数理解析研究所講究録 1226 巻 2001 年 229-238

超流動ヘリウム中の vortex tangle の減衰

阪市大院理　荒木恒彦（Tsunehiko Araki），　坪田誠（Makoto Tsubota）
Department of Physics,
Osaka City Univ.

序論

液体ヘリウムは 2.2K 以下で超流動状態になることが知られている。超流動状態には粘性のない流れが存在し、超流動状態の多くの現象は、2 流体モデルと呼ばれる現象論により非常によく説明される。2 流体モデルにおいては、流体は粘性をもつ常流体と粘性をもたない超流体とから構成され、それぞれが密度 $\rho_{\rm n}, \rho_{\rm s}$ を伴い、速度 $\boldsymbol{v}_{\rm n}, \boldsymbol{v}_{\rm s}$ で運動する。超流動速度 $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ がある臨界速度より小さいとき、超流体と常流体の間にエネルギーや運動量のやりとりはなく、両者は独立である。そのため、超流体の流れは半永久的に減衰しない。しかしながら、$\boldsymbol{v}_{\rm s}$ がある臨界速度を超えると渦が生成され、超流体と常流体の間に、渦を介した相互作用（相互摩擦力）が現れる [1]。その結果、超流体の流れはこの相互摩擦力により減衰する。このことから、超流体の渦の減衰は、常流体の密度 $\rho_{\rm n}$ と密接に関係することがわかる。

次に $\rho_{\rm n}$ の温度依存性を考える。実験によると、温度が減少するにつれ $\rho_{\rm n}$ は減少し、mK 温度領域においては、$\rho_{\rm s}$ に対して $\rho_{\rm n}$ が無視できるほど少ない。そのため、この温度領域では、渦の減衰のメカニズムである相互摩擦力は、ほとんど存在しない。しかしながら、最近の Lancaster 大学の実験グループによると、渦は mK 温度領域においても減衰し、しかも 70mK 以下で減衰率が温度に依らないことがわかった [2]。このことは、mK 温度領域には、相互摩擦力以外の温度に依存しない、固有な減衰のメカニズムが存在することを意味する。このような温度領域での渦の減衰は、最近、多くの議論を呼んでいる [3][4][5]。本研究では、渦糸近似を用いた数値計算により、相互摩擦力を無視したときの vortex tangle の減衰過程を議論する [6]。

超流動の渦と数値計算法

まず、超流動の渦の特徴を述べる。超流動の渦は、粘性による拡散がないため、非常に安定に存在する。そして、渦を囲む閉曲線に沿った超流動速度 $\boldsymbol{v}_{\rm s}$ の線積分（循環）が量子化されているため、量子渦と呼ばれる。

$$\oint \boldsymbol{v}_{\rm s} \cdot d\boldsymbol{l} = \kappa n, \quad \kappa = h/m \tag{1}$$

ここで n は整数で、h は Planck 定数、m はヘリウム原子の質量である。渦のエネルギーは $(n\kappa)^2$ に比例するため、$n=2$ の渦が 1 本存在するより、$n=1$ の渦が 2 本存在した方がエネルギーが低く、より安定になる。実際に、Vinen による循環の測定によっても、それは示されている [7]。従って、以下最も安定な $n=1$ の渦のみを考える。そして、超流動の渦は、渦の中心近くで急激に密度が減少し、中心で 0 になっている。この密度が減少している部分を渦芯と呼ぶと、渦芯は $\mathring{A}$ スケールで非常に細い。そのため、渦の芯の構造を無視する渦糸近似が、超流動の渦に対しては非常に有効である。

以下で、渦糸近似を用いた数値計算法について述べる。この方法は、Schwarz により超流動の渦の数値計算に導入された [8]。完全流体中の渦は、その位置の局所的な流れとともに運動するため、渦糸近似を用いると、渦の運動方程式は Biot-Savart の法則により与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{s}}(\xi, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int d\xi' \frac{\boldsymbol{s}'(\xi', t) \times (\boldsymbol{s}(\xi, t) - \boldsymbol{s}(\xi', t))}{|\boldsymbol{s}(\xi, t) - \boldsymbol{s}(\xi', t)|^3} \tag{2}$$

ここで、$\boldsymbol{s}(\xi, t)$ は時刻 t における渦糸の位置ベクトル、ξ は渦上に沿って測られる長さ、$\boldsymbol{s}' \equiv \partial \boldsymbol{s}/\partial \xi$ は接線方向の単位ベクトルであり、積分は全ての渦に関して行う。次に、$\xi' \to \xi$ での $\dot{\boldsymbol{s}}(\xi, t)$ の発散を回避するために ξ' の積分を $-R < \xi' - \xi < R$ の範囲の積分（局所的寄与 $\dot{\boldsymbol{s}}^{\rm loc}(\xi, t)$）とそれ以外の部分（非局所的寄与 $\dot{\boldsymbol{s}}^{\rm nol}(\xi, t)$）に分け、渦芯のサイズ a_0 でカットオフを入れる。ここで R は渦糸の曲率半径である。以上の操作を行うと、渦の運動方程式は、次のようになる。

$$\dot{\boldsymbol{s}}(\xi, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \ln\left(\frac{R}{a_0}\right) + \frac{\kappa}{4\pi} \int' d\xi' \frac{\boldsymbol{s}'(\xi', t) \times (\boldsymbol{s}(\xi, t) - \boldsymbol{s}(\xi', t))}{|\boldsymbol{s}(\xi, t) - \boldsymbol{s}(\xi', t)|^3} \tag{3}$$

右辺第 1 項が局所的寄与で、右辺第 2 項が非局所的寄与である。ここで ξ' の積分は、$-R < \xi' - \xi < R$ 以外の範囲で行う。Schwarz によると、渦同士が非常に近づいた場合を除いて、$\dot{\boldsymbol{s}}^{\rm loc}(\xi, t)$ と $\dot{\boldsymbol{s}}^{\rm nol}(\xi, t)$ の比は 9 ： 1 程度であることが分かっている [8]。本研究におい

ては、計算時間の短縮化のため、$\dot{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{nol}}(\xi,t)$ を $\dot{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{loc}}(\xi,t)$ に比べ十分小さいとして無視する、局所誘導近似を用いる [9]。

次に、再結合の導入について述べる。粘性流体では、渦同士が局所的に反平行に近づき、粘性により再結合することが知られている。そのことから、Schwarz が渦糸近似を用いた数値計算に再結合を導入した [8]。その後の研究により、超流体の渦も再結合することが、非線形シュレディンガー方程式の解析により示された [10]。本研究においては、渦同士が渦を構成する点の間隔（空間刻み）よりも近づいた場合、再結合をしたと仮定し、つなぎ換えを起こさせる。境界と渦が近づいた場合も同様である。

計算結果

(3) 式の、非局所的な項を無視した局所誘導近似を用いて、計算を行った。以下の数値計算は、全て 1 辺が 1cm の立方体中で、空間刻み $\Delta\xi$ が 1.83×10^{-2}cm、時間刻み Δt が 1.0×10^{-3}sec という条件で行った。境界条件は、z 方向に周期的境界条件を課し、x, y 方向には固体壁を想定した条件 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ を用いた。ここで $\boldsymbol{n}$ は壁に垂直な方向の単位ベクトルである。図 1(a) の渦は、常流体成分が十分に存在している $T = 1.6$K のときに、流れ場により成長させたものである [8]。そして図 1(b) は、図 1(a) を初期条件として、相互摩擦力と流れ場を同時に無視し、10 秒間経過したものである。明らかに、図 1(b) は、渦上に細かい kink 構造が現れている。これは相互摩擦力による渦の平滑化がないためである。この kink 構造が現れると、その渦自身との再結合が多発し、渦は、より小さな渦に分裂する。図 2(a) は、$\rho_{\mathrm{n}} = 0$ での渦で、図 2(b) がその 90 秒後の渦の様子である。明らかに渦は、減衰している。図 3 は、そのときの単位体積当たりの渦の長さ L（渦糸長密度）の時間変化である。時間がたつにつれ、渦が減衰している。しかしながら相互摩擦力を無視しているため、散逸の効果は、数値計算に入っていない。では、なぜ数値計算で渦が減衰しているのか。それは、再結合による渦の分裂の結果生じた、数値計算の空間分解能より小さな渦を、カットオフにより消しているためである。この、数値計算での人工的な散逸は、以下のようにして、正当化される。

渦は、小さくなればなるほど、自己誘導速度が速くなる。従って、再結合により、小さな渦に分裂するプロセスが存在すると、その分裂速度は、小さいスケールで、非常に速

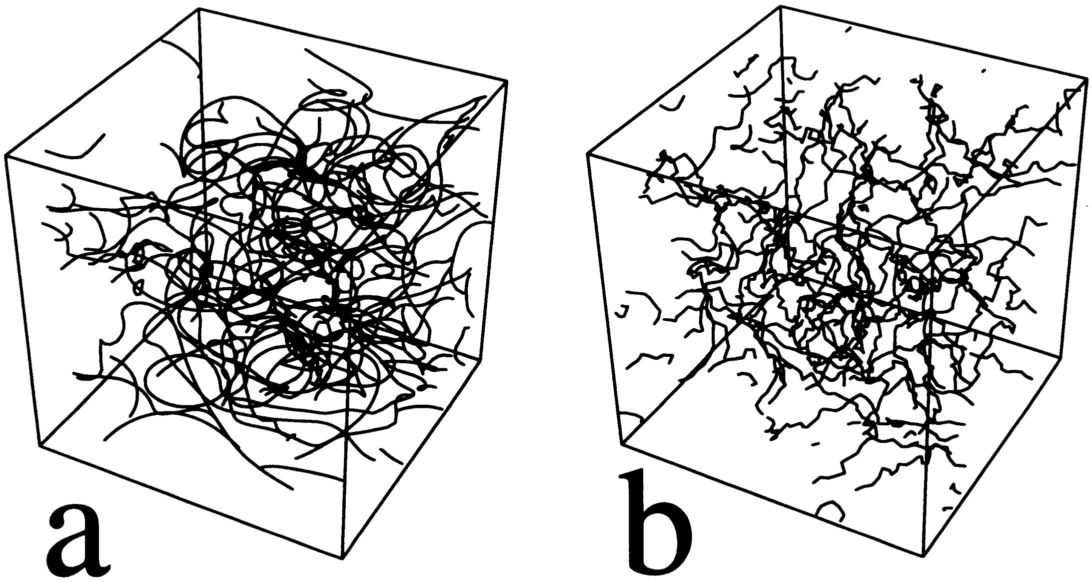

図 1: (a)$\rho_s \simeq \rho_n$ のときの渦,(b)$\rho_n = 0$ のときの渦

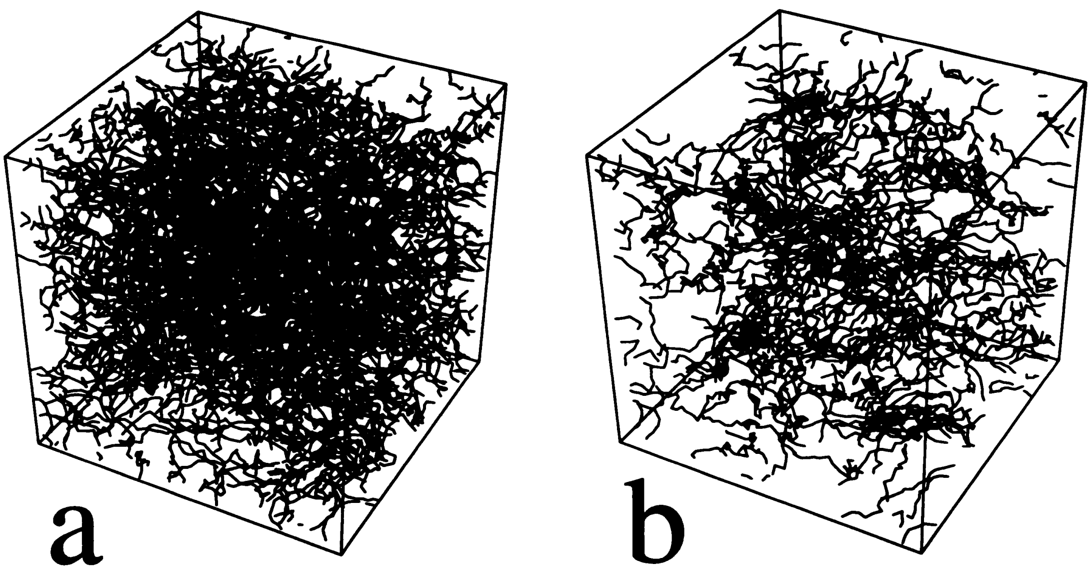

図 2: (a)$t = 0$s,(b)$t = 90$s のときの渦

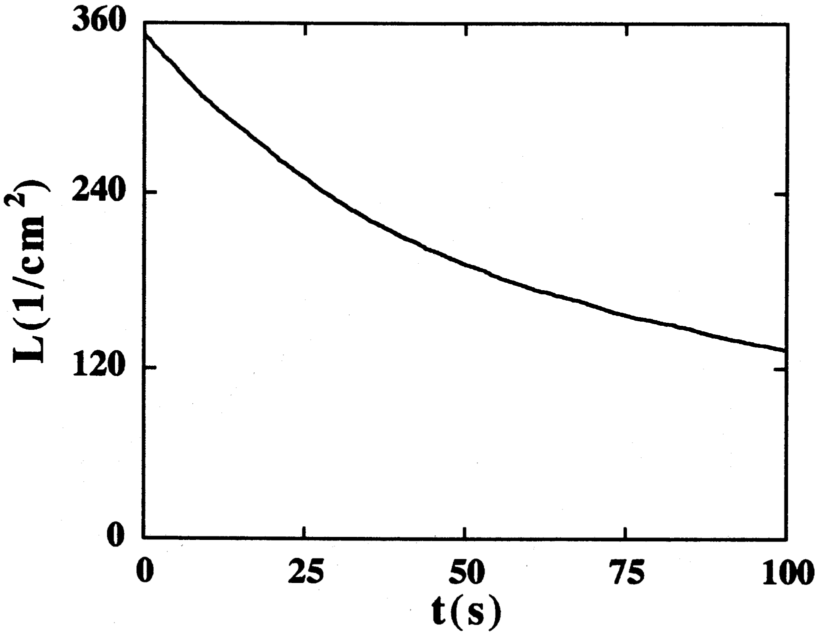

図 3: 渦糸長密度の時間変化

くなる。そして、渦芯のスケールでは、渦は不安定になり消滅すると考えられる。すなわち、数値計算のカットオフで消した渦が、大きな渦に比べて十分短い時間で渦芯のスケールの渦に分裂し、その渦が消滅するとすればカットオフの操作は正当化される。図4は、実線が $\Delta\xi = 1.83 \times 10^{-2}$cm のときの渦糸長密度の時間変化で、点線が空間刻みを1/4細かくしたときの結果である。空間刻みを1/4細かくすると、記述できる最小の渦のスケールも1/4になるが、結果はこれに依存しない。勿論、空間刻みを小さくすると、より細かい構造が現れるため、渦の個々のダイナミクスは変化する。しかしながら、統計的な量である渦糸長密度は、これに依存しない。

次に、再結合の分類を行う。再結合は、その前後の渦数の変化で3種類に分類できる。一つは、境界からのびた2本の渦同士が再結合した場合のように、再結合前後で、渦の数が変化しないものである。第二に、1本の渦輪がその渦自身と再結合した場合のように、1本の渦が2本に分裂する、分裂型の再結合である。先程述べた、渦が分裂していく過程に寄与するのは、このタイプのものである。最後が、2本の渦輪が再結合した場合のよう

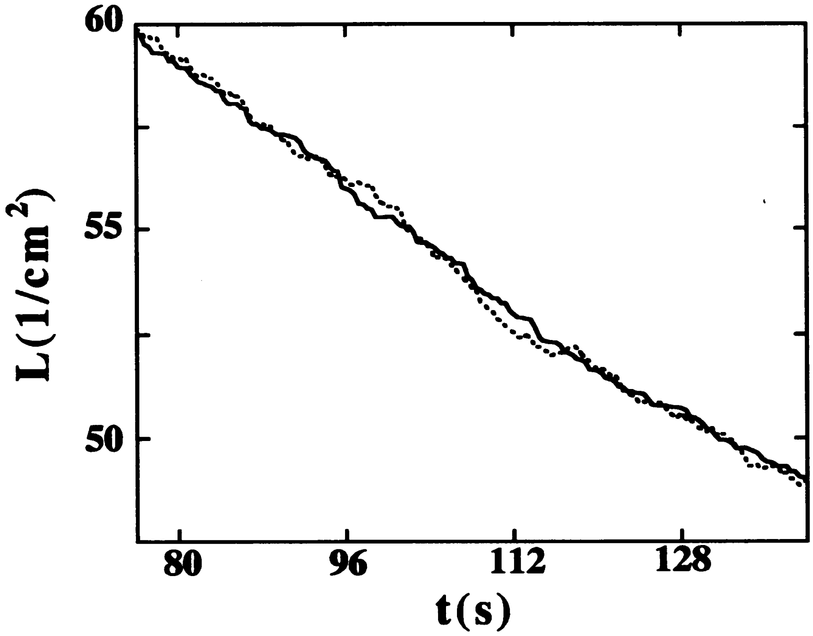

図 4: 渦糸長密度の空間刻み依存性

に、2本の渦が1本の渦に結合する、融合型の再結合である。これは、渦が分裂していく過程を妨げる。図5はそれぞれの時間における、これらの再結合数をプロットしたものである。これによると全ての時間において、分裂型の再結合が融合型のものよりも多いことが分かる。従って、相互摩擦力を無視したとき、渦は分裂型の再結合により、より小さな渦に分裂することがわかった。また、ここでは局所誘導近似を用いた結果のみを議論したが、4つの渦輪について、非局所的な効果も含んだ計算を行った。その結果、同様に、渦が分裂していく過程が存在していることを示した [6]。

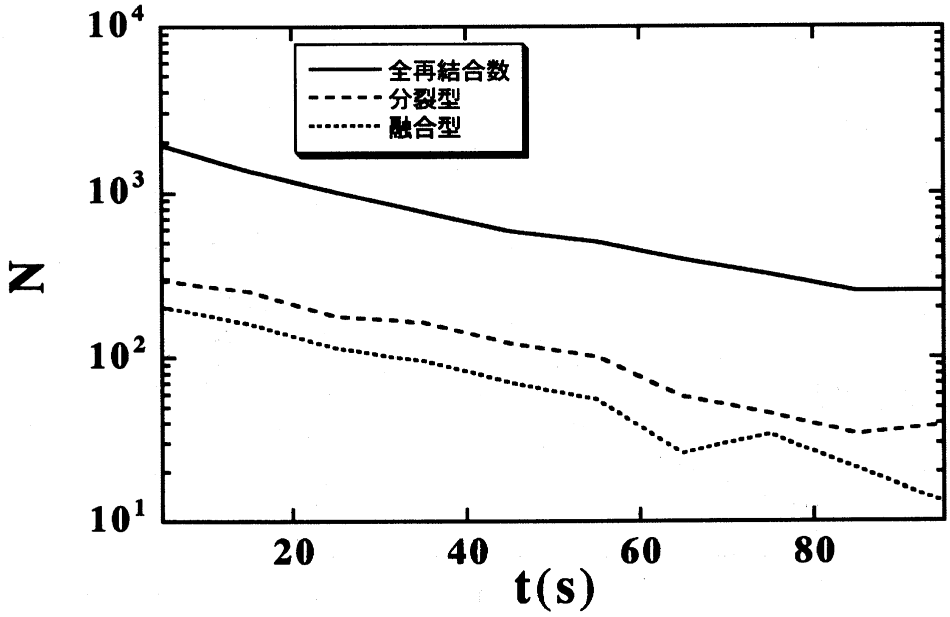

図 5: 再結合の分類

Vinen 方程式との比較

この節では、渦糸長密度の時間変化を記述する、Vinen 方程式と我々の結果を比較する。次元解析から得られる Vinen 方程式は、次のようになる [11]。

$$\frac{dL}{dt} = -\chi_2 \frac{\kappa}{2\pi} L^2 \tag{4}$$

この Vinen 方程式は、超流動乱流の実験と非常によく一致することが知られている。その厳密解は、次のようになる。

$$\frac{1}{L(t)} = \chi_2 \frac{\kappa}{2\pi} t + \frac{1}{L(0)} \tag{5}$$

ここで $L(0)$ は $t = 0$ での渦糸長密度である。図 6 は、我々の結果と Vinen 方程式とを比較したものである。通常、χ_2 は実験で観測される変数であるが、常流体成分が無視できる温度領域で、χ_2 は観測されていないので、これを fitting parameter として我々の結果と比較する。図 6 の実線が我々の結果で、点線が Vinen 方程式の結果である。点線は、上

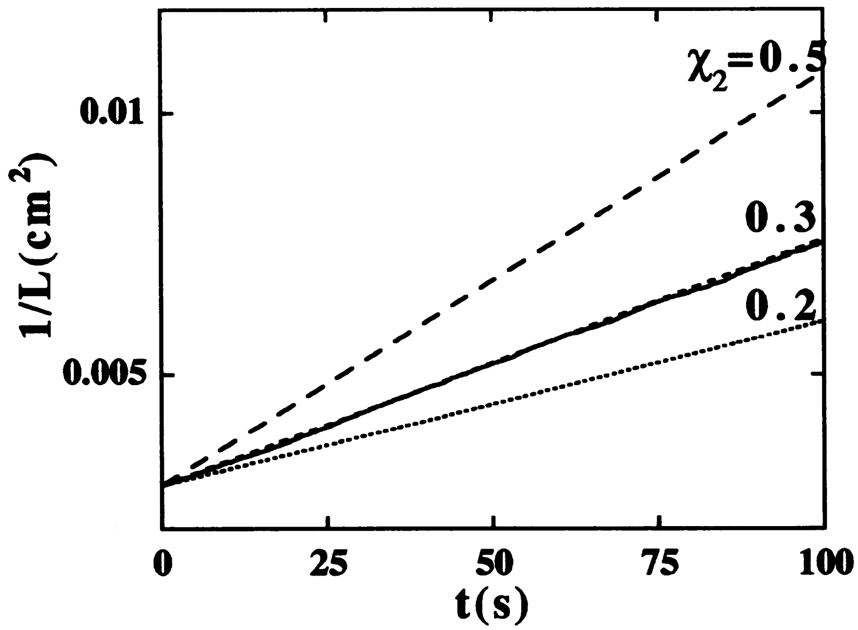

図 6: Vinen 方程式との比較

から $\chi_2 = 0.5, 0.3, 0.2$ のときの結果である。これによると、$\chi_2 = 0.3$ のとき、Vinen 方程式と我々の結果は、非常によく一致することが分かる。次に、この χ_2 の値が、他の温度領域の実験結果と比較して、妥当かどうかを議論する。図 7 は、縦軸が χ_2 で、横軸が ρ_s に比例した量である [11]。そして、丸印が外部から流れ場を印加したときの値で、四角印が外部からの印加場がないときの結果である。同じ温度で、それらの値が違うのは、常流体による複雑な流れの効果であることが知られている。そのため、常流体の密度が減少するにつれ、両者のずれが減少している。従って、今考えている、$\rho_n = 0$ でそれらの値は一致するはずである。図 7 によると、四角印の方は $\rho_n = 0$ に向かって緩やかに増加し、丸印の方は、急激に減少する傾向が見られる。それによると、$\rho_n = 0$ のとき $\chi_2 = 0.3$ で Vinen 方程式と一致するという、我々の結果は実験結果と consistent であると思われる。

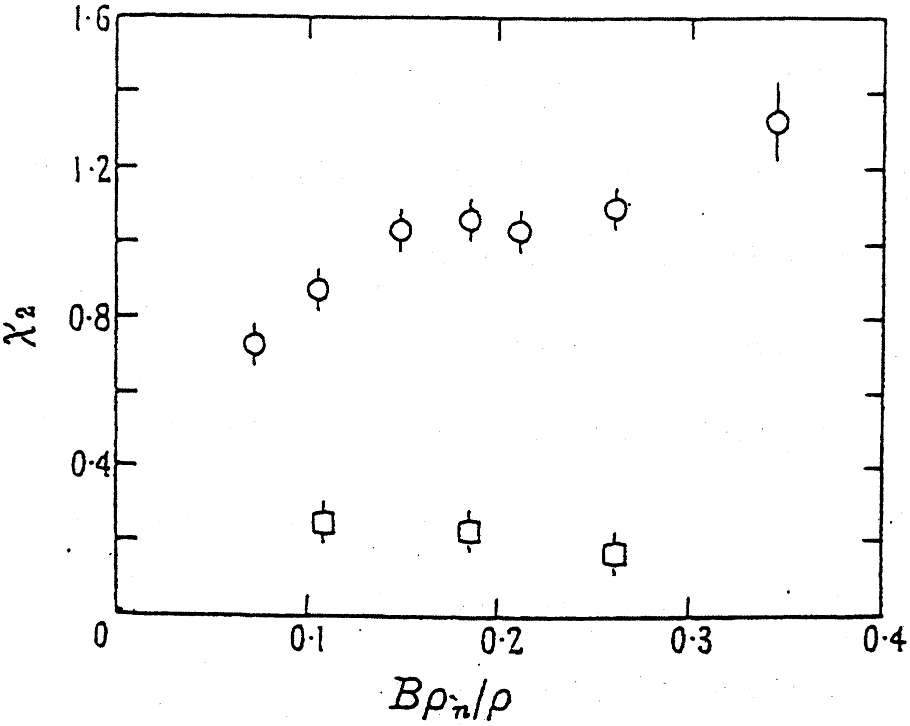

図 7: χ_2 の観測値

結論

渦糸近似を用いて、相互摩擦力を無視したときの vortex tangle の減衰過程を計算した。その結果、以下の結論を得た [6]。相互摩擦力を無視すると、渦上に kink な構造が現れる。それにより渦は、その渦自身と再結合する分裂型の再結合が多発し、より小さな渦に分裂していく。渦は小さく分裂すればするほど、分裂速度が速くなるため、渦芯サイズの渦が消えることを仮定すると、数値計算のカットオフの効果は、統計的な量である渦糸長密度の時間変化にほとんど影響しないことがわかった。そして、我々の結果により得られた、渦糸長密度の時間変化は、Vinen 方程式と非常によく一致し、そのときの χ_2 の値は、実験結果と consistent である。

参考文献

[1] H.E. Hall and W.F. Vinen, Proc. Roy. Soc. A, **238**, 204 (1956).

[2] S.L. Davis, P.C.Hendry, and P.V.E. McClintock, Physica B **280**, 43 (2000).

[3] W.F. Vinen, Phys. Rev. B, **61**, 1410 (2000).

[4] B.V. Svistunov, Phys. Rev. B, **52**, 3647 (1995).

[5] C. Nore, M. Abid, and M.E. Brachet, Phys. Rev. Lett, **78**, 3896 (1997).

[6] M. Tsubota, T. Araki and S.K. Nemirovskii, Phys. Rev. B, **62**, 11751 (2000).

[7] W.F. Vinen, Proc. Roy. Soc. A, **260**, 218 (1960).

[8] K.W. Schwarz, Phys. Rev. B, **31**, 5782 (1985).

[9] R.J. Arms and F.R. Hamma, Phys. fluids, **8**, 553 (1965).

[10] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett, **71**, 1375 (1993).

[11] W.F. Vinen, Proc. Roy. Soc. A, **242**, 493 (1957).