数理解析研究所講究録 1224 巻 2001 年 170-181

Second order admissibility of the maximum likelihood estimator

筑波大・数学　田中 秀和　(Hidekazu Tanaka)

1　はじめに

統計的推定問題において1つの目標はリスクが小さい推定量を見つけることだが, 一様に小さくなる推定量が存在することは稀である. 例えば Berkson's bioassay problem, つまり確率変数 X_i $(i=1,\ldots,k)$ が互いに独立に, 各 X_i が $B(n,P_i(\theta))$ $(P_i(\theta)=\{1+\exp(-\theta-\beta d_i)\}^{-1};\theta\in\mathbf{R}^1$: 未知; $\beta,d_i\in\mathbf{R}^1$: 既知) に従うときの θ の推定問題である. Berkson [3] は最小 logit χ^2 推定量を完備十分統計量 $\sum_{i=1}^{k}X_i$ で Rao-Blackwell 化した推定量 (Berkson 推定量) を提案し (平均2乗誤差の意味で) 最尤推定量とどちらが良いか議論した. また Amemiya [2] は適当な場合に対しては数値計算により Berkson 推定量のほうが $o(1/n^2)$ まで漸近的に良いと結論づけた. しかし, 理論的には $o(1/n^2)$ まで漸近的に一様に平均2乗誤差を小さくすることは出来ない ([11]). Ghosh and Sinha [5] は, この問題に対して高次漸近理論の立場から2次漸近許容性の概念を導入して論じた (一般の高次漸近理論については [1], [4] を参照).

本論においては正則な場合に未知母数 θ の最尤推定量を $\hat{\theta}$ とするとき, $g(\hat{\theta})$ が $g(\theta)$ に対して, 2次漸近許容的であるための必要十分条件を導く. また, 非正則の特別な場合として, 切断分布に従うときの未知の位置母数を θ とするときについても考察する.

2　準備

確率変数 $X_1,\ldots,X_n$ が互いに独立に, ある σ -有限測度 ν に対する密度 $f(x:\theta)$, $(x\in\mathcal{X})$ をもつ分布に従っているとする. 但し, $\theta\in\Theta:=(\underline{\theta},\overline{\theta})\subset\mathbf{R}$ は未知とし, 次の条件 $(A.1)\sim(A.3)$ を仮定する.

$(A.1)$　$f(x:\theta)$ の台 $\{x\in\mathcal{X}:f(x:\theta)>0\}$ は θ に依存しない.

$(A.2)$ $f(x:\theta)$ は θ に対して 3 階連続微分可能で, $f^{(i)}(x:\theta) := \partial^i f(x:\theta)/\partial\theta^i$

$(i = 0, 1, 2, 3)$ とする.

$(A.3)$ $\mu_{ijk}(\theta) := E_\theta\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^i\left(\frac{f''}{f}\right)^j\left(\frac{f'''}{f}\right)^k\right]$ $(i, j, k = 0, 1, \ldots)$ が有限確定

であり, $0 < I = \mu_{200} < \infty$.

定義 2.1 θ の 2 つの推定量 $\hat\theta_1$, $\hat\theta_2$ が与えられたとき, 平均 2 乗誤差の下 $\hat\theta_1$ が $\hat\theta_2$ より 2 次漸近的に良いとは, 任意の $\theta \in \Theta$ について

$$E_\theta[(\hat\theta_1 - \theta)^2] \le E_\theta[(\hat\theta_2 - \theta)^2] + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

で, ある $\theta_0 \in \Theta$ について

$$E_{\theta_0}[(\hat\theta_1 - \theta_0)^2] < E_{\theta_0}[(\hat\theta_2 - \theta_0)^2] + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となることである.

定義 2.2 θ の推定量 $\hat\theta$ が 2 次漸近許容的 (second order admissible, 略して SOA) であるとは, $\hat\theta$ より 2 次漸近的に良い推定量が存在しないことである.

例 2.1 第 1 節の Berkson's bioassay problem を考える. まず, $Q_i(\theta) := 1 - P_i(\theta)$, $p_i := X_i/n$, $q_i := 1 - p_i$, $\mathcal{P} := (0,1)^k$ とおくと, logit χ^2 関数

$$\chi^2_{\mathrm{logit}}(\theta; \mathbf{p}) := \sum_{i=1}^k p_i q_i \left\{\log\frac{P_i(\theta)}{p_i} - \log\frac{Q_i(\theta)}{q_i}\right\}^2$$

を最小にする最小 logit χ^2 推定量は

$$\hat\theta_{\mathrm{logit}}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^k p_i q_i \left(\log\dfrac{p_i}{q_i} - \beta d_i\right)}{\sum_{i=1}^k p_i q_i} & (\mathbf{p} \in \mathcal{P}), \\ 0 & (\mathbf{p} \notin \mathcal{P}) \end{cases}$$

になる．このとき，θ の最尤推定量と最小 logit χ^2 推定量の平均２乗誤差は

$$E_\theta[(\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}-\theta)^2]=\frac{1}{nI}+\frac{1}{4n^2I^4}\left(11I'^2-4II''\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$E_\theta[(\hat{\theta}_{\mathrm{logit}}-\theta)^2]=\frac{1}{nI}+\frac{1}{4n^2I^4}\Bigg[2(k-6)I^2-16I^3+24I'^2+64I\sum_{i=1}^{k}P_i^2Q_i^2$$

$$+I^2\left\{\sum_{i=1}^{k}(Q_i-P_i)\right\}^2-8II'\sum_{i=1}^{k}(Q_i-P_i)\Bigg]+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になる．

一方，θ の最尤推定量，最小 logitχ^2 推定量は

$$E_\theta[\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}-\theta]=-\frac{I'}{2I^2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$E_\theta[\hat{\theta}_{\mathrm{logit}}-\theta]=\frac{I\sum_{i=1}^{k}(Q_i-P_i)-2I'}{2I^2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となって，いずれも漸近的に偏りをもつ．そこで，それぞれの偏りを修正して

$$\hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}}:=\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}+\frac{I'(\hat{\theta}_{\mathrm{ml}})}{2I^2(\hat{\theta}_{\mathrm{ml}})n},$$

$$\hat{\theta}^*_{\mathrm{logit}}:=\hat{\theta}_{\mathrm{logit}}-\frac{I(\hat{\theta}_{\mathrm{logit}})\sum_{i=1}^{k}\left\{Q_i(\hat{\theta}_{\mathrm{logit}})-P_i(\hat{\theta}_{\mathrm{logit}})\right\}-2I'(\hat{\theta}_{\mathrm{logit}})}{2I^2(\hat{\theta}_{\mathrm{logit}})n}$$

とすれば

$$E_\theta[\hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}}-\theta]=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$E_\theta[\hat{\theta}^*_{\mathrm{logit}}-\theta]=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となり

$$E_\theta[(\hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}}-\theta)^2]=\frac{1}{nI}+\frac{I'^2}{2n^2I^4}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$E_\theta[(\hat{\theta}^*_{\mathrm{logit}}-\theta)^2]=\frac{1}{nI}+\frac{(k-2)I^2-4I^3+8I\sum_{i=1}^{k}P_i^2Q_i^2+2I'^2}{2n^2I^4}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となる. そこで, 両者の $1/n^2$ の係数の差については

$$D(\hat{\theta}^*_{\mathrm{logit}}, \hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}}) := \lim_{n\to\infty} 2n^2 I^4 \left\{ E_\theta[(\hat{\theta}^*_{\mathrm{logit}} - \theta)^2] - E_\theta[(\hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}} - \theta)^2] \right\}$$

$$= (k-2)I^2 - 4I^3 + I'^2 + 8I\sum_{i=1}^{k} P_i^2 Q_i^2 \geq 0$$

になる. 何故なら, 簡単な計算から

(i) $k=1$ のとき

$$D(\hat{\theta}^*_{\mathrm{logit}}, \hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}}) = 0.$$

(ii) $k=2$ のとき

$$D(\hat{\theta}^*_{\mathrm{logit}}, \hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}}) = 4(P_1Q_1 + P_2Q_2)(P_1Q_1 - P_2Q_2)^2$$

$$+ \{P_1Q_1(Q_1 - P_1) + P_2Q_2(Q_2 - P_2)\}^2 \geq 0.$$

(iii) $k \geq 3$ のとき

$$D(\hat{\theta}^*_{\mathrm{logit}}, \hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}}) = (k-2)I^2 - 4I^3 + I'^2 + 8I\sum_{i=1}^{k} P_i^2 Q_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} P_iQ_iP_jQ_j \Bigg[(k-3) - 4I$$

$$+ \frac{1}{2}\{(Q_i - P_i) + (Q_j - P_j)\}^2 + 6(P_iQ_i + P_jQ_j) \Bigg].$$

ここで負と成り得る項は $-4I$ だけであり $0 < I \leq k/4$ である. また

$$I = \frac{k}{4} \Longleftrightarrow P_i = Q_i = \frac{1}{2}, \quad (i = 1, \ldots, k)$$

であるから

$$D(\hat{\theta}^*_{\mathrm{logit}}, \hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}}) \geq \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} P_iQ_iP_jQ_j \Bigg[-3 + \frac{1}{2}\{(Q_i - P_i) + (Q_j - P_j)\}^2$$

$$+ 6(P_iQ_i + P_jQ_j) \Bigg] = 0.$$

よって, 任意の $\theta \in \Theta$ に対して

$$(k-2)I^2 - 4I^3 + I'^2 + 8I\sum_{i=1}^{k} P_i^2 Q_i^2 \geq 0, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

が示される.

次に, 推定量のクラス

$$\mathcal{T} := \left\{ \hat{\theta} + \frac{1}{n} c(\hat{\theta}) \middle| c(\cdot) \in C^1 \right\}.$$

を考える. ここで C^1 は連続微分可能な関数の全体とする. 以下, $\hat{\theta}$ を θ の最尤推定量, $\hat{\theta}_c := \hat{\theta} + c(\hat{\theta})/n$ と表す. そこで, 任意の $d(\cdot) \in C^1$ に対して $h(\cdot) := d(\cdot) - c(\cdot)$ とおくと

$$E_\theta[(\hat{\theta}_d - \theta)^2] - E_\theta[(\hat{\theta}_c - \theta)^2] = \frac{1}{n^2}\left[h^2(\theta) + 2h(\theta)\left(c(\theta) - \frac{\mu_{110}(\theta)}{2I^2(\theta)} \right) + 2\frac{h'(\theta)}{I(\theta)} \right] + o\left(\frac{1}{n^2} \right)$$

となる. ここで $-\mu_{110}/2I^2$ は最尤推定量 $\hat{\theta}$ の bias の $1/n$ の係数である. つまり $E_\theta[\hat{\theta} - \theta] = -\mu_{110}/(2nI^2) + o(1/n)$ である. よって $\hat{\theta}_c$ が θ に対して SOA であるための必要十分条件は, 任意の $\theta \in \Theta$ について

$$h^2(\theta) + 2h(\theta)\left(c(\theta) - \frac{\mu_{110}(\theta)}{2I^2(\theta)} \right) + 2\frac{h'(\theta)}{I(\theta)} \leq 0 \tag{2.1}$$

かつ, ある $\theta_0 \in \Theta$ について

$$h^2(\theta_0) + 2h(\theta_0)\left(c(\theta_0) - \frac{\mu_{110}(\theta_0)}{2I^2(\theta_0)} \right) + 2\frac{h'(\theta_0)}{I(\theta_0)} < 0 \tag{2.2}$$

となることである. このことより Ghosh and Sinha [5] は Karlin の定理 ([6],[8]) を用いて, 次の事実を示した.

補題 2.1 ([5]). 修正最尤推定量 $\hat{\theta}_c = \hat{\theta} + c(\hat{\theta})/n$ が θ に対して $\mathcal{T}$ で SOA であるための必要十分条件は, ある $\theta_0 \in \Theta$ に対して, 次の (2.3), (2.4) が成り立つことである.

$$\overline{J} := \int_{\theta_0}^{\overline{\theta}} I(\theta) \exp\left\{ -\int_{\theta_0}^{\theta} \left(c(u) - \frac{\mu_{110}(u)}{2I^2(u)} \right) I(u)du \right\} d\theta = \infty \tag{2.3}$$

かつ

$$\underline{J} := \int_{\underline{\theta}}^{\theta_0} I(\theta) \exp\left\{ \int_{\theta}^{\theta_0} \left(c(u) - \frac{\mu_{110}(u)}{2I^2(u)} \right) I(u)du \right\} d\theta = \infty. \tag{2.4}$$

例 2.2 (続). Ghosh and Sinha [5] は, この定理を用いて θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ は SOA でないことを示し, また Berkson 推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{B}}$ は $k \geq 4$ のとき SOA であり, $k < 4$ のとき SOA でないことを示した.

3 本論

まず, 関数 $c(\cdot)$ のクラスを

$$\mathcal{C}_{\theta} := \left\{ \left(\alpha + \frac{5}{2}\right) \frac{\mu_{110}}{I^2} + (\beta - 1)\frac{\mu_{300}}{I^2} \middle| \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\}$$

に制限し, 修正最尤推定量のクラスを

$$\mathcal{T}_0 := \left\{ \hat{\theta} + \frac{c(\hat{\theta})}{n} \middle| c(\cdot) \in \mathcal{C}_{\theta} \right\}$$

とする. ここで $(\alpha, \beta) = (-3/2, 1)$ とすると漸近期待値不偏推定量, $(\alpha, \beta) = (-5/2, 7/6)$ とすると漸近中央値不偏推定量が得られる. また $I' = 2\mu_{110} - \mu_{300}$ を用いると (2.1), (2.2) の左辺は

$$\overline{J} = I(\theta_0) \int_{\theta_0}^{\overline{\theta}} \exp\left\{ - \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\alpha \frac{\mu_{110}(u)}{I(u)} + \beta \frac{\mu_{300}(u)}{I(u)} \right) du \right\} d\theta,$$

$$\underline{J} = I(\theta_0) \int_{\underline{\theta}}^{\theta_0} \exp\left\{ \int_{\theta}^{\theta_0} \left(\alpha \frac{\mu_{110}(u)}{I(u)} + \beta \frac{\mu_{300}(u)}{I(u)} \right) du \right\} d\theta$$

になる. Takagi [9] は修正最尤推定量 $\hat{\theta}_c$ が $\mathcal{T}_0$ で狭義単調連続微分可能な関数 $g(\cdot)$ に対して, 任意の変換 $\eta = g(\theta)$ に関して不変に SOA であるための (α, β) の集合を与えた.

定理 3.1 (Takagi [9]). 修正最尤推定量

$$\hat{\theta} + \frac{1}{n} \left(\frac{3\mu_{110}(\hat{\theta}) - \mu_{300}(\hat{\theta})}{2I(\hat{\theta})^2} \right)$$

は $\mathcal{T}_0$ において, 任意の母数変換に関して独立に SOA である.

本論では, 修正最尤推定量 $\hat{\theta}_c$ を変換した推定量 $g(\hat{\theta}_c)$ が $g(\theta)$ に対して SOA であるための必要十分条件を与える. まず, $h(\cdot) := d(\cdot) - c(\cdot)$ とおくと, デルタ法より

$$E_\theta\left[\left\{g(\hat{\theta}_d) - g(\theta)\right\}^2\right] - E_\theta\left[\left\{g(\hat{\theta}_c) - g(\theta)\right\}^2\right]$$

$$= \frac{g'^2(\theta)}{n^2}\left[h^2(\theta) + 2h(\theta)\left(c(\theta) - \frac{\mu_{110}(\theta)}{2I^2(\theta)} + \frac{3}{2I(\theta)}\frac{g''(\theta)}{g'(\theta)}\right) + 2\frac{h'(\theta)}{I(\theta)}\right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

を得る. このことと (2.1), (2.2), 補題 2.1 から, 次の事実が成り立つ.

定理 3.2 $g(\theta)$ に対する推定量 $g(\hat{\theta}_c)$ が SOA であるための必要十分条件は, 次の (3.1), (3.2) が成り立つことである.

$$(3.1)\ \overline{K} := \int_{\theta_0}^{\overline{\theta}} I(\theta)\,|g'(\theta)|^{-3/2}\exp\left\{-\int_{\theta_0}^{\theta}\left(c(u) - \frac{\mu_{110}(u)}{2I^2(u)}\right)I(u)du\right\}d\theta = \infty,$$

かつ

$$(3.2)\ \underline{K} := \int_{\underline{\theta}}^{\theta_0} I(\theta)\,|g'(\theta)|^{-3/2}\exp\left\{\int_{\theta}^{\theta_0}\left(c(u) - \frac{\mu_{110}(u)}{2I^2(u)}\right)I(u)du\right\}d\theta = \infty.$$

系 3.1 $c(\cdot) \in \mathcal{C}_\theta$ のとき $g(\theta)$ に対する推定量 $g(\hat{\theta}_c)$ が SOA であるための必要十分条件は, ある $\theta_0 \in \Theta$ に対して, 次の (3.3), (3.4) が成り立つことである.

$$(3.3)\ \ \overline{L} := \int_{\theta_0}^{\overline{\theta}} |g'(\theta)|^{-3/2}\exp\left\{-\int_{\theta_0}^{\theta}\left(\alpha\frac{\mu_{110}(u)}{I(u)} + \beta\frac{\mu_{300}(u)}{I(u)}\right)du\right\}d\theta = \infty,$$

かつ

$$(3.4)\ \ \underline{L} := \int_{\underline{\theta}}^{\theta_0} |g'(\theta)|^{-3/2}\exp\left\{\int_{\theta}^{\theta_0}\left(\alpha\frac{\mu_{110}(u)}{I(u)} + \beta\frac{\mu_{300}(u)}{I(u)}\right)du\right\}d\theta = \infty.$$

4 例

例 4.1 (尺度母数の推定). 密度関数が $f(x:\theta) = f(x/\theta)/\theta$, $\Theta = (0,\infty)$ の場合を考える. まず

$$I(\theta) \;=\; \frac{1}{\theta^2}\int\frac{(f(t) + tf'(t))^2}{f(t)}dt =: \frac{A}{\theta^2},$$

$$\mu_{300}(\theta) \;=\; \frac{1}{\theta^3}\int \frac{(f(t)+tf'(t))^3}{f(t)^2}dt =: \frac{B}{\theta^3},$$

$$\mu_{110}(\theta) \;=\; -\frac{1}{\theta^3}\int \frac{1}{f(t)}\{f(t)+tf'(t)\}\left\{2f(t)+4tf'(t)+t^2f''(t)\right\}dt =: -\frac{C}{\theta^3}$$

となる．このとき $g(\theta) := \theta^\delta$ とすれば $2\alpha C - 2\beta B - 3A\delta + 5A \geq 0$ のときに限り $\overline{L} = \infty$ になり，また $2\alpha C - 2\beta B - 3A\delta + 5A \leq 0$ のときに限り $\underline{L} = \infty$ になる．よって系 3.1 より $2\alpha C - 2\beta B - 3A\delta + 5A = 0$ のときに限り $g(\hat{\theta}_c)$ は $g(\theta)$ に対して SOA である．

例 4.2 (Berkson's bioassay problem). まず，

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^{k} P_i(\theta)(1-P_i(\theta)),$$

$$\mu_{110}(\theta) = \mu_{300}(\theta) = I'(\theta) = \sum_{i=1}^{k} P_i(\theta)(1-P_i(\theta))(1-2P_i(\theta))$$

となる．このとき $g(\theta) = E_\theta[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} R_i] = I(\theta)$ の推定問題を考える．θ の最尤推定量, Berkson 推定量の bias の $1/n$ の係数は, それぞれ $b_{\mathrm{ml}}(\theta) = -I'(\theta)/2I(\theta)^2$, $b_{\mathrm{B}}(\theta) = -I'(\theta)/I(\theta)^2 + \sum_{i=1}^{k}(1-2P_i(\theta))/2I(\theta)$ になる．よって, 最尤推定量 $\hat{\theta}$ に対しては

$$\overline{K} = \int_{\theta_0}^{\infty} I(\theta)|\mu_{110}(\theta)|^{-3/2}\exp\left\{\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{I'(u)}{2I(u)}du\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{|I(\theta_0)|^{1/2}}\int_{\theta_0}^{\infty}\left|\frac{I(\theta)}{\mu_{110}(\theta)}\right|^{3/2}d\theta = \infty,$$

$$\underline{K} = \int_{-\infty}^{\theta_0} I(\theta)|\mu_{110}(\theta)|^{-3/2}\exp\left\{-\int_{\theta}^{\theta_0}\frac{I'(u)}{2I(u)}du\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{|I(\theta_0)|^{1/2}}\int_{-\infty}^{\theta_0}\left|\frac{I(\theta)}{\mu_{110}(\theta)}\right|^{3/2}d\theta = \infty$$

となる．また, Berkson 推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{B}}$ に対しては

$$\overline{K} = \int_{\theta_0}^{\infty} I(\theta)\,|\mu_{110}(\theta)|^{-3/2}\exp\left\{-\int_{\theta_0}^{\theta}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(1-2P_i(u)) - \frac{I'(u)}{I(u)}\right)du\right\}d\theta$$

$$= C_1 \int_{\theta_0}^{\infty} I(\theta)^2 \left|\mu_{110}(\theta)\right|^{-3/2} e^{-k\theta/2} \prod_{i=1}^{k} \left(1 + e^{\theta+\beta d_i}\right) d\theta = \infty,$$

$$\underline{K} = \int_{-\infty}^{\theta_0} I(\theta) \left|\mu_{110}(\theta)\right|^{-3/2} \exp\left\{\int_{\theta}^{\theta_0} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(1 - 2P_i(u)) - \frac{I'(u)}{I(u)}\right) du\right\} d\theta$$

$$= C_2 \int_{-\infty}^{\theta_0} I(\theta)^2 \left|\mu_{110}(\theta)\right|^{-3/2} e^{-k\theta/2} \prod_{i=1}^{k} \left(1 + e^{\theta+\beta d_i}\right) d\theta = \infty$$

になる．ただし，C_1，C_2 は定数とする．ゆえに，定理 3.2 より最尤推定量も Berkson 推定量も SOA となる．

例 4.3 (ワイブル分布の場合の信頼度関数の推定 [12])．確率変数 $X_1, \dots, X_n$ が互いに独立に密度関数

$$f(x:\theta) = \begin{cases} \dfrac{c}{\theta}\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{c}\right\} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases} \quad (\theta > 0 : \text{未知},\ c > 0 : \text{既知})$$

に従うものとする．このとき

$$I(\theta) = \frac{c^2}{\theta^2}, \quad \mu_{300}(\theta) = -\frac{2c^3}{\theta^3}, \quad \mu_{110}(\theta) = \frac{c^2(c-1)}{\theta^3}$$

となる．いま，信頼度関数

$$g(\theta) := \begin{cases} \exp\left\{-\left(\dfrac{t}{\theta}\right)^{c}\right\} & (t > 0), \\ 1 & (t \leq 0) \end{cases}$$

を考えると

$$g'(\theta) = \begin{cases} \dfrac{c}{\theta}\left(\dfrac{t}{\theta}\right)^{c} \exp\left\{-\left(\dfrac{t}{\theta}\right)^{c}\right\} & (t > 0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

になるから

$$\overline{L} = C_3 \int_{\theta_0}^{\infty} \theta^{\frac{3c}{2}+\frac{3}{2}-\alpha c+\alpha+2\beta c} \exp\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{\theta}{t}\right)^{c}\right\} d\theta$$

$$\begin{cases} = \infty & (3c + 5 - 2\alpha c + 2\alpha + 4\beta c \geq 0), \\ < \infty & (3c + 5 - 2\alpha c + 2\alpha + 4\beta c < 0) \end{cases}$$

$$\underline{L} = C_4 \int_{0}^{\theta_0} \theta^{\frac{3c}{2}+\frac{3}{2}-\alpha c+\alpha+2\beta c} \exp\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{\theta}{t}\right)^{c}\right\} d\theta = \infty$$

になる．ただし，C_3, C_4 は定数とする．よって，系 3.1 より $3c+5-2\alpha c+2\alpha+4\beta c \geq 0$ のときに限り $g(\hat{\theta}_c)$ は $g(\theta)$ に対して SOA となる．

5　非正則の場合

位置母数 $\theta \in \mathbf{R}^1$ の推定問題を考える．$X_1, \ldots, X_n$ を (ある σ-有限測度 ν に関する) 密度関数 $f(x-\theta)$ を持つ分布からの大きさ n の無作為標本とし，この標本を $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ とする．このとき，密度関数 f に次のような条件 $(B.1) \sim (B.3)$ を仮定する．

$$(B.1) \quad \begin{cases} f(x) > 0 & (a \leq x \leq b), \\ f(x) = 0 & (x < a, x > b). \end{cases}$$

$(B.2)$　$f(x)$ は区間 (a,b) において x に関して広義単調減少である．

$(B.3)$　$f(x)$ は区間 (a,b) において x に関して 2 回連続微分可能で

$$c_0 := \lim_{x \to a+0} f(x) \quad (0 < c_0 < \infty).$$

このとき，$\hat{\theta} = X_{(1)} - a$ となり，

$$E_\theta[\hat{\theta} - \theta] = \frac{1}{c_0 n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$E_\theta[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \frac{2}{c_0 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になるから，$c(\cdot), d(\cdot) \in C^1$ に対して $h(\cdot) := d(\cdot) - c(\cdot)$ とすると，

$$E_\theta\left[\left(\hat{\theta} + \frac{1}{n}d(\hat{\theta}) - \theta\right)^2\right] - E_\theta\left[\left(\hat{\theta} + \frac{1}{n}c(\hat{\theta}) - \theta\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{n^2}h(\theta)\left(h(\theta) + 2c(\theta) + \frac{2}{c_0}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となる．よって，$\hat{\theta} + c(\hat{\theta})/n$ が θ に対して SOA となるための必要十分条件は，任意の $\theta \in \mathbf{R}^1$ について

$$h(\theta)\left(h(\theta) + 2c(\theta) + \frac{2}{c_0}\right) \leq 0$$

でかつ, ある $\theta_0 \in \mathbf{R}^1$ について

$$h(\theta_0)\left(h(\theta_0) + 2c(\theta_0) + \frac{2}{c_0}\right) < 0$$

となる.

参考文献

[1] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). *Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency.*, Lecture Notes in Statistics **7**, Springer, New York.

[2] Amemiya, T. (1980). The n^{-2}-order mean squared errors of maximum likelihood and the minimum logit chi-square estimator. *Ann. Statist.*, **8**, 488–505.

[3] Berkson, J. (1980). Minimum chi-square, not maximum likelihood! *Ann. Statist.*, **8**, 457–469.

[4] Ghosh, J. K. (1994). *Higher Order Asymptotics.* NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics Volume 4.

[5] Ghosh, J. K. and Sinha, B. K. (1981). A necessary and sufficient condition for second order admissiblity with applications to Berkson's bioassay problem. *Ann. Statist.*, **9**, 1334–1338.

[6] Karlin, S. (1958). Admissibility for estimation with quadratic loss. *Ann. Math. Statist.*, **29**, 406–438.

[7] Lehmann, E. L. (1998). *Elements of Large-Sample Theory.* Springer-verlag, New York.

[8] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation.* Springer-verlag, New York.

[9] Takagi, Y. (1999). Parametrization invariance with respect to second order admissibility under mean squared error. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **51**, 99–110.

[10] Takagi, Y. (1999). Parametrization invariance with respect to second order admissibility under general loss function. *The Indian Journal of Statistics*, **61**, Series A, Pt.1, 113–119.

[11] Tanaka, H. (1997). Asymptotic comparison of minimum discrepancy estimators in Berkson's bioassay model. *J. Japan Statist. Soc.*, Vol.**27**, No.2, 149–162.

[12] Tanaka, H. (1998). On reliability estimation in the Weibull case. *J. Japan Statist. Soc.*, Vol.**28**, No.2, 193–203.