Z_1(1), \ldots, Z_1(n)) \tag{11}$$

を考える. ここで, 検定統計量 (11) の帰無分布の近似を行うために, 中心化した曲線の集合 $\{(y_i(t) - \bar{y}(t), x_i(t) - \bar{x}(t))\}_{i=1}^m$ $(t = 1, \ldots, n)$ からのリサンプリングを考える. これは, 「帰無仮説を反映するようなリサンプリング」(Hall and Wilson, 1991) を行うためである.

通常リサンプリング法では, 母集団分布からの無作為標本の抽出と, 抽出された初期標本から構成される経験分布からの無作為抽出を想定しているため, 得られたリサンプルが帰無仮説の下で抽出されているとは限らない. そこで, 初期標本 $\{(Y_i(t), X_i(t))\}_{i=1}^m$ を各群の平均曲線 $\bar{Y}(t)$, $\bar{X}(t)$ で中心化しておけば, $E^*[D^*(t)] = 0$ が成り立ち, 検定統計量の良好な帰無分布の近似分布が得られる. ただし E^* は, $\{(Y_i(t), X_i(t))\}_{i=1}^m$ $(t = 1, \ldots, n)$ が与えられた下での条件付き期待値を表し, $D^*(t)$ は $D(t) = Y(t) - X(t)$ のリサンプルでの値を表す.

この場合の検定法をまとめると, 以下のようになる.

Algorithm 3.1 (対応のある2群の回帰関数の有意差検定)

1. 有意水準 α を設定する.
2. 初期標本 $\{(y_i(t), x_i(t))\}_{i=1}^m$ $(t = 1, \dots, n)$ に基づいて, $t_{obs} = T_{1n}(z_1(1), \dots, z_1(n))$ を計算する. ただし, $\{z_1(t)\}_{t=1}^n$ は $\{Z_1(t)\}_{t=1}^n$ の実現値を表す.
3. 中心化した曲線の集合 $\{(\tilde{y}_i(t), \tilde{x}_i(t))\}_{i=1}^m (= \{(y_i(t) - \bar{y}(t), x_i(t) - \bar{x}(t))\}_{i=1}^m)$ $(t = 1, \dots, n)$ から $\{(\tilde{y}_i^{*b}(t), \tilde{x}_i^{*b}(t))\}_{i=1}^m$ $(t = 1, \dots, n;\ b = 1, \dots, B)$ を無作為復元抽出し, $t^{*b} = T_{1n}(z_1^{*b}(1), \dots, z_1^{*b}(n))$ を計算する. ここで $\{z_1^{*b}(t)\}_{t=1}^n$ は, (10) を抽出されたリサンプルに基づいて計算した値である.
4. 手順3を B 回繰り返し,

$$\begin{cases} \widehat{\mathrm{ASL}}_{boot} \leq \alpha \text{ のとき}, H_0 \text{ を棄却}, \\ \widehat{\mathrm{ASL}}_{boot} > \alpha \text{ のとき}, H_0 \text{ を採択} \end{cases} \tag{12}$$

により, 帰無仮説の棄却・採択を決定する. ただし, $\widehat{\mathrm{ASL}}_{boot} = \sum_{b=1}^B I\{t^{*b} \geq t_{obs}\}/B$ は達成有意水準 (achieved significance level) である.

3.3 対応のない2群の回帰関数の有意差検定

3.2節と同様にして, (3) で与えられる2群のデータ $\{Y_i(t)\}_{i=1}^{m_1}$, $\{X_j(t)\}_{j=1}^{m_2}$ $(t = 1, \dots, n)$ から, 標本平均関数

$$\bar{Y}(t) = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} Y_i(t), \quad \bar{X}(t) = \frac{1}{m_2} \sum_{j=1}^{m_2} X_j(t), \tag{13}$$

および標本分散関数

$$\hat{\sigma}_1^2(t) = \frac{1}{m_1 - 1} \sum_{i=1}^{m_1} \{Y_i(t) - \bar{Y}(t)\}^2, \quad \hat{\sigma}_2^2(t) = \frac{1}{m_2 - 1} \sum_{j=1}^{m_2} \{X_j(t) - \bar{X}(t)\}^2 \tag{14}$$

を計算する. ここで, $\mathrm{Var}(\bar{Y}(t) - \bar{X}(t)) = \sigma_1^2(t)/m_1 + \sigma_2^2(t)/m_2$ が成り立つから, これに対する1つの自然な推定量として,

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\bar{Y}(t) - \bar{X}(t)) = \frac{1}{m_1} \hat{\sigma}_1^2(t) + \frac{1}{m_2} \hat{\sigma}_2^2(t) \tag{15}$$

が考えられる. ただし $\hat{\sigma}_1^2(t)$, $\hat{\sigma}_2^2(t)$ は, (14) により与えられる量である. いま, (13) から計算される標本平均関数の差 $\bar{Y}(t) - \bar{X}(t)$ を (15) の正の平方根で割った

$$Z_2(t) = \frac{\bar{Y}(t) - \bar{X}(t)}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2(t)/m_1 + \hat{\sigma}_2^2(t)/m_2}}, \quad t = 1, \dots, n \tag{16}$$

において, $m_1 = m_2 = m$ とすれば (10) が得られるので, (16) も標準化した系列と呼ぶことにする. 本節では検定統計量として,

$$T_{1n} = T_{1n}(Z_2(1), \dots, Z_2(n)) \tag{17}$$

を考え, (17) の帰無分布の近似を行うために, 混合ブートストラップ検定 (汪・田栗, 1996), および並べ替え検定に curve resampling 法を適用した検定法を提案する.

混合ブートストラップ検定, および並べ替え検定の場合には, 2 群のデータを混合し, 混合した大きさ $m_1 + m_2$ の標本から 2 群のデータに対応するリサンプル, すなわち, 大きさがそれぞれ m_1 と m_2 のリサンプルを無作為抽出する. ただし前者の場合には, 標本からの復元抽出を行い, 後者の場合には, 標本からの非復元抽出を行うが, いずれの場合も, 帰無仮説の下では 2 群のデータを区別できない, という発想に基づいている. このようなリサンプリングにより, 3.2 節で述べたような「帰無仮説を反映するようなリサンプリング」を行うことができる.

この場合の検定方法をまとめると, それぞれ Algorithm 3.2, 3.3 のようになる.

Algorithm 3.2 (対応のない 2 群の回帰関数の有意差検定 (混合ブートストラップ検定))

1. 有意水準 α を設定する.
2. 初期標本 $\{y_i(t)\}_{i=1}^{m_1}$, $\{x_j(t)\}_{j=1}^{m_2}$ $(t = 1, \ldots, n)$ に基づき, $t_{obs} = T_{1n}(z_2(1), \ldots, z_2(n))$ を計算する. ただし, $\{z_2(t)\}_{t=1}^{n}$ は $\{Z_2(t)\}_{t=1}^{n}$ の実現値である.
3. 2 つの中心化した曲線の集合 $\{\tilde{y}_i(t)\}_{i=1}^{m_1}(= \{y_i(t) - \bar{y}(t)\}_{i=1}^{m_1})$, $\{\tilde{x}_j(t)\}_{j=1}^{m_2}(= \{x_j(t) - \bar{x}(t)\}_{j=1}^{m_2})$ $(t = 1, \ldots, n)$ を混合し, 大きさ $m_1 + m_2$ の標本 $\boldsymbol{c} = \{\tilde{y}_1(t), \ldots, \tilde{y}_{m_1}(t), \tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_{m_2}(t)\}$ $(t = 1, \ldots, n)$ を得る.
4. 混合した標本 $\boldsymbol{c}$ から $\{\tilde{y}_i^{*b}(t)\}_{i=1}^{m_1}$ と $\{\tilde{x}_j^{*b}(t)\}_{j=1}^{m_2}$ $(t = 1, \ldots, n;\ b = 1, \ldots, B)$ を無作為復元抽出し, $t^{*b} = T_{1n}(z_2^{*b}(1), \ldots, z_2^{*b}(n))$ を計算する. ただし, $\{z_2^{*b}(t)\}_{t=1}^{n}$ は (16) を抽出されたリサンプルから計算した値である.
5. 手順 4 を B 回繰り返し, (12) と同様にして帰無仮説の棄却・採択を決定する.

Algorithm 3.3 (対応のない 2 群の回帰関数の有意差検定 (並べ替え検定))

1. 有意水準 α を設定する.
2. 初期標本 $\{y_i(t)\}_{i=1}^{m_1}$, $\{x_j(t)\}_{j=1}^{m_2}$ $(t = 1, \ldots, n)$ に基づき, $t_{obs} = T_{1n}(z_2(1), \ldots, z_2(n))$ を計算する.
3. 2 つの中心化した曲線の集合 $\{\tilde{y}_i(t)\}_{i=1}^{m_1}(= \{y_i(t) - \bar{y}(t)\}_{i=1}^{m_1})$, $\{\tilde{x}_j(t)\}_{j=1}^{m_2}(= \{x_j(t) - \bar{x}(t)\}_{j=1}^{m_2})$ $(t = 1, \ldots, n)$ を混合し, 大きさ $m_1 + m_2$ の標本 $\boldsymbol{c} = \{\tilde{y}_1(t), \ldots, \tilde{y}_{m_1}(t), \tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_{m_2}(t)\}$ を得る.
4. 混合した標本 $\boldsymbol{c}$ から, $\{\tilde{y}_i^{*b}(t)\}_{i=1}^{m_1}$ と $\{\tilde{x}_i^{*b}(t)\}_{i=1}^{m_2}$ $(t = 1, \ldots, n;\ b = 1, \ldots, B)$ を無作為非復元抽出し, $t^{*b} = T_n(z_2^{*b}(1), \ldots, z_2^{*b}(n))$ を計算する. ただし, $\{z_2^{*b}(t)\}_{t=1}^{n}$ は, (16) を抽出したリサンプルに基づいて計算した値である.
5. 手順 4 を B 回繰り返し (ただし, $B \le \binom{m_1+m_2}{m_1}$),

$$\begin{cases} \widehat{\mathrm{ASL}}_{perm} \le \alpha \text{ のとき, } H_0 \text{ を棄却,} \\ \widehat{\mathrm{ASL}}_{perm} > \alpha \text{ のとき, } H_0 \text{ を採択} \end{cases}$$

により, 帰無仮説の棄却・採択を決定する. ただし, $\widehat{\mathrm{ASL}}_{perm} = \sum_{b=1}^{B} I\{t^{*b} \ge t_{obs}\}/B$ は達成有意水準である.

ここで, Algorithm 3.1 では中心化した曲線の集合からのリサンプリングは極めて重要であったが, Algorithm 3.2, 3.3 では重要ではない. それは上で述べたように, Algorithm 3.2,

3.3では, 2群を混合した標本からのリサンプリングを行うことにより, 「帰無仮説を反映するようなリサンプリング」を行っているためである. しかし, Algorithm 3.2, 3.3のような平均曲線による中心化を行っておくことにより, 汪・田栗(1996)のi.i.d.データに対する2標本の平均値の差の検定の場合と同様に, 僅かではあるが, 検出力が改善される可能性がある. 単純に混合ブートストラップ検定, および並べ替え検定を適用すれば, Algorithm 3.2, 3.3における手順3, 4は以下のようになる.

3′ 初期標本 $\{y_i(t)\}_{i=1}^{m_1}$, $\{x_j(t)\}_{j=1}^{m_2}$ $(t=1,\ldots,n)$ を混合し, 大きさ m_1+m_2 の標本 $\boldsymbol{w} = \{y_1(t),\ldots,y_{m_1}(t),x_1(t),\ldots,x_{m_2}(t)\}$ $(t=1,\ldots,n)$ を得る.

4′ 混合した標本 $\boldsymbol{w}$ から $\{y_i^{*b}(t)\}_{i=1}^{m_1}$ と $\{x_j^{*b}(t)\}_{j=1}^{m_2}$ $(t=1,\ldots,n;\ b=1,\ldots,B)$ を

$$\begin{cases} \text{無作為復元抽出し,} & \text{(Algorithm 3.2)} \\ \text{無作為非復元抽出し,} & \text{(Algorithm 3.3)} \end{cases}$$

$t^{*b} = T_{1n}(z_2^{*b}(1),\ldots,z_2^{*b}(n))$ を計算する.

4節におけるシミュレーションでは, 初期標本を中心化すべきか否かについての検討も行う.

4　検定のサイズ, 検出力の数値的検討

本節では, 3節で提案した検定のサイズ, 検出力をシミュレーションにより検討する. ただし, データが対になっている場合と対になっていない場合とに分け, まず, 提案した2つの回帰関数に挟まれる部分の面積に基づく量(6)を用いた検定法とその他の量を用いる検定法との比較・検討を行う. すなわち, (11), (17)に基づく検定だけでなく, ここでは,

$$T_{2n} = T_{2n}(D_1,\ldots,D_n) = \sum_{t=1}^{n} D_t^2, \quad T_{3n} = T_{3n}(D_1,\ldots,D_n) = \sum_{t=1}^{n} |D_t|,$$

による検定のサイズ, 検出力についても検討する. 次に, 上記検定の検定統計量を構成する際に用いた標準化した系列(10), (16)に加え, スケール調整を行わない $Z_0(t) = \bar{Y}(t) - \bar{X}(t)$ を適用した場合の結果との比較・検討を行う. さらに, Algorithm 3.2, 3.3におけるリサンプリングを行う前に, 初期標本を各群の平均曲線により中心化しておくことにより, 検出力が改善されるか否かについても検討する.

以下では2種類のモデルを考え, シミュレーションにより検定のサイズ, 検出力についての議論を行う. ここで, データが対になっている場合には, 各群のsubjectの長さが n, subject数が m の標本を独立に $R=200$ 組発生させ, データが対になっていない場合には, 各群のsubjectの長さが n, subject数が, それぞれ m_1, m_2 の標本を独立に $R=200$ 組発生させる. なお, 検定のサイズは $\alpha=0.05$ (サイズについては $\alpha=0.10$ も), リサンプリング回数は $B=500$ とした.

- モデル(1) : 各仮説に対応する回帰関数(真の構造)として,

$$\begin{cases} H_0: & f_1(t) = f_2(t) = 0 \\ H_1: & f_1(t) = 0; \quad f_2(t) = -c \quad (c \in \{0.5, 1\}) \end{cases}$$

を考え, 誤差項 $(\varepsilon,\ \eta)$ については, (a) $(N_1,\ N_2)$, (b) $(|N_1|-\sqrt{\pi/2},\ |N_2|-\sqrt{\pi/2})$, (c) $(|N_1|-\sqrt{\pi/2},\ \sqrt{\pi/2}-|N_2|)$ の3通りを考える. ただし, $N_1,\ N_2 \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,1)$ である. このモデルの場合には, subject の長さとして, $n=10,\ 20,\ 30$ の3通りの場合を, また subject 数については, $m=10,\ 20,\ 30$ の3通りの場合を検討する.

- モデル (2) : 各仮説に対応する回帰関数 (真の構造) として,

$$\begin{cases} H_0: & f_1(t)-f_2(t)=0 \\ H_1: & f_1(t)-f_2(t)=ct-0.5t \quad (c\in\{0.6,\ 0.7,\ 0.8\}) \end{cases}$$

を考え, 誤差項は, $\varepsilon_i(t) \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,\sigma_1^2(t))$, $\eta_i(t) \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,\sigma_2^2(t))$ とする. ただし, $(\sigma_1(t),\ \sigma_2(t))$ の組み合わせは, (a) $(0.5t,\ 0.25t)$, (b) $(0.25t,\ 0.25t)$, (c) $(0.25t,\ 0.5t)$, (d) $(0.5t,\ 0.5t)$ の4通りの場合を考える. このモデルの場合には, subject の長さとして, $n=10,\ 20,\ 30$ の3通りの場合を考えるが, 2群の subject 数については, $(m_1,\ m_2)=(10,10),\ (10,20),\ (10,30),\ (20,20),\ (20,30),\ (30,30)$ の6通りの場合を考える.

まず, 対応のある2群の場合の検定のサイズについての結果の一部を, 表1, 3にまとめる. n を固定して m を大きくすると level error は小さくなるが, m を固定して n を大きくすると level error は若干大きくなる. ここで $n=10$ の場合, $Z_0(t)$ を使用すると名目上の水準を過大評価するが, $Z_1(t)$ は, m が小さい場合には名目上の水準を過小評価し, m が大きい場合には, 名目上の水準を維持する傾向にある. また $n=20,\ 30$ の場合も, 名目上の水準を過小評価する傾向にある.

次に, 対応のない2群の場合の検定のサイズについての結果の一部を, 表5〜11にまとめる. この場合には, 対応のある2群の場合の傾向とほぼ同様な傾向が見られる. すなわち, n を固定して m_1, m_2 を大きくすると level error は小さくなるが, m_1 や m_2 を固定して n を大きくすると level error は大きくなる. また, $Z_0(t)$ を使用する場合には, 名目上の水準を過大評価する傾向にあり, 特に $m_1\neq m_2$ の場合には, その傾向は顕著である. 一方, スケールを調整した $Z_2(t)$ に関しては, 名目上の水準を維持する傾向が見られる. ブートストラップ検定と並べ替え検定による検定のサイズを比較してみると, m_1, m_2 が小さい場合には, 並べ替え検定の方が名目上の水準を維持する傾向にある. また, この場合の標本平均曲線による曲線の中心化の影響は, ほとんど見られなかった. すなわち, 各々の場合について, 曲線を中心化する場合としない場合の検定のサイズは, ほぼ同じ値が得られた.

最後に, 検出力の結果の一部を, 表2, 4, 12〜16に与える. まず全体的な傾向として, $Z_k(t)$ $(k=0,1,2)$ を固定した場合, (T_{1n} の検出力) $\geq$ (T_{3n} の検出力) $\geq$ (T_{2n} の検出力) となっていることが挙げられる. また, 検出力の増大のスピードは, 検定統計量を固定した場合, subject 数 m $(m_1,\ m_2)$ を増やすほうが, subject の長さ n を増やすよりもはやいという結果が得られた. 次に, 2群の対応がある場合には, 検定統計量を固定すると, モデル (1), モデル (2) (ただし m が小さい) の場合には, (Z_0 の検出力) $\geq$ (Z_1 の検出力) となり, モデル (2) (ただし m が大きい) の場合には, (Z_1 の検出力) $\geq$ (Z_0 の検出力) となった. 一方, 2群の対応がない場合には, ブートストラップ検定と並べ替え検定との比較を行うと, 並べ替え検定の検出力の方が高い. また, 曲線の中心化による影響については, 中心化した方が若干検出力が高くなる場合が見られた.

表 1: Empirical level of bootstrap tests in simulation study for Model (1); $\alpha = 0.05$

			n								
			10			20			30		
Model	m		T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
(a)	10	$Z_0(t)$	0.075	0.045	0.055	0.025	0.010	0.005	0.025	0.020	0.015
		$Z_1(t)$	0.015	0.005	0.005	0.005	0.010	0.000	0.000	0.005	0.000
	20	$Z_0(t)$	0.050	0.020	0.020	0.025	0.020	0.015	0.010	0.020	0.020
		$Z_1(t)$	0.030	0.010	0.010	0.005	0.015	0.010	0.000	0.010	0.010
	30	$Z_0(t)$	0.050	0.055	0.045	0.030	0.045	0.055	0.025	0.035	0.035
		$Z_1(t)$	0.050	0.040	0.040	0.020	0.020	0.020	0.010	0.015	0.025
(b)	10	$Z_0(t)$	0.070	0.055	0.050	0.040	0.025	0.040	0.020	0.010	0.010
		$Z_1(t)$	0.035	0.015	0.020	0.005	0.000	0.005	0.000	0.000	0.000
	20	$Z_0(t)$	0.075	0.040	0.055	0.015	0.030	0.045	0.025	0.015	0.005
		$Z_1(t)$	0.020	0.020	0.020	0.010	0.020	0.025	0.000	0.000	0.005
	30	$Z_0(t)$	0.065	0.070	0.075	0.035	0.015	0.025	0.030	0.010	0.010
		$Z_1(t)$	0.045	0.030	0.055	0.010	0.005	0.010	0.015	0.005	0.005
(c)	10	$Z_0(t)$	0.070	0.065	0.070	0.020	0.010	0.035	0.020	0.005	0.010
		$Z_1(t)$	0.030	0.030	0.020	0.005	0.005	0.000	0.000	0.005	0.000
	20	$Z_0(t)$	0.060	0.025	0.045	0.010	0.010	0.010	0.040	0.000	0.000
		$Z_1(t)$	0.035	0.010	0.015	0.005	0.000	0.005	0.010	0.010	0.000
	30	$Z_0(t)$	0.055	0.055	0.065	0.040	0.030	0.050	0.020	0.005	0.020
		$Z_1(t)$	0.055	0.035	0.060	0.045	0.010	0.030	0.015	0.010	0.020

表 2: Empirical power of 0.05 level bootstrap tests for $f_1(t) - f_2(t) = 0.5$

			n								
			10			20			30		
Model	m		T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
(a)	10	$Z_0(t)$	0.745	0.560	0.580	0.905	0.745	0.760	0.975	0.835	0.865
		$Z_1(t)$	0.550	0.280	0.315	0.735	0.300	0.420	0.840	0.430	0.535
	20	$Z_0(t)$	0.985	0.910	0.940	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		$Z_1(t)$	0.970	0.885	0.895	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	30	$Z_0(t)$	1.000	0.990	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		$Z_1(t)$	1.000	0.990	0.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
(b)	10	$Z_0(t)$	1.000	0.980	0.980	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		$Z_1(t)$	0.985	0.865	0.940	1.000	0.990	0.995	1.000	0.995	1.000
	20	$Z_0(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		$Z_1(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	30	$Z_0(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		$Z_1(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
(c)	10	$Z_0(t)$	1.000	0.985	0.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		$Z_1(t)$	0.985	0.685	0.920	1.000	0.845	0.995	1.000	0.925	1.000
	20	$Z_0(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		$Z_1(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	30	$Z_0(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		$Z_1(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表 3: Empirical level of bootstrap tests in simulation study for Model (2); $\alpha = 0.05$

Model	m		n = 10			n = 20			n = 30		
			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
(a)	10	$Z_0(t)$	0.050	0.065	0.060	0.030	0.045	0.050	0.045	0.045	0.015
		$Z_1(t)$	0.010	0.015	0.010	0.005	0.005	0.005	0.000	0.000	0.000
	20	$Z_0(t)$	0.040	0.065	0.070	0.070	0.060	0.045	0.025	0.040	0.030
		$Z_1(t)$	0.020	0.020	0.015	0.025	0.025	0.015	0.020	0.015	0.010
	30	$Z_0(t)$	0.045	0.070	0.070	0.050	0.060	0.055	0.040	0.035	0.040
		$Z_1(t)$	0.050	0.060	0.055	0.025	0.010	0.030	0.010	0.015	0.025
(b)	10	$Z_0(t)$	0.040	0.080	0.075	0.025	0.035	0.020	0.035	0.040	0.025
		$Z_1(t)$	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.000	0.000	0.005	0.000
	20	$Z_0(t)$	0.050	0.075	0.090	0.045	0.055	0.035	0.015	0.020	0.005
		$Z_1(t)$	0.035	0.015	0.015	0.010	0.020	0.010	0.005	0.005	0.010
	30	$Z_0(t)$	0.080	0.065	0.050	0.050	0.060	0.060	0.030	0.035	0.040
		$Z_1(t)$	0.045	0.030	0.040	0.025	0.030	0.035	0.010	0.015	0.015
(c)	10	$Z_0(t)$	0.070	0.080	0.080	0.030	0.040	0.020	0.020	0.040	0.030
		$Z_1(t)$	0.020	0.005	0.005	0.000	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
	20	$Z_0(t)$	0.050	0.055	0.055	0.040	0.055	0.040	0.050	0.030	0.025
		$Z_1(t)$	0.045	0.025	0.025	0.010	0.020	0.020	0.005	0.005	0.005
	30	$Z_0(t)$	0.070	0.055	0.065	0.050	0.050	0.075	0.025	0.040	0.035
		$Z_1(t)$	0.050	0.050	0.035	0.020	0.025	0.040	0.015	0.015	0.010
(d)	10	$Z_0(t)$	0.055	0.080	0.070	0.020	0.035	0.015	0.045	0.060	0.040
		$Z_1(t)$	0.015	0.005	0.010	0.005	0.010	0.000	0.005	0.005	0.005
	20	$Z_0(t)$	0.055	0.065	0.075	0.050	0.055	0.030	0.025	0.025	0.015
		$Z_1(t)$	0.030	0.010	0.010	0.010	0.020	0.010	0.000	0.015	0.010
	30	$Z_0(t)$	0.060	0.065	0.045	0.045	0.070	0.075	0.020	0.045	0.030
		$Z_1(t)$	0.040	0.030	0.035	0.015	0.025	0.025	0.010	0.015	0.020

表 4: Empirical power of 0.05 level bootstrap tests for $f_1(t) - f_2(t) = 0.1t$

			n								
			10			20			30		
Model	m		T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
(a)	10	$Z_0(t)$	0.215	0.145	0.145	0.230	0.100	0.115	0.285	0.145	0.125
		$Z_1(t)$	0.085	0.025	0.030	0.040	0.015	0.015	0.080	0.030	0.030
	20	$Z_0(t)$	0.420	0.220	0.255	0.550	0.355	0.380	0.665	0.405	0.455
		$Z_1(t)$	0.375	0.180	0.230	0.480	0.250	0.280	0.605	0.280	0.315
	30	$Z_0(t)$	0.640	0.380	0.465	0.780	0.555	0.620	0.875	0.645	0.725
		$Z_1(t)$	0.645	0.495	0.480	0.800	0.550	0.585	0.875	0.645	0.690
(b)	10	$Z_0(t)$	0.475	0.320	0.320	0.600	0.350	0.385	0.750	0.450	0.520
		$Z_1(t)$	0.295	0.130	0.165	0.370	0.115	0.180	0.460	0.145	0.205
	20	$Z_0(t)$	0.850	0.630	0.735	0.965	0.790	0.865	0.980	0.870	0.925
		$Z_1(t)$	0.835	0.630	0.680	0.970	0.820	0.885	0.985	0.895	0.920
	30	$Z_0(t)$	0.965	0.800	0.925	0.995	0.930	0.960	1.000	0.985	1.000
		$Z_1(t)$	0.975	0.920	0.920	1.000	0.985	0.995	1.000	1.000	1.000
(c)	10	$Z_0(t)$	0.235	0.175	0.160	0.215	0.110	0.130	0.265	0.170	0.170
		$Z_1(t)$	0.120	0.040	0.055	0.070	0.015	0.015	0.065	0.020	0.025
	20	$Z_0(t)$	0.375	0.205	0.290	0.550	0.325	0.395	0.640	0.395	0.435
		$Z_1(t)$	0.300	0.185	0.215	0.475	0.310	0.330	0.575	0.245	0.340
	30	$Z_0(t)$	0.570	0.405	0.440	0.730	0.530	0.600	0.865	0.610	0.700
		$Z_1(t)$	0.610	0.465	0.470	0.790	0.555	0.615	0.875	0.670	0.715
(d)	10	$Z_0(t)$	0.160	0.115	0.125	0.140	0.080	0.075	0.160	0.120	0.085
		$Z_1(t)$	0.065	0.020	0.030	0.025	0.020	0.015	0.030	0.020	0.015
	20	$Z_0(t)$	0.225	0.165	0.170	0.350	0.220	0.245	0.425	0.240	0.250
		$Z_1(t)$	0.225	0.110	0.125	0.290	0.145	0.150	0.360	0.145	0.170
	30	$Z_0(t)$	0.420	0.280	0.305	0.540	0.345	0.415	0.645	0.375	0.435
		$Z_1(t)$	0.430	0.275	0.270	0.545	0.360	0.360	0.640	0.370	0.400

表 5: Empirical level of bootstrap and permutation tests in simulation study for Model (1)(a); $\alpha = 0.05$

				$n=10$						$n=20$						$n=30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.055	0.030	0.025	0.075	0.060	0.065	0.035	0.025	0.025	0.055	0.040	0.050	0.020	0.005	0.010	0.035	0.030	0.030
			$Z_2(t)$	0.035	0.025	0.015	0.040	0.030	0.020	0.040	0.030	0.020	0.035	0.025	0.020	0.010	0.010	0.000	0.010	0.005	0.000
		Permutation	$Z_0(t)$	0.065	0.055	0.055	0.085	0.085	0.090	0.055	0.040	0.045	0.070	0.080	0.065	0.070	0.085	0.065	0.115	0.120	0.115
			$Z_2(t)$	0.060	0.050	0.050	0.055	0.040	0.055	0.060	0.055	0.050	0.050	0.055	0.050	0.070	0.075	0.070	0.075	0.065	0.065
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.035	0.025	0.025	0.055	0.045	0.050	0.030	0.010	0.010	0.040	0.020	0.020	0.025	0.020	0.030	0.030	0.035	0.030
			$Z_2(t)$	0.030	0.025	0.035	0.040	0.025	0.025	0.030	0.025	0.010	0.030	0.020	0.010	0.020	0.015	0.020	0.015	0.015	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.050	0.040	0.035	0.070	0.060	0.075	0.045	0.055	0.050	0.060	0.075	0.065	0.040	0.060	0.045	0.060	0.070	0.065
			$Z_2(t)$	0.060	0.045	0.055	0.060	0.040	0.060	0.050	0.065	0.045	0.045	0.060	0.045	0.045	0.070	0.040	0.050	0.070	0.040
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.010	0.010	0.035	0.025	0.025	0.040	0.025	0.020	0.030	0.030	0.025	0.035	0.025	0.010	0.025	0.030	0.020	0.030
			$Z_2(t)$	0.015	0.020	0.020	0.015	0.025	0.020	0.020	0.030	0.025	0.015	0.030	0.020	0.010	0.005	0.010	0.010	0.005	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.020	0.030	0.040	0.025	0.045	0.045	0.030	0.045	0.040	0.040	0.050	0.050	0.055	0.035	0.055	0.065	0.040	0.060
			$Z_2(t)$	0.040	0.050	0.035	0.030	0.050	0.035	0.040	0.045	0.045	0.045	0.045	0.050	0.045	0.025	0.045	0.045	0.020	0.040
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.040	0.035	0.050	0.060	0.050	0.070	0.030	0.040	0.040	0.030	0.040	0.055	0.055	0.025	0.040	0.060	0.035	0.055
			$Z_2(t)$	0.040	0.045	0.040	0.035	0.045	0.045	0.025	0.055	0.030	0.025	0.050	0.025	0.050	0.045	0.025	0.045	0.040	0.030
		Permutation	$Z_0(t)$	0.045	0.050	0.060	0.070	0.070	0.070	0.035	0.060	0.045	0.040	0.085	0.060	0.075	0.070	0.075	0.080	0.085	0.090
			$Z_2(t)$	0.045	0.060	0.060	0.045	0.045	0.065	0.040	0.070	0.050	0.035	0.080	0.050	0.080	0.070	0.075	0.080	0.065	0.075
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.040	0.025	0.050	0.050	0.035	0.055	0.020	0.020	0.015	0.025	0.020	0.015	0.030	0.015	0.030	0.040	0.020	0.045
			$Z_2(t)$	0.030	0.025	0.040	0.030	0.025	0.030	0.020	0.015	0.015	0.020	0.015	0.015	0.030	0.015	0.015	0.030	0.015	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.055	0.035	0.060	0.055	0.050	0.070	0.025	0.020	0.015	0.035	0.035	0.015	0.055	0.060	0.060	0.055	0.065	0.060
			$Z_2(t)$	0.045	0.055	0.065	0.045	0.045	0.055	0.030	0.030	0.015	0.030	0.025	0.015	0.055	0.045	0.055	0.050	0.035	0.055
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.035	0.035	0.055	0.045	0.055	0.060	0.040	0.015	0.025	0.045	0.025	0.040	0.030	0.020	0.020	0.030	0.030	0.020
			$Z_2(t)$	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.040	0.030	0.030	0.015	0.030	0.025	0.020	0.025	0.030	0.015	0.025	0.030	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.045	0.060	0.060	0.050	0.075	0.060	0.050	0.050	0.040	0.055	0.070	0.050	0.040	0.025	0.020	0.050	0.040	0.020
			$Z_2(t)$	0.040	0.050	0.060	0.040	0.050	0.060	0.045	0.040	0.040	0.045	0.040	0.040	0.035	0.040	0.025	0.035	0.035	0.025

表 6: Empirical level of bootstrap and permutation tests in simulation study for Model (1)(b); $\alpha = 0.05$

				$n=10$						$n=20$						$n=30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.030	0.025	0.030	0.065	0.045	0.065	0.030	0.035	0.030	0.065	0.045	0.045	0.015	0.030	0.020	0.035	0.030	0.035
			$Z_2(t)$	0.030	0.035	0.030	0.030	0.025	0.030	0.010	0.020	0.015	0.010	0.020	0.015	0.015	0.010	0.015	0.015	0.020	0.010
		Permutation	$Z_0(t)$	0.060	0.045	0.050	0.080	0.080	0.085	0.065	0.065	0.060	0.110	0.100	0.085	0.060	0.060	0.080	0.095	0.095	0.115
			$Z_2(t)$	0.065	0.065	0.055	0.065	0.065	0.055	0.070	0.055	0.060	0.075	0.060	0.060	0.050	0.050	0.075	0.055	0.045	0.060
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.045	0.035	0.030	0.065	0.050	0.040	0.025	0.020	0.025	0.030	0.025	0.025	0.015	0.010	0.015	0.025	0.010	0.020
			$Z_2(t)$	0.040	0.050	0.050	0.045	0.050	0.050	0.020	0.020	0.015	0.020	0.020	0.020	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
		Permutation	$Z_0(t)$	0.065	0.060	0.040	0.075	0.070	0.070	0.025	0.045	0.025	0.035	0.080	0.055	0.040	0.025	0.025	0.055	0.035	0.050
			$Z_2(t)$	0.060	0.055	0.065	0.050	0.055	0.070	0.030	0.060	0.055	0.035	0.065	0.055	0.035	0.015	0.025	0.035	0.025	0.025
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.055	0.055	0.050	0.060	0.080	0.060	0.035	0.035	0.040	0.050	0.045	0.040	0.010	0.000	0.010	0.020	0.025	0.015
			$Z_2(t)$	0.080	0.050	0.045	0.075	0.055	0.040	0.030	0.020	0.020	0.030	0.020	0.020	0.005	0.010	0.010	0.010	0.010	0.000
		Permutation	$Z_0(t)$	0.065	0.060	0.050	0.075	0.070	0.060	0.050	0.050	0.045	0.060	0.065	0.065	0.025	0.055	0.050	0.035	0.080	0.065
			$Z_2(t)$	0.085	0.080	0.055	0.085	0.080	0.050	0.045	0.040	0.045	0.040	0.040	0.040	0.020	0.050	0.040	0.025	0.045	0.040
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.035	0.040	0.045	0.050	0.060	0.050	0.030	0.020	0.025	0.055	0.045	0.045	0.030	0.020	0.025	0.045	0.045	0.045
			$Z_2(t)$	0.040	0.045	0.040	0.040	0.045	0.040	0.020	0.030	0.020	0.020	0.025	0.010	0.010	0.025	0.000	0.015	0.025	0.000
		Permutation	$Z_0(t)$	0.055	0.065	0.055	0.060	0.070	0.065	0.055	0.065	0.055	0.075	0.080	0.060	0.055	0.075	0.050	0.060	0.090	0.070
			$Z_2(t)$	0.055	0.060	0.045	0.065	0.060	0.050	0.050	0.060	0.060	0.045	0.065	0.055	0.040	0.055	0.055	0.040	0.050	0.050
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.035	0.035	0.035	0.045	0.035	0.035	0.025	0.020	0.030	0.025	0.030	0.035	0.015	0.025	0.030	0.020	0.045	0.035
			$Z_2(t)$	0.045	0.035	0.030	0.055	0.030	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.020	0.025	0.020	0.020	0.025	0.020
		Permutation	$Z_0(t)$	0.040	0.040	0.040	0.045	0.055	0.045	0.025	0.045	0.045	0.040	0.055	0.045	0.055	0.065	0.055	0.070	0.080	0.065
			$Z_2(t)$	0.045	0.045	0.045	0.045	0.050	0.045	0.045	0.045	0.040	0.045	0.045	0.040	0.045	0.070	0.045	0.045	0.055	0.050
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.020	0.025	0.015	0.025	0.040	0.025	0.040	0.045	0.055	0.055	0.055	0.060	0.040	0.035	0.050	0.050	0.045	0.075
			$Z_2(t)$	0.025	0.040	0.020	0.025	0.035	0.020	0.045	0.045	0.045	0.045	0.040	0.040	0.035	0.035	0.045	0.040	0.035	0.045
		Permutation	$Z_0(t)$	0.030	0.040	0.030	0.040	0.050	0.035	0.070	0.050	0.060	0.075	0.060	0.075	0.060	0.090	0.080	0.090	0.095	0.080
			$Z_2(t)$	0.035	0.045	0.030	0.035	0.045	0.030	0.075	0.070	0.090	0.065	0.075	0.070	0.060	0.075	0.085	0.060	0.075	0.085

表 7: Empirical level of bootstrap and permutation tests in simulation study for Model (1)(c); $\alpha = 0.05$

				$n=10$						$n=20$						$n=30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.020	0.015	0.030	0.040	0.040	0.050	0.035	0.005	0.030	0.050	0.035	0.045	0.015	0.010	0.005	0.045	0.025	0.030
			$Z_2(t)$	0.030	0.050	0.020	0.030	0.045	0.020	0.045	0.060	0.015	0.045	0.065	0.010	0.030	0.050	0.020	0.035	0.050	0.020
		Permutation	$Z_0(t)$	0.030	0.020	0.035	0.060	0.055	0.065	0.070	0.050	0.055	0.090	0.085	0.085	0.060	0.055	0.060	0.120	0.115	0.120
			$Z_2(t)$	0.055	0.075	0.040	0.045	0.075	0.040	0.105	0.120	0.095	0.100	0.110	0.090	0.105	0.170	0.110	0.115	0.160	0.105
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.075	0.035	0.050	0.085	0.055	0.075	0.025	0.020	0.025	0.035	0.030	0.045	0.015	0.010	0.020	0.030	0.020	0.040
			$Z_2(t)$	0.070	0.085	0.050	0.085	0.095	0.055	0.070	0.090	0.035	0.065	0.085	0.030	0.030	0.050	0.020	0.030	0.055	0.020
		Permutation	$Z_0(t)$	0.070	0.045	0.070	0.090	0.055	0.085	0.040	0.050	0.070	0.095	0.095	0.080	0.050	0.035	0.055	0.065	0.070	0.085
			$Z_2(t)$	0.090	0.110	0.100	0.095	0.115	0.095	0.125	0.140	0.105	0.125	0.130	0.095	0.090	0.095	0.105	0.095	0.100	0.095
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.045	0.045	0.055	0.060	0.060	0.060	0.045	0.040	0.040	0.060	0.050	0.050	0.010	0.010	0.005	0.025	0.025	0.025
			$Z_2(t)$	0.060	0.085	0.065	0.065	0.080	0.065	0.050	0.065	0.035	0.050	0.065	0.030	0.035	0.060	0.025	0.025	0.060	0.025
		Permutation	$Z_0(t)$	0.055	0.055	0.055	0.060	0.065	0.065	0.065	0.070	0.055	0.075	0.080	0.065	0.040	0.045	0.030	0.060	0.050	0.060
			$Z_2(t)$	0.095	0.105	0.075	0.085	0.100	0.085	0.080	0.100	0.070	0.080	0.095	0.070	0.085	0.105	0.070	0.080	0.110	0.065
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.045	0.040	0.040	0.055	0.050	0.055	0.030	0.030	0.045	0.035	0.030	0.060	0.030	0.015	0.040	0.040	0.030	0.050
			$Z_2(t)$	0.045	0.065	0.050	0.045	0.065	0.040	0.030	0.045	0.035	0.025	0.045	0.030	0.025	0.040	0.045	0.030	0.040	0.050
		Permutation	$Z_0(t)$	0.050	0.040	0.050	0.060	0.080	0.055	0.045	0.045	0.060	0.060	0.055	0.070	0.050	0.055	0.055	0.075	0.060	0.075
			$Z_2(t)$	0.075	0.075	0.060	0.060	0.075	0.060	0.075	0.075	0.070	0.075	0.080	0.080	0.065	0.110	0.070	0.075	0.095	0.065
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.025	0.035	0.040	0.045	0.045	0.045	0.030	0.005	0.010	0.040	0.020	0.015	0.025	0.020	0.035	0.040	0.020	0.035
			$Z_2(t)$	0.035	0.055	0.035	0.035	0.055	0.035	0.035	0.035	0.015	0.035	0.035	0.015	0.065	0.060	0.035	0.065	0.065	0.035
		Permutation	$Z_0(t)$	0.035	0.030	0.045	0.045	0.060	0.045	0.035	0.025	0.025	0.045	0.035	0.025	0.065	0.050	0.055	0.085	0.070	0.075
			$Z_2(t)$	0.055	0.070	0.055	0.055	0.075	0.055	0.045	0.045	0.040	0.045	0.055	0.045	0.085	0.105	0.095	0.085	0.105	0.090
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.065	0.045	0.055	0.075	0.045	0.065	0.035	0.045	0.050	0.035	0.055	0.055	0.025	0.030	0.030	0.045	0.035	0.030
			$Z_2(t)$	0.065	0.065	0.040	0.070	0.055	0.035	0.045	0.060	0.055	0.040	0.060	0.050	0.030	0.050	0.030	0.035	0.040	0.030
		Permutation	$Z_0(t)$	0.065	0.060	0.050	0.075	0.060	0.065	0.055	0.070	0.070	0.055	0.075	0.075	0.050	0.060	0.035	0.055	0.065	0.045
			$Z_2(t)$	0.070	0.070	0.060	0.075	0.065	0.065	0.065	0.070	0.080	0.070	0.075	0.080	0.055	0.060	0.045	0.055	0.055	0.040

表 8: Empirical level of bootstrap and permutation tests in simulation study for Model (2)(a); $\alpha = 0.05$

				$n=10$						$n=20$						$n=30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.055	0.040	0.060	0.070	0.065	0.075	0.030	0.025	0.020	0.050	0.050	0.040	0.015	0.020	0.015	0.040	0.035	0.045
			$Z_2(t)$	0.045	0.045	0.035	0.050	0.040	0.025	0.030	0.030	0.010	0.025	0.025	0.005	0.015	0.020	0.010	0.015	0.020	0.010
		Permutation	$Z_0(t)$	0.075	0.070	0.075	0.130	0.085	0.115	0.045	0.060	0.045	0.105	0.080	0.065	0.075	0.080	0.065	0.115	0.105	0.100
			$Z_2(t)$	0.055	0.075	0.070	0.070	0.085	0.070	0.060	0.080	0.040	0.050	0.080	0.045	0.105	0.100	0.085	0.090	0.095	0.065
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.185	0.155	0.165	0.200	0.180	0.200	0.190	0.220	0.220	0.245	0.255	0.245	0.180	0.215	0.195	0.220	0.270	0.230
			$Z_2(t)$	0.040	0.045	0.035	0.050	0.040	0.030	0.020	0.055	0.005	0.015	0.055	0.005	0.020	0.035	0.020	0.020	0.040	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.210	0.175	0.210	0.230	0.200	0.250	0.330	0.290	0.315	0.380	0.345	0.350	0.300	0.345	0.340	0.360	0.370	0.375
			$Z_2(t)$	0.070	0.075	0.065	0.070	0.070	0.055	0.075	0.105	0.065	0.065	0.095	0.070	0.065	0.140	0.085	0.080	0.130	0.075
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.275	0.280	0.240	0.305	0.310	0.300	0.350	0.340	0.330	0.390	0.365	0.385	0.455	0.440	0.485	0.505	0.485	0.560
			$Z_2(t)$	0.025	0.045	0.030	0.025	0.055	0.040	0.020	0.045	0.030	0.025	0.040	0.025	0.015	0.010	0.015	0.010	0.010	0.025
		Permutation	$Z_0(t)$	0.280	0.295	0.275	0.315	0.325	0.320	0.420	0.375	0.430	0.460	0.430	0.485	0.580	0.555	0.610	0.610	0.570	0.660
			$Z_2(t)$	0.050	0.075	0.055	0.055	0.070	0.055	0.060	0.070	0.060	0.060	0.080	0.065	0.090	0.080	0.105	0.090	0.070	0.095
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.040	0.065	0.055	0.050	0.070	0.065	0.030	0.045	0.035	0.035	0.045	0.035	0.035	0.015	0.020	0.045	0.020	0.040
			$Z_2(t)$	0.040	0.040	0.040	0.045	0.035	0.035	0.015	0.045	0.025	0.015	0.050	0.025	0.040	0.030	0.035	0.040	0.025	0.030
		Permutation	$Z_0(t)$	0.050	0.060	0.060	0.060	0.070	0.070	0.040	0.060	0.045	0.065	0.065	0.065	0.075	0.045	0.060	0.095	0.050	0.075
			$Z_2(t)$	0.060	0.040	0.060	0.055	0.040	0.050	0.040	0.065	0.050	0.040	0.065	0.050	0.095	0.065	0.080	0.090	0.070	0.080
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.130	0.120	0.125	0.145	0.135	0.135	0.095	0.120	0.095	0.110	0.135	0.115	0.140	0.125	0.165	0.150	0.155	0.170
			$Z_2(t)$	0.055	0.060	0.060	0.060	0.060	0.055	0.035	0.015	0.015	0.035	0.020	0.015	0.020	0.030	0.020	0.015	0.030	0.025
		Permutation	$Z_0(t)$	0.160	0.125	0.165	0.185	0.155	0.195	0.120	0.160	0.135	0.145	0.200	0.175	0.205	0.230	0.230	0.235	0.250	0.240
			$Z_2(t)$	0.075	0.095	0.090	0.080	0.075	0.085	0.055	0.035	0.035	0.060	0.040	0.035	0.075	0.090	0.070	0.070	0.075	0.080
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.030	0.040	0.030	0.035	0.050	0.035	0.045	0.020	0.045	0.060	0.025	0.055	0.020	0.015	0.020	0.020	0.020	0.030
			$Z_2(t)$	0.025	0.025	0.035	0.025	0.025	0.035	0.040	0.045	0.045	0.035	0.045	0.035	0.020	0.010	0.020	0.020	0.010	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.030	0.040	0.030	0.040	0.050	0.040	0.070	0.035	0.060	0.080	0.065	0.075	0.035	0.055	0.045	0.050	0.060	0.050
			$Z_2(t)$	0.040	0.035	0.045	0.045	0.035	0.050	0.060	0.065	0.065	0.060	0.070	0.065	0.050	0.065	0.050	0.055	0.055	0.055

表 9: Empirical level of bootstrap and permutation tests in simulation study for Model (2)(b); $\alpha = 0.05$

				$n=10$						$n=20$						$n=30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.065	0.040	0.045	0.085	0.065	0.080	0.035	0.030	0.030	0.050	0.040	0.040	0.025	0.020	0.020	0.060	0.060	0.065
			$Z_2(t)$	0.035	0.025	0.015	0.040	0.030	0.020	0.040	0.030	0.020	0.035	0.025	0.020	0.010	0.010	0.000	0.010	0.005	0.000
		Permutation	$Z_0(t)$	0.075	0.055	0.075	0.100	0.100	0.095	0.055	0.050	0.065	0.080	0.080	0.070	0.080	0.070	0.080	0.110	0.110	0.115
			$Z_2(t)$	0.060	0.050	0.050	0.055	0.040	0.055	0.060	0.055	0.050	0.050	0.055	0.050	0.070	0.075	0.070	0.075	0.065	0.065
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.035	0.040	0.040	0.070	0.055	0.050	0.050	0.040	0.030	0.060	0.055	0.045	0.030	0.045	0.030	0.040	0.060	0.040
			$Z_2(t)$	0.030	0.025	0.035	0.040	0.025	0.025	0.030	0.025	0.010	0.030	0.020	0.010	0.020	0.015	0.020	0.015	0.015	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.045	0.045	0.045	0.095	0.060	0.070	0.055	0.050	0.040	0.065	0.070	0.075	0.040	0.070	0.060	0.060	0.085	0.075
			$Z_2(t)$	0.060	0.045	0.055	0.060	0.040	0.060	0.050	0.065	0.045	0.045	0.060	0.045	0.045	0.070	0.040	0.050	0.070	0.040
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.035	0.025	0.040	0.050	0.025	0.050	0.025	0.045	0.040	0.040	0.045	0.040	0.030	0.040	0.035	0.045	0.040	0.035
			$Z_2(t)$	0.015	0.020	0.020	0.015	0.025	0.020	0.020	0.030	0.025	0.015	0.030	0.020	0.010	0.005	0.010	0.010	0.005	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.035	0.035	0.040	0.045	0.040	0.050	0.035	0.055	0.040	0.045	0.070	0.040	0.050	0.045	0.040	0.065	0.050	0.050
			$Z_2(t)$	0.040	0.050	0.035	0.030	0.050	0.035	0.040	0.045	0.045	0.045	0.045	0.050	0.045	0.025	0.045	0.045	0.020	0.040
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.065	0.065	0.050	0.075	0.090	0.050	0.050	0.060	0.050	0.065	0.060	0.055	0.035	0.025	0.030	0.055	0.040	0.050
			$Z_2(t)$	0.040	0.045	0.040	0.035	0.045	0.045	0.025	0.055	0.030	0.025	0.050	0.025	0.050	0.045	0.025	0.045	0.040	0.030
		Permutation	$Z_0(t)$	0.070	0.070	0.050	0.080	0.095	0.055	0.060	0.055	0.060	0.080	0.070	0.070	0.075	0.045	0.060	0.090	0.060	0.075
			$Z_2(t)$	0.045	0.060	0.060	0.045	0.045	0.065	0.040	0.070	0.050	0.035	0.080	0.050	0.080	0.070	0.075	0.080	0.065	0.075
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.045	0.040	0.040	0.050	0.045	0.045	0.020	0.045	0.025	0.025	0.060	0.030	0.040	0.020	0.045	0.060	0.045	0.050
			$Z_2(t)$	0.030	0.025	0.040	0.030	0.025	0.030	0.020	0.015	0.015	0.020	0.015	0.015	0.030	0.015	0.015	0.030	0.015	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.055	0.030	0.045	0.055	0.045	0.050	0.025	0.060	0.030	0.030	0.075	0.050	0.075	0.050	0.065	0.100	0.070	0.080
			$Z_2(t)$	0.045	0.055	0.065	0.045	0.045	0.055	0.030	0.030	0.015	0.030	0.025	0.015	0.055	0.045	0.055	0.050	0.035	0.055
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.035	0.040	0.045	0.045	0.040	0.045	0.045	0.015	0.025	0.055	0.020	0.030	0.020	0.035	0.025	0.030	0.040	0.025
			$Z_2(t)$	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.040	0.030	0.030	0.015	0.030	0.025	0.020	0.025	0.030	0.015	0.025	0.030	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.040	0.045	0.040	0.055	0.050	0.045	0.055	0.020	0.040	0.070	0.035	0.060	0.035	0.055	0.035	0.040	0.065	0.035
			$Z_2(t)$	0.040	0.050	0.060	0.040	0.050	0.060	0.045	0.040	0.040	0.045	0.040	0.040	0.035	0.040	0.025	0.035	0.035	0.025

表 10: Empirical level of bootstrap and permutation tests in simulation study for Model (2)(c); $\alpha = 0.05$

				$n = 10$						$n = 20$						$n = 30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.020	0.045	0.035	0.050	0.055	0.050	0.030	0.020	0.030	0.040	0.025	0.050	0.010	0.000	0.005	0.025	0.025	0.010
			$Z_2(t)$	0.020	0.025	0.010	0.025	0.030	0.005	0.020	0.030	0.025	0.020	0.015	0.020	0.005	0.005	0.000	0.005	0.005	0.000
		Permutation	$Z_0(t)$	0.065	0.060	0.045	0.075	0.075	0.080	0.060	0.045	0.075	0.095	0.080	0.105	0.055	0.060	0.060	0.095	0.105	0.105
			$Z_2(t)$	0.055	0.065	0.060	0.050	0.075	0.065	0.075	0.080	0.085	0.075	0.070	0.075	0.090	0.100	0.080	0.090	0.090	0.060
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.000	0.010	0.010	0.000	0.010	0.010	0.000	0.005	0.000	0.005	0.005	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
			$Z_2(t)$	0.015	0.010	0.020	0.015	0.015	0.025	0.020	0.010	0.005	0.020	0.010	0.005	0.020	0.010	0.010	0.015	0.010	0.010
		Permutation	$Z_0(t)$	0.000	0.010	0.010	0.000	0.020	0.010	0.005	0.005	0.005	0.010	0.010	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.005
			$Z_2(t)$	0.030	0.030	0.035	0.040	0.030	0.035	0.040	0.030	0.050	0.040	0.045	0.045	0.035	0.035	0.035	0.040	0.040	0.035
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.000	0.005	0.000	0.000	0.005	0.000	0.000	0.005	0.000	0.000	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
			$Z_2(t)$	0.015	0.030	0.035	0.015	0.030	0.035	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.005	0.000	0.005	0.005	0.000	0.005
		Permutation	$Z_0(t)$	0.000	0.005	0.000	0.000	0.005	0.000	0.000	0.005	0.000	0.000	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
			$Z_2(t)$	0.015	0.045	0.050	0.020	0.040	0.045	0.025	0.030	0.035	0.035	0.030	0.040	0.010	0.010	0.020	0.010	0.020	0.025
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.050	0.075	0.050	0.080	0.080	0.065	0.065	0.070	0.060	0.075	0.085	0.080	0.035	0.020	0.030	0.040	0.030	0.035
			$Z_2(t)$	0.045	0.055	0.050	0.050	0.065	0.050	0.025	0.035	0.030	0.025	0.045	0.030	0.035	0.020	0.015	0.035	0.020	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.075	0.095	0.070	0.095	0.115	0.080	0.085	0.090	0.090	0.100	0.115	0.110	0.055	0.035	0.060	0.070	0.055	0.070
			$Z_2(t)$	0.075	0.080	0.065	0.075	0.090	0.070	0.055	0.065	0.060	0.055	0.060	0.065	0.060	0.075	0.050	0.060	0.075	0.050
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.005	0.010	0.005	0.015	0.010	0.010	0.005	0.005	0.000	0.005	0.005	0.005	0.000	0.000	0.000	0.005	0.000	0.000
			$Z_2(t)$	0.020	0.020	0.030	0.025	0.025	0.025	0.020	0.010	0.010	0.015	0.010	0.010	0.030	0.015	0.025	0.035	0.020	0.025
		Permutation	$Z_0(t)$	0.010	0.015	0.010	0.015	0.015	0.010	0.005	0.005	0.005	0.010	0.005	0.005	0.015	0.000	0.005	0.015	0.000	0.010
			$Z_2(t)$	0.040	0.040	0.050	0.045	0.040	0.050	0.025	0.020	0.020	0.030	0.020	0.015	0.075	0.055	0.065	0.065	0.050	0.060
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.035	0.045	0.035	0.040	0.045	0.040	0.030	0.020	0.025	0.035	0.030	0.030	0.025	0.040	0.015	0.030	0.045	0.020
			$Z_2(t)$	0.045	0.040	0.050	0.045	0.035	0.050	0.040	0.030	0.025	0.040	0.030	0.030	0.030	0.025	0.020	0.025	0.030	0.020
		Permutation	$Z_0(t)$	0.045	0.045	0.045	0.045	0.055	0.050	0.045	0.050	0.045	0.060	0.055	0.060	0.045	0.060	0.045	0.060	0.065	0.050
			$Z_2(t)$	0.065	0.050	0.055	0.060	0.045	0.055	0.040	0.055	0.060	0.040	0.060	0.060	0.045	0.045	0.050	0.045	0.055	0.050

表 11: Empirical level of bootstrap and permutation tests in simulation study for Model (2)(d); $\alpha = 0.05$

				$n=10$						$n=20$						$n=30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.065	0.040	0.045	0.085	0.065	0.080	0.035	0.030	0.030	0.050	0.040	0.040	0.025	0.020	0.020	0.060	0.060	0.065
			$Z_2(t)$	0.035	0.025	0.015	0.040	0.030	0.020	0.040	0.030	0.020	0.035	0.025	0.020	0.010	0.010	0.000	0.010	0.005	0.000
		Permutation	$Z_0(t)$	0.075	0.055	0.075	0.100	0.100	0.095	0.055	0.050	0.065	0.080	0.080	0.070	0.080	0.070	0.080	0.110	0.110	0.115
			$Z_2(t)$	0.060	0.050	0.050	0.055	0.040	0.055	0.060	0.055	0.050	0.050	0.055	0.050	0.070	0.075	0.070	0.075	0.065	0.065
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.035	0.040	0.040	0.070	0.055	0.050	0.050	0.040	0.030	0.060	0.055	0.045	0.030	0.045	0.030	0.040	0.060	0.040
			$Z_2(t)$	0.030	0.025	0.035	0.040	0.025	0.025	0.030	0.025	0.010	0.030	0.020	0.010	0.020	0.015	0.020	0.015	0.015	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.045	0.045	0.045	0.095	0.060	0.070	0.055	0.050	0.040	0.065	0.070	0.075	0.040	0.070	0.060	0.060	0.085	0.075
			$Z_2(t)$	0.060	0.045	0.055	0.060	0.040	0.060	0.050	0.065	0.045	0.045	0.060	0.045	0.045	0.070	0.040	0.050	0.070	0.040
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.035	0.025	0.040	0.050	0.025	0.050	0.025	0.045	0.040	0.040	0.045	0.040	0.030	0.040	0.035	0.045	0.040	0.035
			$Z_2(t)$	0.015	0.020	0.020	0.015	0.025	0.020	0.020	0.030	0.025	0.015	0.030	0.020	0.010	0.005	0.010	0.010	0.005	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.035	0.035	0.040	0.045	0.040	0.050	0.035	0.055	0.040	0.045	0.070	0.040	0.050	0.045	0.040	0.065	0.050	0.050
			$Z_2(t)$	0.040	0.050	0.035	0.030	0.050	0.035	0.040	0.045	0.045	0.045	0.045	0.050	0.045	0.025	0.045	0.045	0.020	0.040
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.065	0.065	0.050	0.075	0.090	0.050	0.050	0.060	0.050	0.065	0.060	0.055	0.035	0.025	0.030	0.055	0.040	0.050
			$Z_2(t)$	0.040	0.045	0.040	0.035	0.045	0.045	0.025	0.055	0.030	0.025	0.050	0.025	0.050	0.045	0.025	0.045	0.040	0.030
		Permutation	$Z_0(t)$	0.070	0.070	0.050	0.080	0.095	0.055	0.060	0.055	0.060	0.080	0.070	0.070	0.075	0.045	0.060	0.090	0.060	0.075
			$Z_2(t)$	0.045	0.060	0.060	0.045	0.045	0.065	0.040	0.070	0.050	0.035	0.080	0.050	0.080	0.070	0.075	0.080	0.065	0.075
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.045	0.040	0.040	0.050	0.045	0.045	0.020	0.045	0.025	0.025	0.060	0.030	0.040	0.020	0.045	0.060	0.045	0.050
			$Z_2(t)$	0.030	0.025	0.040	0.030	0.025	0.030	0.020	0.015	0.015	0.020	0.015	0.015	0.030	0.015	0.015	0.030	0.015	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.055	0.030	0.045	0.055	0.045	0.050	0.025	0.060	0.030	0.030	0.075	0.050	0.075	0.050	0.065	0.100	0.070	0.080
			$Z_2(t)$	0.045	0.055	0.065	0.045	0.045	0.055	0.030	0.030	0.015	0.030	0.025	0.015	0.055	0.045	0.055	0.050	0.035	0.055
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.035	0.040	0.045	0.045	0.040	0.045	0.045	0.015	0.025	0.055	0.020	0.030	0.020	0.035	0.025	0.030	0.040	0.025
			$Z_2(t)$	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.040	0.030	0.030	0.015	0.030	0.025	0.020	0.025	0.030	0.015	0.025	0.030	0.015
		Permutation	$Z_0(t)$	0.040	0.045	0.040	0.055	0.050	0.045	0.055	0.020	0.040	0.070	0.035	0.060	0.035	0.055	0.035	0.040	0.065	0.035
			$Z_2(t)$	0.040	0.050	0.060	0.040	0.050	0.060	0.045	0.040	0.040	0.045	0.040	0.040	0.035	0.040	0.025	0.035	0.035	0.025

表 12: Empirical power of 0.05 level bootstrap and permutation tests for Model (1)(a) with $f_1(t) - f_2(t) = 0.5$

				$n = 10$						$n = 20$						$n = 30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.755	0.580	0.595	0.800	0.650	0.685	0.910	0.720	0.765	0.950	0.810	0.845	0.985	0.870	0.890	0.990	0.925	0.940
			$Z_2(t)$	0.720	0.520	0.545	0.730	0.505	0.525	0.880	0.685	0.705	0.885	0.690	0.705	0.955	0.795	0.805	0.955	0.805	0.800
		Permutation	$Z_0(t)$	0.780	0.625	0.655	0.820	0.725	0.735	0.960	0.885	0.860	0.985	0.920	0.915	0.995	0.950	0.960	1.000	0.975	0.980
			$Z_2(t)$	0.780	0.610	0.640	0.785	0.600	0.640	0.930	0.830	0.855	0.930	0.830	0.845	0.995	0.945	0.965	0.995	0.940	0.960
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.890	0.785	0.810	0.910	0.820	0.850	0.990	0.935	0.965	0.990	0.975	0.970	1.000	0.985	0.990	1.000	0.985	0.995
			$Z_2(t)$	0.880	0.720	0.760	0.885	0.720	0.770	0.975	0.890	0.935	0.980	0.890	0.930	0.995	0.950	0.970	0.995	0.955	0.970
		Permutation	$Z_0(t)$	0.910	0.820	0.845	0.915	0.830	0.875	0.990	0.980	0.970	0.995	0.995	0.985	1.000	1.000	0.995	1.000	1.000	0.995
			$Z_2(t)$	0.900	0.780	0.830	0.900	0.775	0.830	0.995	0.960	0.965	0.995	0.955	0.965	0.995	0.985	0.995	0.995	0.985	0.995
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.930	0.810	0.860	0.930	0.850	0.885	0.995	0.980	0.975	0.995	0.985	0.985	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
			$Z_2(t)$	0.900	0.750	0.815	0.910	0.770	0.825	0.995	0.945	0.965	0.995	0.955	0.965	1.000	0.995	1.000	1.000	0.995	1.000
		Permutation	$Z_0(t)$	0.930	0.855	0.875	0.940	0.865	0.900	0.995	0.990	0.985	0.995	0.990	0.990	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
			$Z_2(t)$	0.910	0.800	0.850	0.920	0.805	0.845	0.995	0.965	0.990	0.995	0.970	0.990	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.980	0.950	0.950	0.980	0.955	0.965	1.000	0.995	0.995	1.000	0.995	0.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
			$Z_2(t)$	0.975	0.940	0.950	0.975	0.935	0.950	1.000	0.990	0.995	1.000	0.995	0.995	1.000	0.995	0.995	1.000	0.995	0.995
		Permutation	$Z_0(t)$	0.980	0.950	0.960	0.980	0.965	0.970	1.000	0.995	0.995	1.000	1.000	0.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
			$Z_2(t)$	0.975	0.945	0.955	0.975	0.945	0.960	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.985	0.970	0.975	0.985	0.975	0.975	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
			$Z_2(t)$	0.985	0.960	0.975	0.985	0.960	0.975	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		Permutation	$Z_0(t)$	0.985	0.980	0.980	0.990	0.980	0.985	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
			$Z_2(t)$	0.990	0.970	0.975	0.990	0.965	0.975	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
			$Z_2(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		Permutation	$Z_0(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
			$Z_2(t)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表 13: Empirical power of 0.05 level bootstrap and permutation tests for Model (2)(a) with $f_1(t) - f_2(t) = 0.1t$

				$n=10$						$n=20$						$n=30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.190	0.095	0.115	0.260	0.145	0.150	0.140	0.090	0.080	0.265	0.115	0.120	0.170	0.075	0.090	0.220	0.120	0.135
			$Z_2(t)$	0.150	0.135	0.115	0.170	0.130	0.085	0.205	0.130	0.085	0.215	0.125	0.070	0.175	0.125	0.065	0.170	0.115	0.055
		Permutation	$Z_0(t)$	0.235	0.155	0.170	0.285	0.215	0.215	0.290	0.140	0.205	0.385	0.240	0.285	0.345	0.220	0.240	0.440	0.300	0.340
			$Z_2(t)$	0.255	0.220	0.195	0.275	0.210	0.190	0.390	0.320	0.285	0.375	0.265	0.265	0.480	0.350	0.315	0.480	0.340	0.305
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.470	0.310	0.330	0.525	0.370	0.405	0.620	0.500	0.510	0.680	0.560	0.625	0.640	0.465	0.510	0.690	0.540	0.580
			$Z_2(t)$	0.195	0.160	0.125	0.205	0.155	0.130	0.250	0.125	0.110	0.255	0.125	0.125	0.275	0.205	0.175	0.285	0.205	0.170
		Permutation	$Z_0(t)$	0.505	0.370	0.405	0.530	0.445	0.490	0.705	0.600	0.670	0.750	0.655	0.700	0.795	0.630	0.655	0.835	0.665	0.705
			$Z_2(t)$	0.250	0.240	0.185	0.265	0.240	0.165	0.430	0.335	0.305	0.430	0.310	0.295	0.495	0.395	0.325	0.510	0.385	0.310
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.590	0.410	0.500	0.635	0.465	0.545	0.770	0.635	0.685	0.810	0.670	0.740	0.890	0.795	0.800	0.905	0.815	0.820
			$Z_2(t)$	0.220	0.170	0.140	0.225	0.175	0.140	0.295	0.205	0.145	0.335	0.200	0.160	0.315	0.215	0.175	0.325	0.205	0.185
		Permutation	$Z_0(t)$	0.635	0.450	0.555	0.660	0.500	0.595	0.845	0.690	0.775	0.865	0.705	0.795	0.935	0.820	0.845	0.935	0.840	0.885
			$Z_2(t)$	0.260	0.210	0.175	0.275	0.210	0.180	0.430	0.300	0.300	0.430	0.305	0.280	0.515	0.385	0.345	0.520	0.360	0.350
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.410	0.225	0.260	0.430	0.245	0.295	0.550	0.265	0.310	0.580	0.320	0.405	0.650	0.320	0.430	0.695	0.390	0.460
			$Z_2(t)$	0.430	0.335	0.320	0.425	0.355	0.310	0.585	0.385	0.385	0.595	0.400	0.380	0.720	0.485	0.450	0.740	0.470	0.440
		Permutation	$Z_0(t)$	0.430	0.265	0.310	0.480	0.275	0.340	0.600	0.375	0.445	0.650	0.420	0.510	0.750	0.455	0.565	0.770	0.505	0.610
			$Z_2(t)$	0.475	0.390	0.370	0.475	0.390	0.370	0.675	0.570	0.555	0.695	0.555	0.555	0.830	0.675	0.710	0.840	0.675	0.715
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.565	0.370	0.475	0.590	0.445	0.515	0.795	0.530	0.615	0.820	0.560	0.655	0.875	0.650	0.755	0.900	0.690	0.780
			$Z_2(t)$	0.480	0.355	0.335	0.485	0.355	0.325	0.680	0.430	0.415	0.670	0.435	0.415	0.715	0.465	0.455	0.730	0.460	0.470
		Permutation	$Z_0(t)$	0.585	0.430	0.510	0.620	0.465	0.560	0.840	0.605	0.710	0.865	0.620	0.765	0.915	0.745	0.840	0.940	0.785	0.860
			$Z_2(t)$	0.530	0.430	0.380	0.540	0.410	0.395	0.755	0.560	0.560	0.755	0.555	0.560	0.835	0.685	0.700	0.835	0.680	0.675
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.605	0.340	0.450	0.630	0.365	0.475	0.770	0.465	0.580	0.780	0.505	0.600	0.885	0.595	0.690	0.895	0.615	0.695
			$Z_2(t)$	0.695	0.515	0.535	0.705	0.510	0.530	0.860	0.695	0.690	0.865	0.695	0.695	0.940	0.735	0.760	0.930	0.720	0.760
		Permutation	$Z_0(t)$	0.640	0.375	0.490	0.645	0.420	0.505	0.780	0.515	0.630	0.795	0.540	0.680	0.925	0.685	0.750	0.930	0.720	0.780
			$Z_2(t)$	0.760	0.570	0.600	0.765	0.565	0.610	0.895	0.785	0.785	0.900	0.780	0.790	0.965	0.865	0.850	0.965	0.855	0.850

表 14: Empirical power of 0.05 level bootstrap and permutation tests for Model (2)(b) with $f_1(t) - f_2(t) = 0.1t$

				$n = 10$						$n = 20$						$n = 30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.470	0.265	0.320	0.545	0.375	0.400	0.610	0.370	0.460	0.690	0.450	0.510	0.705	0.395	0.455	0.780	0.480	0.580
			$Z_2(t)$	0.470	0.300	0.305	0.500	0.290	0.305	0.590	0.400	0.410	0.610	0.405	0.410	0.735	0.410	0.435	0.745	0.390	0.425
		Permutation	$Z_0(t)$	0.495	0.305	0.355	0.605	0.405	0.445	0.710	0.465	0.515	0.795	0.540	0.600	0.800	0.525	0.625	0.855	0.615	0.715
			$Z_2(t)$	0.560	0.380	0.440	0.565	0.365	0.430	0.735	0.575	0.635	0.735	0.550	0.630	0.900	0.735	0.765	0.905	0.730	0.740
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.610	0.355	0.480	0.680	0.440	0.530	0.815	0.560	0.665	0.845	0.625	0.720	0.910	0.565	0.665	0.930	0.630	0.725
			$Z_2(t)$	0.650	0.470	0.465	0.670	0.455	0.470	0.885	0.640	0.705	0.880	0.640	0.690	0.920	0.675	0.705	0.920	0.665	0.695
		Permutation	$Z_0(t)$	0.635	0.415	0.500	0.685	0.470	0.560	0.845	0.620	0.720	0.880	0.665	0.770	0.935	0.650	0.770	0.950	0.715	0.855
			$Z_2(t)$	0.695	0.545	0.555	0.715	0.550	0.550	0.925	0.785	0.835	0.920	0.795	0.835	0.980	0.835	0.895	0.980	0.840	0.885
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.695	0.395	0.500	0.705	0.420	0.545	0.890	0.595	0.745	0.905	0.640	0.765	0.960	0.740	0.835	0.975	0.770	0.850
			$Z_2(t)$	0.705	0.525	0.560	0.715	0.525	0.565	0.910	0.715	0.780	0.920	0.720	0.785	0.975	0.810	0.840	0.985	0.800	0.845
		Permutation	$Z_0(t)$	0.710	0.410	0.525	0.720	0.440	0.570	0.925	0.630	0.770	0.930	0.685	0.805	0.985	0.790	0.880	0.990	0.810	0.905
			$Z_2(t)$	0.760	0.570	0.625	0.745	0.585	0.630	0.950	0.835	0.870	0.950	0.830	0.870	1.000	0.905	0.920	1.000	0.900	0.910
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.835	0.605	0.715	0.865	0.645	0.755	0.965	0.780	0.875	0.975	0.825	0.885	0.985	0.905	0.960	0.995	0.910	0.970
			$Z_2(t)$	0.895	0.785	0.810	0.900	0.800	0.795	0.975	0.910	0.925	0.975	0.920	0.920	0.995	0.955	0.970	0.995	0.960	0.970
		Permutation	$Z_0(t)$	0.860	0.610	0.745	0.875	0.645	0.770	0.970	0.810	0.915	0.975	0.860	0.925	0.995	0.930	0.975	0.995	0.940	0.975
			$Z_2(t)$	0.900	0.815	0.825	0.905	0.820	0.825	0.985	0.935	0.955	0.980	0.935	0.950	0.995	0.990	0.995	0.995	0.985	0.990
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.890	0.680	0.765	0.905	0.715	0.800	0.990	0.885	0.965	0.995	0.915	0.970	1.000	0.950	0.975	1.000	0.970	0.980
			$Z_2(t)$	0.930	0.850	0.875	0.930	0.840	0.865	1.000	0.965	0.980	1.000	0.965	0.980	1.000	1.000	0.995	1.000	1.000	0.990
		Permutation	$Z_0(t)$	0.925	0.690	0.785	0.930	0.720	0.815	0.995	0.915	0.975	1.000	0.930	0.980	1.000	0.970	0.990	1.000	0.980	1.000
			$Z_2(t)$	0.960	0.870	0.895	0.960	0.880	0.900	1.000	0.975	0.995	1.000	0.980	0.990	1.000	1.000	0.995	1.000	1.000	0.995
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.980	0.815	0.930	0.980	0.830	0.935	0.990	0.950	0.975	0.990	0.960	0.980	1.000	0.995	1.000	1.000	0.995	1.000
			$Z_2(t)$	0.995	0.965	0.970	0.995	0.970	0.965	1.000	0.990	0.995	1.000	0.990	0.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		Permutation	$Z_0(t)$	0.985	0.820	0.930	0.990	0.840	0.940	0.990	0.960	0.975	0.990	0.965	0.980	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
			$Z_2(t)$	1.000	0.965	0.970	1.000	0.965	0.975	1.000	0.990	0.990	1.000	0.990	0.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表 15: Empirical power of 0.05 level bootstrap and permutation tests for Model (2)(c) with $f_1(t) - f_2(t) = 0.1t$

				$n=10$						$n=20$						$n=30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.170	0.115	0.115	0.250	0.155	0.165	0.220	0.080	0.110	0.270	0.145	0.175	0.185	0.090	0.105	0.255	0.145	0.155
			$Z_2(t)$	0.180	0.110	0.090	0.180	0.100	0.085	0.180	0.120	0.085	0.185	0.100	0.070	0.160	0.085	0.080	0.170	0.090	0.070
		Permutation	$Z_0(t)$	0.225	0.145	0.150	0.280	0.190	0.205	0.285	0.150	0.225	0.370	0.240	0.295	0.340	0.250	0.270	0.425	0.340	0.305
			$Z_2(t)$	0.245	0.210	0.205	0.260	0.220	0.200	0.345	0.275	0.255	0.355	0.255	0.255	0.465	0.355	0.290	0.465	0.360	0.290
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.110	0.040	0.040	0.145	0.055	0.050	0.140	0.045	0.045	0.170	0.045	0.070	0.090	0.025	0.030	0.155	0.045	0.035
			$Z_2(t)$	0.290	0.190	0.160	0.305	0.195	0.170	0.390	0.175	0.180	0.380	0.160	0.185	0.380	0.190	0.180	0.385	0.180	0.185
		Permutation	$Z_0(t)$	0.135	0.050	0.060	0.185	0.070	0.085	0.180	0.075	0.090	0.195	0.095	0.110	0.175	0.050	0.055	0.210	0.080	0.075
			$Z_2(t)$	0.360	0.240	0.250	0.375	0.270	0.250	0.550	0.330	0.355	0.550	0.325	0.355	0.580	0.360	0.395	0.580	0.350	0.410
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.100	0.010	0.025	0.105	0.025	0.030	0.085	0.005	0.015	0.095	0.010	0.020	0.080	0.005	0.015	0.095	0.005	0.015
			$Z_2(t)$	0.380	0.275	0.270	0.400	0.265	0.270	0.530	0.275	0.290	0.545	0.290	0.300	0.615	0.310	0.355	0.615	0.320	0.350
		Permutation	$Z_0(t)$	0.110	0.020	0.030	0.130	0.025	0.035	0.100	0.015	0.025	0.100	0.015	0.030	0.115	0.020	0.015	0.150	0.025	0.030
			$Z_2(t)$	0.470	0.310	0.340	0.475	0.320	0.350	0.665	0.375	0.430	0.670	0.380	0.440	0.790	0.530	0.540	0.795	0.545	0.555
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.445	0.235	0.330	0.485	0.285	0.350	0.560	0.300	0.335	0.585	0.345	0.405	0.705	0.380	0.420	0.745	0.430	0.485
			$Z_2(t)$	0.475	0.370	0.365	0.480	0.365	0.355	0.600	0.425	0.380	0.600	0.430	0.375	0.760	0.505	0.475	0.745	0.505	0.480
		Permutation	$Z_0(t)$	0.470	0.255	0.335	0.510	0.310	0.390	0.625	0.390	0.455	0.665	0.435	0.520	0.785	0.515	0.595	0.820	0.550	0.640
			$Z_2(t)$	0.545	0.425	0.400	0.545	0.430	0.415	0.725	0.575	0.535	0.720	0.575	0.525	0.870	0.700	0.685	0.860	0.700	0.675
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.315	0.130	0.150	0.385	0.155	0.200	0.550	0.195	0.275	0.570	0.230	0.315	0.635	0.205	0.265	0.680	0.240	0.300
			$Z_2(t)$	0.595	0.430	0.435	0.585	0.445	0.425	0.805	0.580	0.570	0.805	0.570	0.565	0.870	0.655	0.665	0.865	0.660	0.660
		Permutation	$Z_0(t)$	0.365	0.165	0.205	0.405	0.170	0.240	0.605	0.250	0.365	0.645	0.290	0.395	0.720	0.285	0.375	0.755	0.310	0.435
			$Z_2(t)$	0.645	0.475	0.485	0.655	0.465	0.480	0.865	0.685	0.715	0.845	0.690	0.690	0.915	0.800	0.815	0.915	0.805	0.810
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.610	0.335	0.375	0.615	0.355	0.405	0.805	0.475	0.590	0.820	0.510	0.615	0.905	0.590	0.710	0.915	0.620	0.730
			$Z_2(t)$	0.705	0.455	0.485	0.705	0.460	0.490	0.865	0.725	0.690	0.865	0.710	0.680	0.950	0.795	0.800	0.955	0.790	0.805
		Permutation	$Z_0(t)$	0.615	0.335	0.415	0.640	0.350	0.455	0.825	0.550	0.675	0.845	0.575	0.695	0.930	0.690	0.785	0.950	0.710	0.800
			$Z_2(t)$	0.725	0.530	0.575	0.735	0.530	0.570	0.900	0.790	0.790	0.900	0.785	0.790	0.960	0.875	0.885	0.960	0.880	0.885

表 16: Empirical power of 0.05 level bootstrap and permutation tests for Model (2)(d) with $f_1(t) - f_2(t) = 0.1t$

				$n=10$						$n=20$						$n=30$					
				Non-centered			Centered			Non-centered			Centered			Non-centered			Centered		
m_1	m_2			T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
10	10	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.130	0.070	0.105	0.180	0.125	0.120	0.105	0.060	0.075	0.135	0.090	0.095	0.105	0.060	0.075	0.195	0.130	0.115
			$Z_2(t)$	0.090	0.055	0.060	0.100	0.055	0.065	0.085	0.050	0.045	0.095	0.050	0.045	0.080	0.055	0.045	0.090	0.045	0.050
		Permutation	$Z_0(t)$	0.145	0.095	0.110	0.200	0.140	0.150	0.165	0.105	0.115	0.245	0.150	0.190	0.215	0.175	0.155	0.280	0.240	0.225
			$Z_2(t)$	0.160	0.135	0.145	0.160	0.145	0.130	0.185	0.155	0.120	0.190	0.150	0.110	0.250	0.190	0.150	0.250	0.180	0.155
	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.170	0.105	0.105	0.200	0.145	0.130	0.205	0.110	0.115	0.250	0.150	0.155	0.205	0.120	0.135	0.225	0.165	0.165
			$Z_2(t)$	0.135	0.090	0.080	0.145	0.090	0.085	0.155	0.045	0.055	0.155	0.045	0.055	0.175	0.115	0.100	0.175	0.115	0.090
		Permutation	$Z_0(t)$	0.165	0.120	0.125	0.200	0.150	0.160	0.245	0.155	0.160	0.305	0.190	0.190	0.260	0.180	0.185	0.300	0.205	0.205
			$Z_2(t)$	0.170	0.135	0.105	0.200	0.135	0.110	0.245	0.140	0.160	0.240	0.140	0.155	0.275	0.225	0.210	0.285	0.200	0.205
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.180	0.115	0.125	0.180	0.145	0.135	0.180	0.130	0.130	0.230	0.145	0.145	0.240	0.110	0.135	0.290	0.165	0.190
			$Z_2(t)$	0.185	0.120	0.115	0.175	0.120	0.110	0.175	0.110	0.095	0.165	0.100	0.090	0.215	0.075	0.110	0.200	0.080	0.115
		Permutation	$Z_0(t)$	0.175	0.125	0.130	0.190	0.160	0.145	0.220	0.150	0.160	0.245	0.165	0.190	0.310	0.175	0.230	0.350	0.195	0.250
			$Z_2(t)$	0.210	0.155	0.140	0.225	0.155	0.140	0.255	0.175	0.175	0.270	0.170	0.180	0.325	0.185	0.255	0.350	0.195	0.245
20	20	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.265	0.185	0.195	0.325	0.205	0.235	0.370	0.210	0.230	0.400	0.270	0.275	0.450	0.195	0.265	0.500	0.235	0.335
			$Z_2(t)$	0.305	0.225	0.220	0.300	0.225	0.235	0.370	0.200	0.185	0.390	0.180	0.185	0.440	0.230	0.250	0.475	0.230	0.255
		Permutation	$Z_0(t)$	0.300	0.195	0.215	0.345	0.215	0.250	0.420	0.255	0.290	0.450	0.295	0.330	0.515	0.260	0.360	0.540	0.300	0.405
			$Z_2(t)$	0.350	0.275	0.255	0.350	0.275	0.250	0.470	0.310	0.315	0.455	0.300	0.310	0.610	0.385	0.380	0.605	0.380	0.370
	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.290	0.150	0.160	0.320	0.155	0.185	0.415	0.220	0.250	0.455	0.250	0.280	0.475	0.215	0.270	0.515	0.265	0.335
			$Z_2(t)$	0.320	0.215	0.200	0.320	0.230	0.205	0.450	0.255	0.245	0.475	0.255	0.235	0.475	0.255	0.305	0.480	0.260	0.295
		Permutation	$Z_0(t)$	0.305	0.170	0.205	0.330	0.185	0.215	0.465	0.265	0.295	0.515	0.300	0.340	0.555	0.280	0.380	0.590	0.335	0.410
			$Z_2(t)$	0.385	0.255	0.235	0.385	0.250	0.245	0.530	0.330	0.345	0.525	0.315	0.330	0.595	0.390	0.420	0.620	0.400	0.410
30	30	Bootstrap	$Z_0(t)$	0.360	0.190	0.250	0.395	0.235	0.265	0.535	0.290	0.360	0.565	0.320	0.365	0.665	0.350	0.435	0.695	0.400	0.485
			$Z_2(t)$	0.395	0.265	0.270	0.405	0.260	0.275	0.635	0.445	0.410	0.650	0.440	0.395	0.695	0.490	0.435	0.695	0.490	0.445
		Permutation	$Z_0(t)$	0.390	0.215	0.275	0.415	0.250	0.295	0.550	0.365	0.360	0.575	0.370	0.385	0.710	0.445	0.525	0.735	0.470	0.545
			$Z_2(t)$	0.435	0.285	0.325	0.445	0.300	0.325	0.705	0.500	0.495	0.710	0.510	0.495	0.770	0.580	0.555	0.780	0.565	0.560

5 風速データの解析

本節では，人工衛星と地上のレーダーによって計測された風速データの解析を行う．このデータ解析の目的は，高度 80〜90 (km) を 1 (km) 刻みに 13 日間計測した風速データに基づいて，人工衛星とレーダーという 2 種類の計測方法間に差があるか否かを検討することにある (詳細は，Sakurai (2001) を参照).

ここで扱う風速データは，$\{(Y_i(t), X_i(t))\}_{i=1}^{13}$ $(t = 1, \ldots, 11)$ という形で与えられる．ただし，$Y_i(t)$, $X_i(t)$ は，それぞれ人工衛星とレーダーの i 日目の t 番目の高度の風速データに対応する確率変数を表し，添字 t は，$t = 1, 2, \ldots, 11$ がそれぞれ高度 80 (km), 81 (km), ..., 90 (km) に対応している．

表 17 に Algorithm 3.1, 3.2, 3.3 を適用して計算した達成有意水準の結果をまとめる．ただし，3.2, 3.3 節で提案した検定方法によるものだけでなく，本稿で取り上げた T_{1n}, T_{2n}, T_{3n} と $Z_0(t)$, $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ のすべての組み合わせに対する計算結果をまとめている．ここで，リサンプリング回数は，$B = 3000$ としている．

表 17: 達成有意水準の比較

	Bootstrap test			Permutation test		
	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}	T_{1n}	T_{2n}	T_{3n}
	Algorithm 3.1					
$Z_0(t)$	0.001	0.001	0.001			
$Z_1(t)$	0.007	0.011	0.007			
	Algorithm 3.2			Algorithm 3.3		
$Z_0(t)$	0.045	0.072	0.054	0.052	0.082	0.067
$Z_2(t)$	0.061	0.095	0.077	0.074	0.102	0.087

このデータの場合，2 群のデータに対応関係があるので，Algorithm 3.1 を適用した結果から判断するのが妥当であると考えられる．ここで有意水準を $\alpha = 0.01$ とすると，$\widehat{\mathrm{ASL}}_{boot} \leq 0.01$ が成り立つから，(5) における帰無仮説は棄却される．したがって，人工衛星とレーダーという 2 種類の計測方法間には，差があると考えられる．

本節の解析では，2 種類の計測方法間に差があるか否かという問題に的を絞り議論した．しかし，このデータ解析の最終目的は，真の風速の推定にある．したがって，今後は各計測方法の真の風速に対するバイアスの推定方法，および真の風速の推定方法の研究も行う予定である．

参考文献

[1] Davison, A. C. and Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap Methods and their Application*, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Gibaldi, M. and Perrier, D. (1982). *Pharmacokinetics, 2nd ed., Revised and Expanded*, Marcel Dekker, New York.

[3] Hall, P. and Wilson, S. R. (1991). Two guidelines for bootstrap hypothesis testing, *Biometrics*, **47**, 757–762.

[4] Ramsay, J. O. and Silverman, B. W. (1997). *The Analysis of Functional Data*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, Berlin.

[5] Sakurai, H. (2001). Bootstrap comparison for two curves and its application, 千葉大学大学院自然科学研究科博士論文.

[6] Sakurai, H. and Taguri, M. (2000). Bootstrap test of mean difference of paired longitudinal data by curve resampling, *Proceedings of the Seventh Japan-China Symposium on Statistics*, 193–196.

[7] Sakurai, H., Taguri, M. and Ishiduka, M. (1999). Two estimated snow load curves and the bootstrap significance test, *Journal of the Japanese Society of Computational Statistics*, **12**, 51–65.

[8] Shao, J. and Tu, D. (1995). *The Jackknife and Bootstrap*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York.

[9] 下川 真由子, 水田 正弘, 佐藤 義治 (2000). 関数データ解析における関数回帰分析の拡張, 応用統計学, **29**, 27–39.

[10] 汪 金芳, 田栗 正章 (1996). ブートストラップ法 — 2標本問題からの考察, 統計数理, **44**, 3–18.