数理解析研究所講究録 1228 巻 2001 年 13-21

A Generalized Quadrangle with an Automorphism Group acting Regularly on the Points

吉荒 聡
Satoshi Yoshiara
大阪教育大学 (Osaka Kyouiku University) 数理科学講座

この原稿は２００１年２月１９日に京都大学数理解析研究所で行われた筆者の講演を思い起こしつつ気軽にまとめたものです。置換群論について多少学んだ修士の学生が理解できることを目標に記述しました。(２００１年３月２１日提出)

1. 問題設定と動機など

この講演で述べたいのは、点上正則に作用する自己同型群を持つような一般化された四辺形 (generalized quadrangle – GQ) を調べるための幾つかの簡単な結果です。これらを組み合わせただけで、例えば位数 (t^2,t) の GQ の非存在が示せます。また、他の位数の場合にも、それが知られた GQ の位数であれば、その自己同型群が非常に可解群に近いものであることが示せます。

筆者がこうした構造の研究に興味を持ったのは、旗上可移な拡大四辺形の分類を完成させる上で関連した問題を考察する必要が生じたことが一つのきっかけですが、この問題は独自に考察する価値もあり、考えてみると案外面白いと感じています。もう一つの動機は、点集合上に正則な自己同型を持つ構造を考えるということは射影平面 (一般化された三辺形) の場合には差集合を考えることに相当するので、同様に一般化された四辺形上の差集合理論・整数論といったものを考えるのは興味深いことと感じたからです。

こうした方面で先駆的な研究を行ったのはディナ・ギネリ [Gh] ですが、そこでは位数が (s,s) のGQで、その点集合上に正則な自己同型群を持つものが、更に s を偶数として調べられています。アイデアは、与えられた条件から差集合が構成できて、しかもそれが correlation を持つことにあります。そこでオットの結果 [Ot] が利用できて自己同型群の正規部分群に関して色々な制限が得られます。

ところが、筆者が、はじめギネリの研究と無関係に、後には彼女の議論を私の結果と対比・整理しながら研究していくと、実は当初夢見ていたように GQ 上の整数論といった道具立てを開発するまでも無く、ギネリの結果はすべて、ペインとタスの基本的な教科書 [PT] の第１章にある程度の簡単な事柄のみから導けてしまうことが分かりました。しかも、私のやり方では、差集合が構成できなくてもよいので、位数に関する条件 $s=t$ も仮定する必要が無く、はるかに多くのケースを扱えることが判明したのです。そこで、私の議論の基本となる幾つかの観察を、議論の初等性をなるべく明示しつつ紹介したいと思います。

2. 一般化された四辺形 (GQ)

定義 まず一般化された四辺形とは何であったか思い出しましょう。それぞれ**点**と**線**と呼ばれる2種類の対象のなす集合 $\overline{\mathcal{P}}$ と $\overline{\mathcal{L}}$ からなるインシデンス構造 $(\mathcal{P}, \mathcal{L}; *)$ が**一般化された四辺形** (GQ) であるとは、

異なる2点を通るような線は高々一本で、
どの線上にも丁度 $s+1$ 個の点があり、どの点も丁度 $t+1$ 本の線が通り、
最後に最も重要な公理として、
「どの線とその上に無いどの点を与えても、与えられた線上に、与えられた点と
線で結ばれる (**共線**である) ような点が唯一点存在する」

を満たすことでした。ここで出てきた自然数の組 (s, t) をこの GQ の**位数** (order) といいます。以後はすべて $s, t > 1$ とします。簡単な数え上げ議論により点・線の個数が次のように与えられることがわかります。[PT, 1.2.1]

$$|\mathcal{P}| = (s+1)(st+1), \quad |\mathcal{L}| = (t+1)(st+1)$$

例 1. 例えば、有限体 $GF(q)$ 上の4次元数ベクトル空間 $GF(q)^4 = \{(x_i)_{i=1}^4 \mid x_i \in GF(q)\}$ に、非退化な交代形式を式 $f(x, y) = x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2$ により定義すると、この形式に関して（全特異的な）一次元部分空間を点とし、全特異的な二次元部分空間を線とすれば、包含関係が定めるインシデンス構造は、**シムプレクティック GQ** と呼ばれる位数 (q, q) の GQ となります。（通常それが埋め込まれる射影空間の射影次元を付して $W_3(q)$ と書きます）

例 2. 上は皆さんおなじみの例でしょうが、これを多少ひねって次のような GQ も作れます。
まず、上の GQ $W_3(q)$ の勝手な一点 P_0 を固定します。そして、この点およびそれと共線であるような合計 $1 + q(q+1)$ 個の点以外の $(1+q)(1+q^2) - (1+q(q+1)) = q^3$ 個の点からなる集合 $\overline{\mathcal{P}}$ を点集合とします。更に、線の集合 $\overline{\mathcal{L}}$ としては、点 P_0 を通らない $(1+q)(1+q^2) - (1+q) = q^2(q+1)$ 本の線の他に、新たに点 P_0 と共線でない点 A に対する

$\{P_0, A\}^{\perp\perp} :=$ P_0 と A の双方に共線な点のすべてに共線である点の集合

(P_0, A の定める **hyperbolic line** と呼ばれます）の形で定義される線 (点集合の部分集合) を考えます。今の場合、$\{P_0, A\}^{\perp\perp}$ はつねに $q+1$ 個の点からなることが確認され、このうち点 P_0 を除く q 個の点が $\overline{\mathcal{P}}$ に属します。$\{P_0, A\}^{\perp\perp} = \{P_0, A'\}^{\perp\perp}$ が成立するのは A' が $\{P_0, A\}^{\perp\perp}$ に含まれる q 個の $\overline{\mathcal{P}}$ の点のどれかであるときかつそのときに限ることも確認できるので、後者のタイプの線が $q^3/q = q^2$ 本得られて、もとの GQ $W_3(q)$ の線集合の一部である前者のタイプの線とあわせて合計 $q^2(q+1) + q^2 = q^2(q+2)$ 本の線が得られています。これらの集合 $\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}$ 上にインシデンスを包含関係で定めれば、$(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}; *)$ は位数 $(q-1, q+1)$ の GQ となることが確かめられます。[PT, 3.1.4]

q が奇数のときには、この GQ は **アーレンス・ゼケレシュの GQ** ($AS(q)$, [PT, 3.1.5, 3.2.6]) として知られていたものに一致し、q が偶数のときには、regular hyperoval O に対応する**ティッツの GQ** ($T_2^*(O)$, [PT, 3.1.3, 3.2.6]) と一致します。[1]

交代形式 f に関するシンプレクティック群は GQ $W_3(q)$ の自己同型を引き起こし、点上に可移に作用するので P_0 としてどの点を選んでも GQ $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}; *)$ の構造は一定です。$P_0 = GF(q)(1,0,0,0)$ のシンプレクティック群における固定部分群中に次の形の正規部分群が存在します。

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in GF(q) \right\}$$

この群は新たな GQ $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}; *)$ の点集合上に正則に作用しています。したがってこの GQ はこの談話で扱っている GQ の例になっています。実は、点集合上に正則に作用する自己同型群を持つ GQ として知られているのは、この例だけです。多分これのみではないかと予想されているようですが、予想の強い根拠は無いと思います。

ちなみに、知られている GQ の位数を挙げておくと次のようになっています。ここで q はすべて素数のべきです。

$$(q,q),\ (q,q^2),\ (q^2,q),\ (q^2,q^3),\ (q^3,q^2),\ (q-1,q+1),\ (q+1,q-1)$$

いわゆる classical な GQ[2] ないしはその dual[3] の位数として最後の二つのもの以外がすべて現れますが、これらの位数を持つ GQ でも classical でない例があります。後者二つは、先ほどの例 2 およびその dual の位数です。これらの位数を持つ GQ でも例 2 に同型であるとは限りません。

現時点で私が目標にしているのは、これらの知られた位数を持つ GQ に対して条件

(*) その自己同型群で点集合上正則に作用するものがある

を仮定して、その自己同型群の構造に強い制限を得ることです。できれば、位数 $(q-1, q+1)$ 以外の可能性を消してしまいたいと思っています。

---

[1] [PT, 3.2.6] のはじめの命題は $T_2(O) \cong P(T_2(O'), (\infty))$ ではなく "$T_2^*(O) \cong P(T_2(O'), (\infty))$" の誤植です。Regular hyperoval O については $x \in O$ を $O' = O - \{x\}$ が conic になるように取れ、[PT, 3.2.2] から $W_3(q) \cong T_2(O')$ です。すると訂正した形の [PT, 3.2.6] から q even のときの同型 $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}; *) \cong T_2^*(O)$ が得られます。

[2] 有限体上のベクトル空間に定義された Witt index 2 の非退化な交代、ユニタリないしは二次形式に関する全等方的 1 次元、2 次元部分空間が包含関係に関してなす GQ

[3] 点と線を入れ換えて得られる GQ

3. 記号と基本的な補題

私の議論を進めるにあたって、用意しておくと便利なのは次の記号です。以下、$(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ を位数 (s,t) の GQ $(s>1,\ t>1)$ で先の条件 $(*)$ を満たすものとし、点集合 $\mathcal{P}$ 上に正則に作用する自己同型群を G という記号であらわします。正則性から $|G| = |\mathcal{P}| = (s+1)(st+1)$ です。

更に $\mathcal{P}$ の一つの点 O を取り、固定します。すると G の作用の正則性から任意の $\mathcal{P}$ の点 P に対して $P = O^g$ $(g \in G)$ を満たす $g \in G$ がただ一つ存在します。指定された点 O と共線であるような点 P に対するこのような $g \in G$ を集めて、単位元と併せて

$$\Delta := \{g \in G \mid O \sim O^g\} \cup \{1\}$$

という群 G の部分集合を考えます。ここで、一般に GQ の二つの異なる点 P と Q に対して、これらが共線 (collinear) である（ある共通の線上にある）ことを記号を用いて $P \sim Q$ と書いています。

また、それぞれの自己同型 $g \in G$ は次のように線集合の分割を与えます。

$\mathcal{L}_1(g) := \{l \in \mathcal{L} \mid l^g = l\}$, $\mathcal{L}_2(g) := \{l \in \mathcal{L} \mid l^g \neq l, l \sim l^g\}$,
$\mathcal{L}_3(g) := \{l \in \mathcal{L} \mid l^g \neq l, l \not\sim l^g\}$ とおくと
$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(g) \cup \mathcal{L}_2(g) \cup \mathcal{L}_3(g)$, disjoint union.

ここで $l \sim m$ と書いたのは、上の二点の共線を表す記号をその dual にも流用したもので、二つの異なる線 l と m が共点 (concurrent) である（ある一点で交わる）事を意味します。

同様に、自己同型 $g \in G$ は点集合の分割も与えますが、G の作用の正則性から $g \neq 1$ ならば $\mathcal{P}_1(g) := \{P \in \mathcal{P} \mid P^g = P\} = \emptyset$ なので、

$1 \neq g \in G$ に対して $\mathcal{P}_2(g) := \{P \in \mathcal{P} \mid P^g \neq P, P \sim P^g\}$,
$\mathcal{P}_3(g) := \{P \in \mathcal{P} \mid P^g \neq P, P \not\sim P^g\}$ とおくと
$\mathcal{P} = \mathcal{P}_2(g) \cup \mathcal{P}_3(g)$, disjoint union.

上で定義した集合 $\mathcal{P}_i(g)$, $\mathcal{L}_i(g)$ $(i = 1,2,3)$ は、（点集合上に正則とは限らない）一般の自己同型群の元 g についても定義される事に注意します。実はこれらの集合の間に、一般に次の関係が成立します。

命題 [PT, 1.9.2]　$(1+t)|\mathcal{P}_1(g)| + |\mathcal{P}_2(g)| = (1+s)|\mathcal{L}_1(g)| + |\mathcal{L}_2(g)|$

証明は、二通りの数え上げによる初等的なものです。更に次の合同式が成立します。証明は、点と線でインデックス付けられた incidence 行列の固有値の重複度の整数性を用いるもので、標準的です。

命題 [PT, 1.9.1]　$(1+t)|\mathcal{P}_1(g)| + |\mathcal{P}_2(g)| \equiv 1 + st \pmod{s+t}$

これらを組み合わせれば、条件 $(*)$ の仮定の元に、以上の記号を用いて次がいえます。(後半の等式は $\mathcal{P}_2(g)$ の元を O^x $(x \in G)$ の形に書いてみればすぐわかります。また、記号 g^G は元 g を含む G-共役類を表します。) これが議論の出発点です。

Lemma 1 G の自明でない元 g に対して、ある整数 u_g が存在して
$|\mathcal{P}_2(g)| = (1+s)|\mathcal{L}_1(g)| + |\mathcal{L}_2(g)| = (1+st) + (s+t)u_g.$
更にこの値は $|g^G \cap \Delta||C_G(g)|$ に等しい。

これを使うとたちどころにわかるのは、

Lemma 2 $d := (s,t) > 1$ ならば
すべての $g \in G$ に対して $g^G \cap \Delta \neq \emptyset$ であり、
$|g^G \cap \Delta^c|$ は *(*0 の可能性もあるが*)* d の倍数である。(ここで $\Delta^c := G - \Delta$)

主張は $g = 1$ のとき明らかなので $g \neq 1$ とします。もし $g^G \cap \Delta = \emptyset$ ならば、先の Lemma 1 から $0 = (1+st) + (s+t)u_g$ ですが、右辺は d で割り切れませんから矛盾です。また $|g^G \cap \Delta^c||C_G(g)| = |G| - |g^G \cap \Delta||C_G(g)|$ に先の Lemma 1 を用いて左辺が d で割り切れる事がわかります。ここで $|G| = |\mathcal{P}| = (s+1)(st+1) \equiv 1 \pmod d$ 従って $(|C_G(g)|, d) = 1$ であることに注意すると、後半の主張が得られます。

この事実の系として G の正規部分群に関する次の結果が得られます。[4]

Lemma 3 $d = (s,t) > 1$ とする。N が G の自明でない正規部分群であれば、$N \subseteq \Delta$ であるか、または $d + 2 \leq |N|$ である。

実際、$1 \neq N \trianglelefteq G$ かつ $N \not\subseteq \Delta$ とすると、$N \cap \Delta^c$ は空集合ではありません。この集合は $g^G \cap \Delta^c$ の形の部分集合の disjoint union なので、Lemma 2 からその大きさは d の倍数であり、特に $d \leq |N \cap \Delta^c|$ です。また $1 \in N \cap \Delta$ であり、Lemma 2 から N の自明でない元 g について $N \cap \Delta$ は空集合ではない部分集合 $g^G \cap \Delta$ を含みます。従って $|N| \geq d+1+1 = d+2$ です。

更に上の結果の第一の場合が成り立つならば、非常に強い制限が得られる事がわかります。

Lemma 4 N は G の自明でない正規部分群で、次のどちらかを満たすと仮定する。
(i) $N \subseteq \Delta$ *(ii)* N は *p-group* で $(|N|, |\mathcal{L}|) = 1$.
すると N の位数は $s+1$ の約数であり、しかも $GQ\ (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ は *spread* を持つ。すなわち線集合 $\mathcal{L}$ の部分集合 $\mathcal{L}'$ で、$\mathcal{P}$ のどの点も $\mathcal{L}'$ に属する線のただ一つに含まれる、という性質を持つものが存在する。特に $s \leq t^2 - t$ である。

仮定 (ii) が満たされる場合には明らかに N が固定するような線が存在します。[5] 仮定 (i) が満たされる場合にも同じ事が言えて、その証明も難しくありませんが、ここでは省略します。

[4] 数理研の談話のときには強調し忘れたような気がします。
[5] 数理研の談話のときには、第二の場合の条件でうっかり p-群であるという仮定をいい忘れたようで、後で宗政さんからご指摘を受けました。有り難うございます。

(正規性は必要無く、一般に Δ に含まれる部分群はある線を固定することが示せます。）ともかく、いずれにせよ、ある線 l が存在して $N \leq G_l$ となります。

N は正規部分群なので N は $\mathcal{L}' := \{l^g \mid g \in G\}$ のすべての線をそれぞれ固定します。もし $\mathcal{L}'$ の異なる二線で交わるものがあれば、N はそれらの交点を固定してしまい、G の正則性と $N \neq 1$ に反します。そこで $\mathcal{L}'$ のどの二線も交わりません。この性質から点と $\mathcal{L}'$ に属する線でそれを含むものの対を二通りに数えれば $|\mathcal{L}'| \leq st+1$ という制限を得ます。（等号が成り立つときが、$\mathcal{L}'$ が spread となるときです。）一方、G の作用の正則性から G_l は、その固定する線 l 上の $s+1$ 個の点上に半正則に作用し、従って $|G_l|$ は $s+1$ の約数であり、よって $|\mathcal{L}'| = |G : G_l|$ は $(s+1)(st+1)/(s+1)$ の倍数となって、等号が成立します。Spread の存在から位数に対する制限 $s \leq t^2 - t$ が得られるのは有名な結果で、証明は例えば [PT, 1.8.3](の dual statement) にあります。

最後に位数 2, 3 の自己同型の特殊性を示す注意をしましょう。

Lemma 5 $d := (s,t) > 1$ とする。$g \in G$ が位数 2 または 3 の自己同型ならば $\mathcal{L}_2(g) = \emptyset$. また $s+1$ は $o(g)$ の倍数である。

l が $l \neq l^g \sim l$ を満たす線ならば、l と l^g の交点を P とするとき $P^{g^{-1}}$ と P は l 上の異なる２点で、P と P^g は l^g 上の異なる２点です。すると $g^{-1} = g$ ならば $l = l^g$ となり l の取り方に反しますし、$g^{-1} = g^2$ ならば P^g と $P^{g^{-1}}$ も共線となって、GQ が三角形を含まないことに反します。

そこで $\mathcal{L}_2(g) = \emptyset$ ですが、基本補題 Lemma 1 から $|g^G \cap \Delta| = (s+1)|\mathcal{L}_1(g)|$ で、Lemma 2 からこの値は0 でないので、g により固定される線が存在し、l 上の $s+1$ 個の点上への g の作用は半正則ですから、$o(g)$ は $s+1$ を割り切ります。

4. ある非存在定理

前章で紹介した基本的な結果と更に

> **定理** [Gl] 位数が 3 と互いに素な有限非可換単純群は鈴木系列の群 $Sz(2^{2e+1})$ $(e \geq 1)$ に限る　　及び
> **命題** [PT, 1.2.4] 位数が (t,t^2) の GQ において、どの３本の互いに交わらない線を取っても、それらのすべてに交わる線が丁度 $t+1$ 本存在する

を用いると、次の結果が示せます。

Theorem 6 位数 (t^2,t) $(t>1)$ の GQ $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ で条件
$(*)$ 自己同型群 G が点集合上に正則に作用する
を満たすものは存在しない。

この証明の筋道を説明する前に、位数が 3 と互いに素な単純群に対する定理について一言注意しておきます。この結果は、Glauberman [Gl] によって初等的な証明が与えられており、そこで必要な分類定理は Strongly closed abelian 2-subgroup を持つ群の分類という、Goldschmidt [Go] により得られた古典的成果のみです。従って、上記の定理 6 の証明は有限群論の古典的成果のみの援用によって得られています。

以下 $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ を定理の条件を満たす GQ とします。特に $d=(t^2,t)=t>1$ ですので、前章の結果を自由に使えます。上記の定理の証明はおおよそ次のステップに分かれます。基本方針は一般化されたフィッティング部分群 $F^*(G)$ (自明でない有限群 G に対してつねに定義されて自明でない正規部分群となる) について調べることです。

(1) $|G|=(t^2+1)(t+1)(t^2-t+1)$ であり、$(|G|,3)=1$。また
t の偶奇に応じて $(t^2+1,t+1)=1$ or 2, $(t^2+1,t^2-t+1)=1$, $(t+1,t^2-t+1)=1$.

(2) p が $t+1$ または t^2+1 を割り切る奇素数ならば $O_p(G)=1$.

(3) $O_2(G)=1$.

(4) G の極小な正規部分群は可解である。

(5) $F^*(G)$ は t^2-t+1 を割りきるある素数 p に対する自明でない p-群である。

(6) t^2+1 を割りきる任意の奇素数 r に対して G のシロー r-部分群は $F^*(G)=O_p(G)$ 上に固定点なしに作用する。

(7) 最終矛盾

以下、これらの各ステップの証明において、前章の基本的結果をどの様に適用するかを説明します。前章の結果で省略した事も含め、詳しい事は私のノート [Yo] に書いてあります。[6]

ステップ 1 について　もし G が位数 3 の元を含めば Lemma 5 により 3 は $s+1=t^2+1$ を割りきる事になり矛盾です。後の主張は、このことを使えば単なる算数で確かめられます。

ステップ 2 について　ステップ 1 から p が $t+1$ を割りきる奇素数ならば $|O_p(G)|$ は $t+1$ を割りきります。すると Lemma 3 から $O_p(G)\neq 1$ ならば $O_p(G)\subseteq\Delta$ となりますが、このとき Lemma 4 の仮定 (i) が満たされその結論から $s=t^2\leq t^2-t$ となってしまい、矛盾です。

またステップ 1 から p が t^2+1 を割りきる奇素数ならば $|O_p(G)|$ は t^2+1 を割りきり、しかも $|\mathcal{L}|=(t+1)(st+1)=(t+1)^2(t^2-t+1)$ と互いに素ですので、今度は Lemma 4 の仮定 (ii) が満たされ、上と同様に矛盾になります。

---

[6] この予稿の原版にあった幾つかの誤植と誤りを指摘して頂いた熊本大学の平峰 豊 氏に感謝します。

ステップ 3 について $O_2(G) \neq 1$ ならば $t+1$ が 2 のべきで $|G|_2 = 2(t+1)$ である事が Lemma 3 を用いて示せ、また $O_2(G)$ は基本可換群である事がわかります。後は Lemma 4 より $O_2(G) \not\subset \Delta$ であることから、$O_2(G)$ に含まれる共役類の大きさを調べる事で簡単に矛盾が導けます。詳細は [Yo, Step 2] を見て下さい。

ステップ 4 について 極小正規部分群 N が非可解であれば、それは互いに共役な非可換単純群の直積で、ステップ 1 から G の位数は 3 と互いに素なので、この章の始めに紹介した定理により N の直積因子は鈴木系列の群 $Sz(q)$ $(q = 2^{2e+1} \geq 8)$ となります。まず、Lemma 4 より単純因子中の central involution a を含む G-共役類が Δ^c と空でなく交わる事から $|a^G| \geq t+1$ という下からのバウンドと、$|G|_2 \geq 2(t+1)$ であることから $|a^G|$ の上からのバウンドを得て、直積因子はただ一つである事を示します。[Yo, Step 3]

N が単純としたとき $C_G(N)$ の位数を上から抑える事により、矛盾を導く事が出来ます。（この部分 [Yo, Step 4,5] は多少技巧を要します。）

ステップ 5 について これは今までのステップの結果の系です。というのは、G の一般化されたフィッティング群 $F^*(G)$ は、フィッティング群 $F(G)$ [7] と $E(G)$ [8] の中心積ですが、ステップ 4 から $E(G)$ は $F(G)$ に含まれる事がわかり $F^*(G) = F(G)$ です。$G \neq 1$ ですから、一般化されたフィッティング群の基本性質 $C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$ により $F^*(G) = F(G) \neq 1$ です。また $F(G)$ は適当な素数 p に対する自明でない $O_p(G)$ たちの直積ですが、ステップ 1,2,3 から このような素数は $t^2 - t + 1$ の約数に限る事がわかります。またこのような素数が二つ $(p, q$ とする$)$ あれば Lemma 3 と Lemma 4 から $|O_p(G) \times O_q(G)|$ は $t^2 - t + 1$ の約数であるのにもかかわらず $|O_p(G)| \geq t+2$ かつ $|O_q(G)| \geq t+2$ となって矛盾です。従って、ステップ 5 の主張が示されました。

ステップ 6 について t^2+1 を割りきる奇素数 r に対して G のシロー r-群 R をとり、その $O_p(G)$ への共役による作用が固定点を持つとします。すなわち、ある元 $1 \neq g \in R$ とある元 $1 \neq x \in O_p(G)$ が互いに可換であるとします。すると x は g の固定する線の集合 $\mathcal{L}_1(g)$ 上に作用します。

ここで $|\mathcal{L}_1(g)| = 2$ である事に注意します。というのは、$|\mathcal{L}| = (t+1)^2(t^2 - t + 1) \equiv 2 \pmod{t^2+1}$ なので $|\mathcal{L}| \equiv 2 \pmod{r}$ でもあり、奇数位数の元なので g は少なくとも 2 本の線を固定します。もし 3 本以上固定すると、それらの共通に交わる線が $t+1$ 本あるので（この章の始めに紹介した命題による）g はそれらの上にも作用し、元々の 3 本の線上の点

[7] G のべき零な正規部分群すべての積

[8] 群 G の部分群 K が G の成分 (component) であるとは、群 G 中の正規列で K に到達するものがあり、しかも K は自身の交換子部分群と一致して、その中心による剰余群が非可換単純群であることです。G のすべての成分の生成する正規部分群を $E(G)$ と書き、$F^*(G) = E(G)F(G)$ を一般化されたフィッティング部分群と呼びます。

を固定しない事から、その作用は半正則です。すると $o(g)$ が t^2+1 と $t+1$ の両方を割りきる 1 より大きい奇数となって矛盾です。

さて、すると、奇数位数の自明でない元 x が 二本の線からなる集合 $\mathcal{L}_1(g)$ に作用するので、特に x は線を固定し、従ってその t^2+1 個の点上に半正則に作用します。一方 $o(x)$ はステップ 5 から t^2-t+1 を割りきる素数のべきです。従って $o(x)$ が t^2+1 と t^2-t+1 の両方を割りきる 1 より大きい数である事になり、矛盾です。

最終矛盾について　ステップ 6 から t^2+1 を割りきるどの奇素数 r についても $|R|=(t^2+1)_r$ は $|O_p(G)|-1$ を割りきります。t^2+1 の奇数部分は $(t^2+1)/\varepsilon$ ($\varepsilon=1$ または 2) ですから、$|O_p(G)|-1=\alpha((t^2+1)/\varepsilon)$ を満たす自然数 α が存在し、$|O_p(G)|$ は ステップ 1,5 から t^2-t+1 の約数ですから

$$t^2-t+1=|O_p(G)|\beta=\{\alpha((t^2+1)/\varepsilon)+1\}\beta$$

を満たす自然数 β が存在します。ここから容易に矛盾が導かれます。

参考文献

[Gh] Dina Ghinelli, Regular groups on generalized quadrangles and nonabelian difference sets with multiplier -1, *Geom. Dedicata* **41** (1992), 165–174.

[Go] David M. Goldschmidt, 2-fusion in finite groups, *Ann. of Math.* **99** (1974), 70–117.

[Gl] George Glauberman, *Factorization in local subgroups of finite groups*, CBMS **33**, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[Ot] U. Ott, "Some remarks on representation theory in finite geometries", *Geometries and Groups, Lecture Notes in Math.* **893** (1981), 68–110.

[PT] S. E. Payne and Jeff Thas, *Finite Generalized Quadrangles*, Pitman, Boston, 1984.

[Yo] S. Yoshiara, A generalized quadrangle with an automorphism group acting regularly on the points, ゼミ「有限幾何とその周辺」における談話 (2000 年 12 月 23 日, 近畿大学理工学部) の予稿.