数理解析研究所講究録 1230 巻 2001 年 44-48

III_0 subfactor の non-strongly free automorphism について

増田俊彦
(MASUDA Toshihiko)
高知大学理学部数理情報学科

$N\subset M$ を指数有限の III 型 subfactor とする. (この講演では conditional expectation は minimal なものだけを考える.) φ を conditional expectation で不変な M の faithful semifinite normal weight とする. $\tilde{N}\subset\tilde{M}:=N\rtimes_{\sigma^{\varphi}}\mathbf{R}\subset M\rtimes_{\sigma^{\varphi}}\mathbf{R}$ をその連続接合積分解とし, τ を tracial weight, θ_t を trace scaling 1 parameter group とする. そして $Z(\tilde{N})=Z(\tilde{M})$ である事を仮定する. 特に N と M のタイプは同じになる. $\alpha\in\mathrm{Aut}(M,N)$ について $\tilde{\alpha}$ で α の $\tilde{N}\subset\tilde{M}$ への Haagerup-Størmer の [2] での canonical extension を表す事とする. つまり $\tilde{\alpha}$ は次の様に定義される.
(1) $\tilde{\alpha}(x)=\alpha(x)$, $x\in M$, (2) $\tilde{\alpha}(\lambda_t)=[D\varphi\circ\alpha^{-1}:D\varphi]_t\lambda_t$.
ここで λ_t は implementing unitary である.

Subfactor の自己同型に関しては長田-幸崎, 及び Popa によって独立に non-strong outerness という概念が導入された.

定義 1 ([1, Definition 1], [7, Definition 1.5.1]) $\alpha\in\mathrm{Aut}(M,N)$ が non-strongly outer であるとはある番号 k と $0\neq a\in M_k$ が $\alpha(x)a=ax$ を全ての $x\in\tilde{M}$ について満たす様に存在する事である.

$N=M$ の場合は上の性質は α が inner automorphism となる事と同値である.

上の定義と Haagerup-Størmer の研究 [2], [3] に基づき C. Winsløw は [8] で下の様に $\alpha\in\mathrm{Aut}(M,N)$ について non-strong freeness の概念を導入した.

定義 2 ([8, Definition 3.2]) $\alpha\in\mathrm{Aut}(M,N)$ が non-strongly free であるとは, ある番号 k と $0\neq a\in\tilde{M}_k$ が $\tilde{\alpha}(x)a=ax$ を全ての $x\in\tilde{M}$ について満たす様に存在する事である.

$N=M$ の時は上の性質は $\tilde{\alpha}$ が inner である事と同値であり, この場合は α は [3, Proposition 5.4] により inner automorphism と extended modular automorphism の合成で書ける事が示されている.

(注意) 上の二つの定義で実際に定義されたのは (non のつかない) strong outerness 及び strong freeness という概念であるが, 今回の話では non-strong outerness/freeness を扱うので, こちらの定義を書いてある.

[5] で幸崎は, non-strongly free automorphism の構造を研究し次の定理を得た. これは上述した [3, Proposition 5.4] の subfactor 版と考えられる.

定理 3 ([5, Theorem 19]) $N \subset M$ を III_λ 型 subfactor($\lambda \neq 0$) とする. α を non-strongly free automorphism とすると, α は $\beta \circ \sigma_t^\varphi$ の形になる. 但し β は non-strongly outer automorphism である.

$N \subset M$ に対する Longo の canonical endomorphism を γ として, Δ を γ^n の既約分解から得られる sector の集合とする. Non-strongly outer automorphism については [1], [5] により, Δ の中に現れる automorphism として特徴付けられている. よって $N \subset M$ の fusion rule, 若しくは (dual) principal graph が判っていれば, 上の定理で III_λ 型 subfactor ($\lambda \neq 0$) については non-strongly free automorphism の様子は全て判る事になる.

ここで III_0 型 subfactor の場合にどうなるか, 疑問になるのは自然である. 上の結果から類推して, modular automorphism になっているところを extended modular automorphism に置き換えた結果になるであろう, と予想される.

今回の講演では III_0 型 subfactor の場合を研究した結果を述べるが, その前に [4] で泉によって導入された endomorphism の canonical extension と modular endomorphism の概念を説明する.

ρ を M の endomorphism で $d\rho < +\infty$ となる物とする. この時 Haagerup-Størmer による automorphism の canonical extension と同様に ρ の canonical extension を次の様に定める事ができる. ([4, Proposition 2.1].)
(1) $\tilde{\rho}(x) = \rho(x)$, $x \in M$,
(2) $\tilde{\rho}(\lambda_t) = d\rho^{it}[D\varphi \circ \phi_\rho : D\varphi]\lambda_t$,
ここで ϕ_ρ は ρ の standard left inverse で E_ρ を M から $\rho(M)$ への minimal expectation とする時 $\phi_\rho = \rho^{-1}E_\rho$ で定められる. これはもちろん Haagerup-Størmer の canonical extension の拡張概念となっている.

定義 4 ([4, Definition 3.2]) ρ を $d\rho < +\infty$ である M の endomorphism とする. ρ が modular endomorphism であるとは $\tilde{\rho}$ が inner endomorphism となる事である. 即ち isometry の組 $\{v_i\}_{i=1}^n \subset \tilde{M}$ で $v_i^* v_j = \delta_{ij}$, $\sum_{i=1}^n v_i v_i^* = 1$ となる物が存在して, $\tilde{\rho}(x) = \sum_{i=1}^n v_i x v_i^*$ となる事である.

上の定義に出てくる n は実は $d\rho$ である事がわかるので, 特に modular endomorphism の次元は自然数になる.

次に modular endomorphism とコサイクルの対応を説明する. ρ を modular endomorphism とすると定義から $\tilde{\rho}(x) = \sum_{i=1}^n v_i x v_i^*$ となる $\{v_i\}_{i=1}^n$ が存在する. この時 $c_{ij,t} := v_i^* \theta_t(v_j)$ と定めると $c_t = (c_{ij,t}) \in U(n, Z(\tilde{M}))$ となる事が判る. なおかつこれはコサイクル等式 $c_t\theta_t(c_s) = c_{t+s}$ を満たす. 逆にコサイクル $c_t \in Z_\theta^1(\mathbf{R}, U(n, Z(\tilde{M})))$ が与えられたときに以下の様にして $\rho \in \mathrm{End}\,(M)$ を構成する事ができる. 竹崎双対定理により $M = \tilde{M} \rtimes_\theta \mathbf{R}$ と表わしておき, $\{v_i\}_{i=1}^n \subset \tilde{M}$ を Cuntz relation を満たす isometry の集合としておく. そこで u_t を implementing unitary とした時に

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^n v_i x v_i^*, \ x \in \tilde{M}$$

$$\rho(u_t) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} v_i c_{ij,t} \theta_t(v_j^*) u_t$$

と定めると $\rho \in \mathrm{End}(M)$ となる. かつこの ρ から上のプロセスによって得られるコサイクルは最初に与えられた物と一致する. 実はこの対応をもっと押し進めて, modular endomorphism からくる sector の集合とあるコホモロジー群との対応が得られるがこの点については [4] を参照して頂きたい.

次の定理が本稿の主定理である.

定理 5 $N \subset M$ を III_0 型 subfactor とする. α が $N \subset M$ の non-strongly free automorphism なら, ある $N \subset M$ の既約な modular endomorphism ρ が存在して, $[\alpha \circ \rho] \in \Delta$ となる事である.

定理 5 では III_0 型の時のみ書いてあるが, $\lambda \neq 0$ の場合は既約な modular endomorphism は全て automorphism なので, この場合は上の定理は幸崎の定理となる.

また III_0 型の場合は定理に現れる ρ が本当に automorphism でない endomorphism となる例が存在する. この例については本稿末で説明する. よって今の所 $\lambda \neq 0$ の場合の様に non-strongly free automorphism を綺麗に書き表す事はできない. が, subfactor の構造が特殊な場合には以下の系が成立する.

系 6 $N \subset M$ を III_0 型 subfactor とする. $N \subset M$ が (1) $[M : N] < 4$, 若しくは, (2) II 型グラフと III 型グラフが同じなら non-strongly free automorphism は non-strongly outer automorphism と extended modular automorphism の合成で書ける.

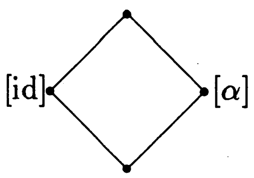
上の系の証明には, 泉による III 型グラフと II 型グラフの関係の modular endomorphism を使った特徴付け [4, Theorem 3.6] と, index が 4 未満の III_0 型 subfactor で II 型グラフと III 型グラフが異なるものは基本的には [6] で幸崎-佐野によって構成された物しかない, という事実を使う.

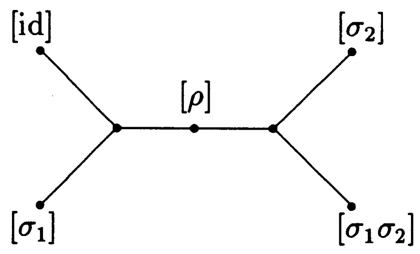
以下定理 5 の証明の概略を説明するが, それを理解するためにまず III_1 型 subfactor に関する [5] での幸崎の議論を説明する. α を non-strongly free automorphism とすると, $0 \neq a \in \tilde{M}_k$ が存在して $xa = a\tilde{\alpha}(x)$ が任意の $x \in \tilde{M}$ について成立する. $H_\alpha := \{a \in \tilde{M}_k \mid xa = a\tilde{\alpha}(x)$ が全ての $x \in \tilde{M}$について成立$\}$ とおく. H_α は自然な内積により有限次元ヒルベルト空間であるが $\theta_t\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}\theta_t$ により θ_t は H_α の 1 径数ユニタリ群として作用する. そこでこのユニタリの固有ベクトル a をとってくる. すると $s \in \mathbf{R}$ があって $\theta_t(a) = e^{ist}a$ が成立する. ここで $b := a\lambda_s$ とおくと $\theta_t(b) = \theta_t(a)\theta_t(\lambda_s) = e^{ist}ae^{-ist}\lambda_s = a\lambda_s = b$ となり $b \in M_k$ となる. また $x \in M$ について $b\sigma^\varphi_{-s}\alpha(x) = a\lambda_s \mathrm{Ad}\,\lambda_{-s}\tilde{\alpha}(x) = a\tilde{\alpha}(x)\lambda_s = xa\lambda_s = xb$ となるので $\sigma^\varphi_{-s}\alpha$ は non-strongly outer である事がわかり, 幸崎の定理を得る. $0 < \lambda < 1$ の場合もまず α の Connes-Takesaki module が自明になる事を示してから, 離散接合積分解を使って同様の議論で証明する.

III_0 型の場合の証明の概略を説明する. この場合も議論の本筋は上の幸崎の議論と同じである. $(X, \nu, \mathcal{F})$ を M の flow of weights とし, $\int_X^\oplus(\tilde{N}(w) \subset \tilde{M}(w))d\nu(w)$ を $\tilde{N} \subset \tilde{M}$ の中心分解とする. この中心分解に応じて $\theta_t(a)(\mathcal{F}_tw) = \theta_{(t,w)}(a(w))$ と分解される. $\theta_{(t,w)}$ は $\tilde{M}(w)$ から $\tilde{M}(\mathcal{F}_tw)$ への自己同型写像となる. α を non-strongly free automorphism とすると α の Connes-Takesaki module は自明な事が判り, 同様に分解すると $\tilde{\alpha}_w \in \mathrm{Aut}\,(\tilde{M}(w), \tilde{N}(w))$ を得る. ここで α が non-strongly free である事より, $0 \neq a \in \tilde{M}_k$ が存在して $xa = a\tilde{\alpha}(x)$

が全ての $x \in \tilde{M}$ について成立する．これから a.e.w に関して $x(w)a(w) = a(w)\tilde{\alpha}_w(x(w))$ を得る．ここで $H_w := \{a \in \tilde{M}_k(w) \mid xa = a\tilde{\alpha}_w(x)$ が全ての $x \in \tilde{M}(w)$ について成立 $\}$ と置くとこれは有限次元 Hilbert 空間で a.e. w に関し $n := \dim H_w$ は同じである．また $\theta_t\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}\theta_t$ である事より $\theta_{(t,w)}$ は H_w から $H_{\mathcal{F}_t w}$ へのユニタリ写像となる．ここで H_w の基底を一つ固定し $\{a_i(w)\}_{i=1}^n$ とおく．($\lambda \neq 0$ の場合は適当な固有ベクトルをとる事が出来たが今の場合はそのような事はできない.) $\theta_{(t,w)}(a_j(w)) = \sum_i a_i(\mathcal{F}_t w)c_{ij}(t,w)$ と表わすと $(c_{ij}(t,w)) \in U(n)$ であり，$\theta_{(t,\mathcal{F}_s w)}\theta_{(s,w)} = \theta_{t+s,w}$ である事からコサイクル等式 $c_{ij}(t+s,w) = \sum_k c_{ik}(t,\mathcal{F}_s w)c_{kj}(s,w)$ が成立する．$(c_{ij,t}) \in U(n, Z(\tilde{M}))$ を $c_{ij,t}(w) := c_{ij}(t,\mathcal{F}_{-t}w)$ と定めると上のコサイクル等式より $c_t := (c_{ij,t}) \in Z^1_\theta(\mathbf{R}, U(n, Z(\tilde{M})))$ である事が判る．ここで c に対応する modular endomorphism を ρ_c とし，その canonical extension が $\tilde{\rho}_c = \sum_{i=1}^n v_i x v_i^*$ となったとする．$c_{ij,t} = v_i^*\theta_t(v_j)$ となるとしても良い．$a_i := \int_X^\oplus a_i(w)d\nu(w)$ とおくと $\theta_t(a_j) = \sum_i a_i c_{ij,t}$ である事より，$\theta_t(\sum_j a_j v_j^*) = \sum_{i,j} a_i c_{ij,t}\theta_t(v_j) = \sum_{i,j} a_i v_i^*\theta_t(v_j v_j^*) = \sum_j a_j v_j^*$ となり，$b := \sum_i a_i v_i^* \in M_k$ となる．また $v_i^*\tilde{\rho}_c(x) = xv_i^*$ なので，$b\rho_c\alpha(x) = xb$ である事が III$_1$ 型の場合と同様に確かめられる．後は [5] と同様に $[\rho_c\alpha] \in \Delta$ である事が示される．

最後に定理 5 で automorphism でない modular endomorphism が出てくる例を挙げておく．$N \subset M$ を III$_0$ 型 subfactor で III 型グラフが $D_6^{(1)}$, II 型グラフが $A_3^{(1)}$ となる物をとってくる．($\lambda \neq 0$ ではこのような subfactor を構成する事は出来ないが $\lambda = 0$ の時には構成する事ができる．これは任意のコンパクト群が, Zimmer の意味でのコサイクルの minimal group としてとれる事と関係している.)





上の principal graph で α は outer period 2 の automorphism である．また下のグラフで σ_1, σ_2 は可換な period 2 の extended modular automorphism であり, 4 つの頂点に現れる automorphism が $N \subset M$ の non-strongly outer automorphism の全てである．一方で α の inner perturbation をうまくとると α を Aut(M, N) の元に拡張する事ができる．この時 α が II 型グラフに現れる事から，α は non-strongly free である事がわかり，かつ $[\alpha\rho_c] = [\rho]$ となるような modular endomorphism ρ_c が存在する．明らかにこの ρ_c は既約である．さらに α が non-strongly outer automorphism と extended modular automorphism の合成で表わせない事も明らかである．

参考文献

[1] Choda, M. and Kosaki, H., *Strongly outer actions for an inclusion of factors*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 315–332.

[2] Haagerup, U. and Størmer, E., *Equivalence of normal states on von neumann algebras and the flow of weights*, Adv. Math. **83** (1990), 180–262.

[3] Haagerup, U. and Størmer, E., *Pointwise inner automorphisms on von neumann algebras*, J. Funct. Anal. **92** (1990), 177–201.

[4] Izumi, M., *Canonical extension of endomorphisms on factors*, Subfactors (Araki, H. et al., eds.), World Scientific, (1994), 129–138.

[5] Kosaki, H., *Sector theory and automorphisms for factor-subfactor pairs*, J. Math. Soc. Japan **48** (1996), 427–454.

[6] Kosaki, H. and Sano, T., *Non-splitting inclusions of factors of type* III_0, Pac. J. Math. **178** (1997), 95–125.

[7] Popa, S., *Classification actions of dicrete amenable groups on subfactors of type II*, preprint, (1992).

[8] Winløw, C., *Strongly free actions on subfactors*, Internat. J. Math **4** (1993), 675–688.