

正方形流路内に発生する熱対流の3次元化

鳥取大・工学部応用数理工学科 加藤由紀 (Yuki Kato)

鳥取大・工学部応用数理工学科 藤村 薫 (Kaoru Fujimura)

Department of Applied Mathematics and Physics, Tottori University

概要

下面を加熱し上面を冷却した正方形断面の流路に吹き抜け流を流すと、レイノルズ数とレイリー数がある臨界値以上では、縦ロールと呼ばれる流路方向に一様な2次元定常熱対流が発生する。この論文では、3次元非定常擾乱に対する縦ロールの線形安定性を、数値的に調べた。流路の側壁が完全熱伝導である場合、縦ロールの3次元非定常擾乱に対する不安定性は、3種類存在することがわかった。また、側壁が完全断熱の場合、5種類の不安定性によって縦ロールは不安定になるが、完全熱伝導条件の場合と比べると縦ロールの安定なパラメタ領域は広がることがわかった。

1 はじめに

矩形流路内の熱対流に吹き抜け流が加わった流れは、近年、熱CVD (Chemical Vapor Deposition) 炉との関連から注目されている [1]。炉内に生じる対流が2次元定常対流であるか3次元非定常対流であるかによって、熱CVDによって生成される薄膜が不均一になるか否かが左右されるからである [2]。このため、矩形流路内の2次元定常対流が3次元非定常対流へ遷移する過程を明らかにすることは、流体力学的観点から意義深いだけでなく、工学的にも重要である。

吹き抜け流の流速を適当に制御した実験では、レイノルズ数 Re がある臨界値より低くなったときに、2次元定常対流から3次元非定常対流への遷移が観察されている [3, 4]。我々は、このような3次元非定常化の過程を理論的に解明することを目指して、縦ロールと呼ばれる2次元定常熱対流の3次元非定常擾乱に対する安定性を解析してきた [5]。

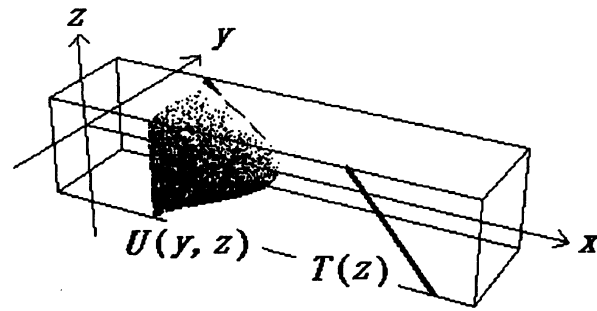


図 1: 吹き抜け流を伴った熱伝導状態.

ここで、縦ロールの定義とその発生条件について説明しておく。矩形流路の下面を加熱し上面を冷却すると、レイリー数 Ra が臨界値 $Ra(Re)$ を越えたときに、熱対流が発生する。このとき発生する対流モードは、レイノルズ数 Re がある臨界値 Re_* より低いときには横モードと呼ばれる 3 次元非定常対流である [6, 7]。一方、 Re が Re_* より高いときには、2 次元的な定常対流である [6, 7]。この 2 次元定常対流は、流路方向に軸を持つロール状の対流であり、これを縦ロールと呼ぶ。縦ロールの臨界レイリー数 Ra_c^L は Re には依存しない。そのため、 Ra_c^L の値は、流路方向の変化を無視して鉛直及びスパン方向のみを考慮した 2 次元的な箱の中の熱対流に対する臨界 Ra [8, 9, 10] と一致する。

我々はすでに、完全熱伝導側壁を持つ正方形流路に空気 (プラントル数 $Pr = 0.71$) を流す場合について、縦ロールの線形安定性を解析し、縦ロールが 3 種類の不安定性によって不安定になることを示した [5]。本論文の目的は、作動流体の種類及び流路側壁の境界条件の変化が縦ロールの安定特性に及ぼす影響を明らかにすることである。本論文では側壁の温度に対する境界条件として、完全熱伝導条件と完全断熱条件の 2 種類を考える。

2 支配方程式

水平に置いた無限に長い正方形断面の流路内で、ブシネスク流体の運動を考える。流路の下面を加熱、上面を冷却し、各々の温度を $T_0 \pm \Delta T/2$ に保つ。ここで、 T_0 は一定値の参照温度、 $\Delta T (> 0)$ は上下壁の温度差を表わす。流路の高さ d 、主流の最大流速 U_0 、上下壁の温度差 ΔT を用いて、変数を無次元化する。流路と平行に x 軸、流路のスパン方向に y 軸、鉛直上向きに z 軸をとる。主流として、吹き抜け流を伴う熱伝導状態を考えよう (図 1)。熱伝導状態の無次元温度は $T = T_0/(\Delta T) - z$

で与えられる。これは、エネルギー方程式の定常解であり、上下壁での等温条件および側壁における完全熱伝導/完全断熱条件を満たす。\$x\$ 方向の一様な吹き抜け流 $\mathbf{U} = (U(y, z), 0, 0)$ は、ポアソン方程式 $(\partial_{yy} + \partial_{zz})U = c$ と、上下壁、側壁での粘着条件を満たす。ここで、\$c\$ は流路方向の圧力勾配に比例する負の定数であり、速度 \$U\$ の最大値が 1 となるように定められる。我々は、ポアソン方程式を数値的に解くことによって、\$U\$ を得た。

主流に対する擾乱の圧力を \$p\$、速度を $\mathbf{u} = (u, v, w)$ 、そして温度を \$\theta\$ とおくと、これらは次式に従う。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial x} - w + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 \theta. \quad (1c)$$

レイノルズ数 \$Re\$、プラントル数 \$Pr\$、レイリー数 \$Ra\$ は、次式で定義される無次元パラメタであり、\$\mathbf{e}_z\$ は鉛直上向きの単位ベクトルである：

$$Re = \frac{U_0 d}{\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ra = \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\nu \kappa}.$$

ここで、\$\nu\$ は動粘性率、\$\kappa\$ は熱拡散率、\$\alpha\$ は体積膨張率、そして \$g\$ は重力加速度である。擾乱の速度に対する境界条件として、上下壁と側壁で粘着条件

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{at} \quad y = \pm \frac{1}{2}, z = \pm \frac{1}{2} \quad (2)$$

を課す。また、擾乱の温度に対する境界条件は、上下壁で

$$\theta = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (3)$$

となる。側壁においては、完全熱伝導条件

$$\theta = 0 \quad \text{at} \quad y = \pm \frac{1}{2} \quad (4)$$

または、完全断熱条件

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = \pm \frac{1}{2} \quad (5)$$

縦ロール解は、式(1)と境界条件(2), (3), (4) [または(5)] を満たす x 方向に一様な定常解である。縦ロールの圧力を \bar{p} , 速度を $\bar{\mathbf{u}} \equiv (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, 温度を $\bar{\theta}$ とし、縦ロール解の流れ関数 $\bar{\psi}$ を, $\bar{v} = \bar{\psi}_z / (PrRe)$, $\bar{w} = -\bar{\psi}_y / (PrRe)$ で定義する (下付きの添え字 z と y は, それぞれ, z と y についての偏微分を表す)。このとき, 式(1)から, 次式が得られる。

$$L^2 \bar{\phi} - Ra \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = \frac{1}{Pr} J(L\bar{\psi}, \bar{\psi}), \quad (6a)$$

$$L\bar{\theta} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = J(\bar{\theta}, \bar{\psi}). \quad (6b)$$

ここで, $L \equiv \partial_{yy} + \partial_{zz}$ は2次元ラプラシアン, J は次のように定義されたヤコビアンである: $J(\phi, \psi) = \phi_y \psi_z - \phi_z \psi_y$. 流れ関数に対する境界条件は, $y = \pm 1/2$ で $\bar{\psi} = \bar{\psi}_y = 0$, $z = \pm 1/2$ で $\bar{\psi} = \bar{\psi}_z = 0$ となる。流れ関数と温度は, 閉じた式(6)に支配され, したがって Re には依存しない。我々は, 与えられたレイリー数 Ra とプラントル数 Pr に対して式(6)を数值的に解き, 流れ関数 $\bar{\psi}$ と温度 $\bar{\theta}$ を得た。速度 $\bar{\mathbf{u}}$ と圧力 \bar{p} は, 流れ関数の定義と式(1)を用いて数值的に求めた。

縦ロールの線形安定性を調べるために, 縦ロール解に3次元無限小擾乱を加える。縦ロール解と擾乱の和を式(1)に代入し, 擾乱について線形化し, 擾乱をノーマルモード $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}) \exp[i(kx - \omega t)]$ の形におくと, ω を固有値とし振幅関数 $\phi \equiv (\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta})^T$ を固有関数とする線形固有値問題

$$A \phi = \omega B \phi \quad (7)$$

が得られる。ここで, 振幅関数 ϕ は y と z の関数である。線形演算子 A は, パラメタ Pr, Re, Ra と波数 k に加えて, 主流 U と縦ロール解 $(\bar{p}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta})$ を含む。また, 線形演算子 B は, 5×5 の単位行列の対角成分の1行目を0と置き換えたものである。

パラメタ Pr, Re, Ra を固定してある波数 k に対して(7)を解いた結果, ω の虚部が正ならば, その波数を持つ擾乱は時間とともに指数関数的に成長する。そのような波数を持つ擾乱があれば縦ロール解は不安定であり, そのような擾乱がなければ縦ロール解は無限小擾乱に対して安定であると判定する。 Re を固定したときの臨界 Ra と Ra を固定したときの臨界 Re は, $Re-Ra$ 平面内で, 縦ロールの安定境界を形作る。

主流の流速 U , 縦ロール解 $(\bar{p}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta})$, 固有値 ω および固有関数 ϕ を求める際には, スペクトル法を用いた。主流, 縦ロール, そして(7)の固有関数は, 境界条件

を満足するようなチェビシェフ多項式の線形結合で展開し、選点法を用いて展開係数を求めた。計算方法の詳細は紙面の都合上省略するが、展開関数の形、選点の取り方、固有値問題の解法など多くの部分は、文献 [11] で用いた方法と同じである。臨界 Re と臨界 Ra の相対誤差は、 Ra が高いほど大きくなる。これら臨界値の相対誤差は、おおむね数%程度であったが、 $Ra > 50000$ では10%に達した。

3 縦ロール解

熱伝導状態から縦ロール解が分岐する点の Ra の値 Ra_c^L は、 Pr と Re の値に依らない。分岐点は、完全熱伝導側壁の場合 $Ra_c^L = 5012$ 、完全断熱側壁の場合 $Ra_c^L = 2585$ である [8, 9, 10]。1次分岐解の縦ロールは、 $\bar{p}(-y, -z) = \bar{p}(y, z)$, $\bar{u}(-y, -z) = \bar{u}(y, z)$, $\bar{v}(-y, -z) = -\bar{v}(y, z)$, $\bar{w}(-y, -z) = -\bar{w}(y, z)$, $\bar{\theta}(-y, -z) = -\bar{\theta}(y, z)$ なる対称性を持つ。このような対称性を持つモードを反対称モードと呼ぶことにする。

数値的に求めた反対称モードの縦ロール解を図2に示す。図2(a)と(c)を比べるとわかるように、レイリー数の値が分岐点 $Ra_c^L = 5012$ を離れて高くなるにつれて、ロールは傾き、局所的に流線間隔の狭い、すなわち流速の速い部分が生じる。図2(e)と(f)は、それぞれ、完全断熱側壁の場合の流線と温度場である。完全断熱側壁の場合、縦ロールの温度(これは熱伝導状態からのずれである)は側壁 $y = \pm 1/2$ において一様でない。

Ra がさらに高くなると、図2に示したような1次分岐解は $k = 0$ を満足するような2次元擾乱に対して不安定になり、1次分岐解の枝から2次分岐解が分岐する [12]。この2次分岐解も2次元的であり(6)を満たす解であるが、もはや y - z 平面内でどのような対称性も持たない。この分岐点における Ra の値を Ra_2 と表すことにする。 Ra_2 の値は、側壁の境界条件のみならずプラントル数 Pr にも依存する。Mizushima と Adachi [12] は、完全熱伝導側壁で $Pr = 7$ のときに、 $Ra_2 = 37043$ を得た。我々は、数値計算コードのチェックのために、完全熱伝導側壁で $Pr = 7$ のときの Ra_2 の値を求めたが、その値は文献 [12] の値と有効数字5桁の精度で一致した。完全断熱側壁の場合の Ra_2 の値は、現在のところ知られていない。我々は、3次元擾乱に対する安定性解析の準備として2次元対流への分岐点 Ra_2 を探したが、分岐点の Ra は熱伝導側壁の場合と比べてきわめて高い値を持つため、現在のところ信頼できる値は得られていない。ただし、 10^6 より低い Ra においては、

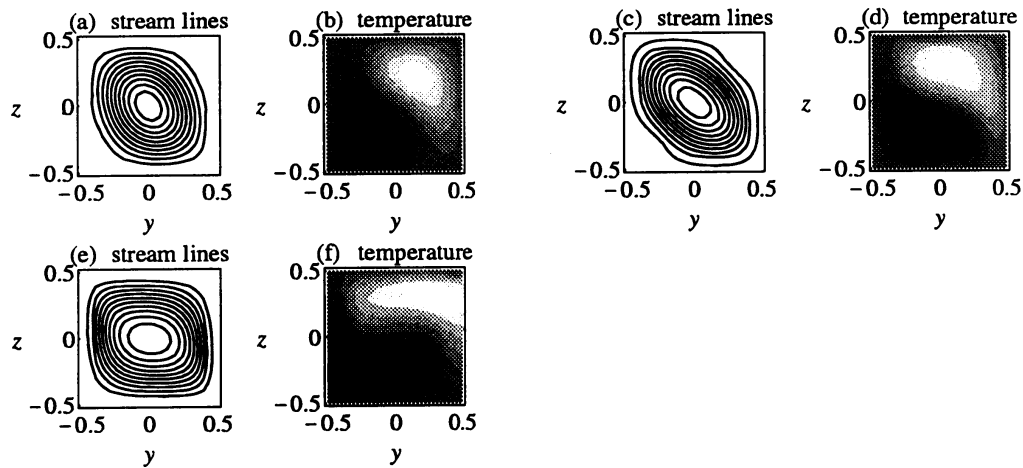


図 2: 縦ロールの流線と温度. 温度場 (b), (d), (f) は, 白い領域が低温, 黒い領域が高温を表す. (a)-(d) は完全熱伝導側壁, (e),(f) は完全断熱側壁の場合である. (a),(b) $Ra = 10000$, (c),(d) $Ra = 26000$, (e),(f) $Ra = 60000$. $Pr = 7$.

1 次分岐解は 2 次元擾乱に対して安定であることを確かめた. 本論文では, 安定性を調べる縦ロール解を反対称な 1 次分岐解に限定する.

4 縦ロール解の線形安定性

縦ロール解が反対称性を持っているので, 縦ロール解に加える無限小擾乱は反対称擾乱と対称擾乱に分けることができる. 反対称擾乱は, 縦ロール解と同じ対称性を持つ. 対称擾乱は $\hat{p}(-y, -z) = -\hat{p}(y, z)$, $\hat{u}(-y, -z) = -\hat{u}(y, z)$, $\hat{v}(-y, -z) = \hat{v}(y, z)$, $\hat{w}(-y, -z) = \hat{w}(y, z)$, $\hat{\theta}(-y, -z) = \hat{\theta}(y, z)$ なる対称性を持つ.

4.1 完全熱伝導側壁の場合の安定性

完全熱伝導条件 (4) の下で得られた $Pr = 0.71$ のときの縦ロール解の安定境界を図 3 に示す. 灰色で示したパラメタ領域で, 縦ロール解は 3 次元非定常の無限小擾乱に対して安定である.

実線 A は対称擾乱に対する臨界曲線である. この曲線は, Ra を下げていくと $Ra = Ra_c^L$ において, 図中に黒丸で示したクロスオーバー点 (Re_*, Ra_c^L) につながっている. クロスオーバー点とは, 線形安定性解析の範囲内で, 縦ロールと横モードが熱伝導状態を同時に不安定化する点のことである. クロスオーバー点を通る

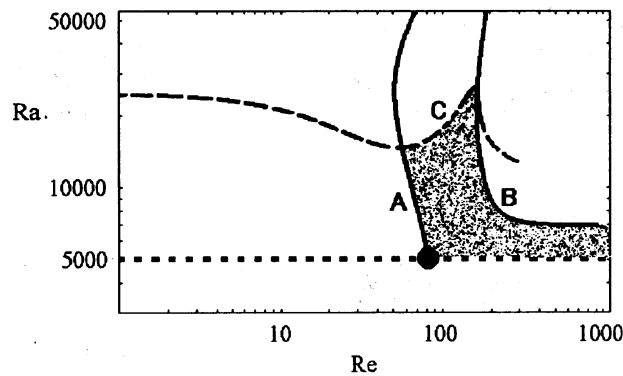


図 3: 完全熱伝導側壁の場合の縦ロールの安定境界. 点線は, 熱伝導解から縦ロール解が分岐する点 $Ra = Ra_c^L$ である. 灰色で示したパラメタ領域で, 縦ロール解は安定である. 実線は対称擾乱に対する臨界曲線, 破線は反対称擾乱に対する臨界曲線を表す. $Pr = 0.71$

臨界曲線 A よりもレイノルズ数の低い領域で起こる不安定性は, 線形の横モード [6, 7] に由来する不安定性である.

この不安定性によって生じる非定常流のパターンを考えてみる. 縦ロール解は, 図 2 に示したように反対称であり, x 軸方向には一様である. 一方, 臨界曲線 A 上の点における擾乱は縦ロール解とは異なり対称な空間構造を持つ. 臨界曲線 A 上の 1 点において臨界擾乱を縦ロール解に重ねた温度場を図 4(a) に示す. 縦ロールの上で対称擾乱が成長すると, ロールの軸が波打つことがわかる. この波は, 正の位相速度を持ち, 吹き抜け流と同じ方向に伝播する.

臨界曲線 B よりレイノルズ数の高い領域においても, 正の位相速度を持った対称擾乱が成長する. 図 4(b) に, 縦ロール解に擾乱を重ねた温度場を示した. 横モード由来の不安定と同じく, 縦ロールの軸が波打つことがわかる. ただし, この不安定の場合, 臨界波数が低いので, 縦ロールの受ける変調は x 方向にゆるやかなものとなる.

図 3 の破線 C は, 反対称擾乱に対する臨界曲線である. 吹き抜け流の流速が遅いとき ($Re \lesssim 0$) には, 臨界モードは負の位相速度を持つ. レイノルズ数が増加するにつれて臨界モードの位相速度は増加し, $Re = 29$ を越えると位相速度は正になる. 図 4(c) に, 破線 C 上の 1 点において縦ロール解に反対称擾乱を重ねた温度場を示した. 反対称擾乱が成長すると, 縦ロールが x 方向に周期的に強調されることがわかる.

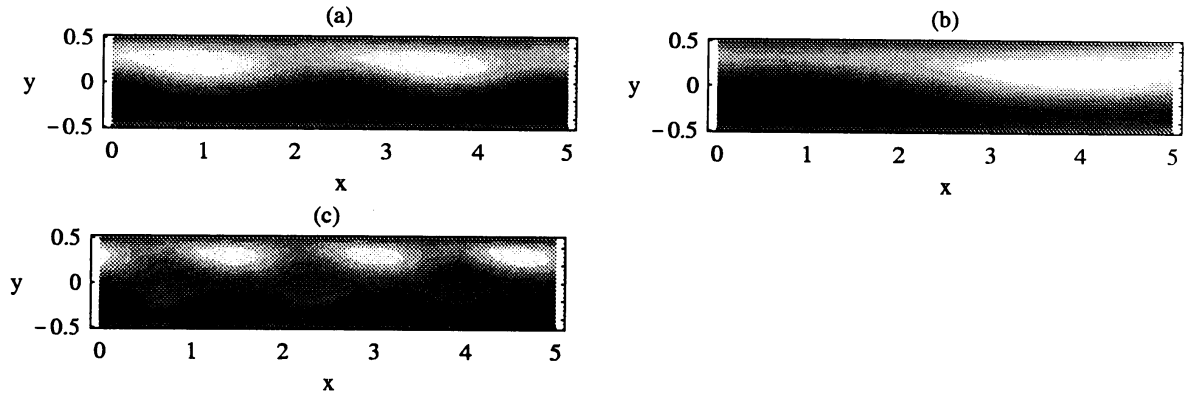


図 4: 縦ロールに擾乱を重ねた $z = 0$ における温度場. (a) $Ra = 6000$, $Re = 78$, (b) $Ra = 7000$, $Re = 463$, (c) $Ra = 20000$, $Re = 118$. 完全熱伝導側壁, $Pr = 0.71$.

次に, Pr を高くしたときの安定境界を図 5, 6 に示す. $Pr = 0.71$ における 3 種類の不安定性のうち, レイノルズ数の高いところ ($Re \gtrsim 200$) に存在した不安定性 (図 3 の曲線 B) は, $Pr = 7$ や 100 の場合は見出されなかった. そのため, Pr が高い場合には, 縦ロールの安定領域がレイノルズ数の高い領域まで広がる.

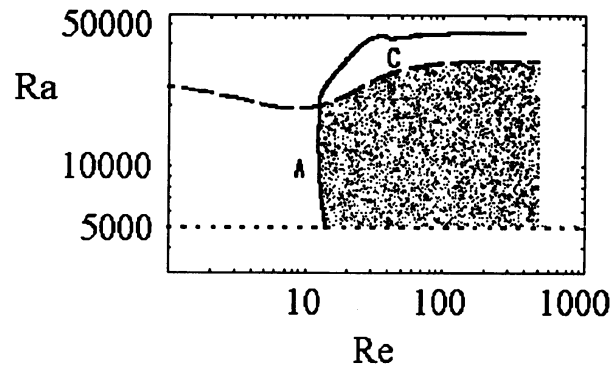


図 5: 図 3 に同じ. ただし, $Pr = 7$.

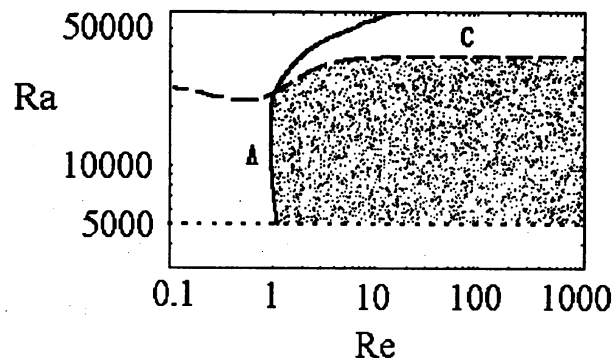


図 6: 図 3 に同じ. ただし, $Pr = 100$.

4.2 完全断熱側壁の場合の安定性

ここでは、縦ロールの安定性に対する温度の境界条件の影響を考える。まず、 $Pr = 0.71$ のときの完全断熱条件 (5) の下での安定境界を図7に示す。点線は、熱伝導状態から縦ロールが分岐する点 $Ra_c^L = 2585$ を表している。完全熱伝導側壁の場合の安定境界 (図3) と比べると、縦ロールの安定な領域が Re の低い領域まで広がるのがわかる。

断熱条件の場合、 $Pr = 0.71$ におけるクロスオーバー点は $(Re_*, Ra_c^L) = (16.6, 2585)$ である。この点から始まる臨界曲線 A の上では、 Ra が増加するにつれて Re が減少し、ある Ra において $Re = 0$ となる。 Re を一定に保ったまま、この臨界曲線を横切って Ra を減少させると、縦ロールは3次元非定常擾乱に対して不安定になる。このような3次元非定常化の過程は、現在のところ実験では確認されていないが、 Re と Ra を適切に制御した実験をすれば確認できるものと考えられる。臨界曲線 A 上の $Re = 0$ の点では、(有次元の) 周波数は0になる。つまり、この点は、吹き抜け流の存在しないときの、定常2次元対流から定常3次元対流への分岐点になっている。

対称擾乱に対する不安定性 (曲線 B) と反対称擾乱に対する不安定性 (曲線 C) は、それぞれ、完全熱伝導条件の下で見出された不安定性 B, C と同種のものであると考えている。

臨界曲線 D よりレイリー数が高いときにも、対称擾乱が成長するが、この不安定性は、完全熱伝導条件 (4) の下では見出されなかった新しい不安定性である。臨界曲線 D 上の $Re = 0$ の点において、擾乱の周波数は0になる。

Pr を高くすると、安定境界は図8, 9のように変化する。不安定 D と E は、いずれも対称擾乱によるものであるが、臨界モードの波数は異なっており、別の種類の不安定性と考えられる。 $Pr = 0.71$ から Pr を高くすると、不安定 D の臨界 Ra は増加し、 $Pr = 7$ では不安定 E の臨界 Ra よりも高くなる。さらに Pr を高くすると、不安定 D の臨界 Ra は減少し、不安定 E の臨界 Ra は増加する。その結果、 $Pr = 100$ では、再び不安定 D が現れる。

5 おわりに

本研究では、吹き抜け流の存在下で熱伝導解から分岐する反対称な縦ロール解について、その線形安定性を数値的に調べた。完全熱伝導側壁および完全断熱側壁の

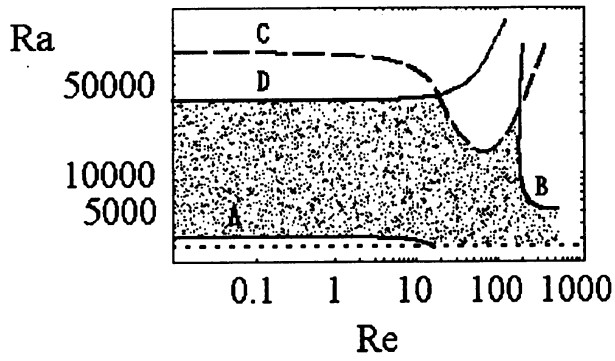


図 7: 完全断熱側壁の場合の縦ロールの安定境界. $Pr = 0.71$.

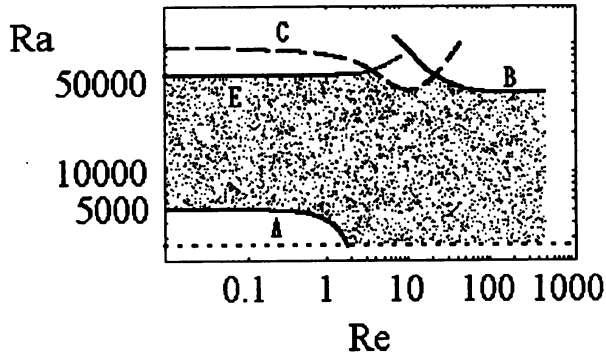


図 8: 図 7 に同じ. ただし, $Pr = 7$.

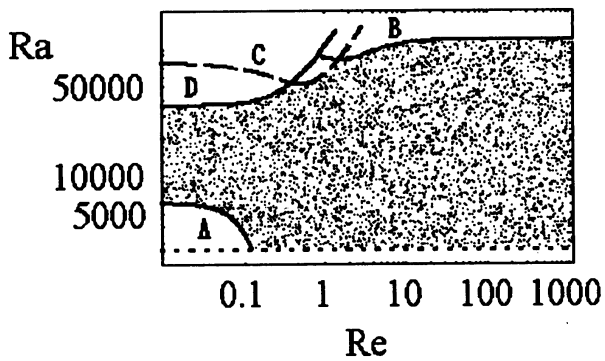


図 9: 図 7 に同じ. ただし, $Pr = 100$.

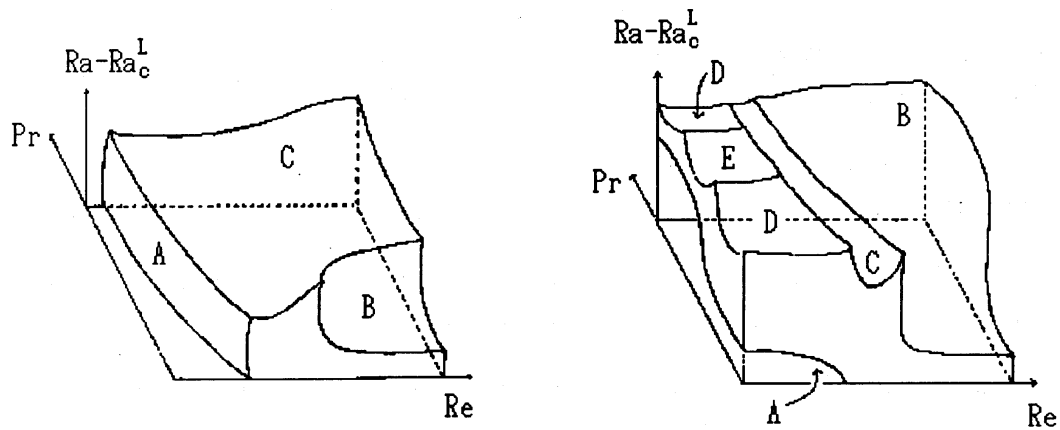


図 10: 安定境界の模式図. $(Re, Pr, Ra - Ra_c^L)$ 空間の直方体を 5 種類の不安定による臨界面で切りとって残った部分が, 縦ロールの安定な領域である. (左) 完全熱伝導側壁, (右) 完全断熱側壁.

場合について, $Pr = 0.71, 7, 100$ のときの, 3次元無限小擾乱に対する縦ロール解の安定境界を $Re-Ra$ 平面内で特定した. 得られた安定境界を $(Re, Pr, Ra - Ra_c^L)$ 空間上でまとめると, 図 10 のような模式図が得られるだろう. これらの模式図は, 3つの Pr の値での安定境界に基づいて描かれたことを注意しておく. Pr の値を連続的に変化させたときには, 安定境界の詳細な構造は図 10 とは異なってくるかもしれない.

5種類の不安定性が見出されたが, これらのなかでその発生機構がわかっているのは, 横モードに由来する不安定性 (A) のみである. 他の不安定性についての物理的な考察は, 残された課題である.

参考文献

- [1] K. F. Jensen, E. O. Einset and D. I. Fotiadis, "Flow phenomena in chemical vapor deposition of thin films", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **23**, (1991), pp.197-232.
- [2] G. Evans and R. Greif, "Unsteady three-dimensional mixed convection in a heated horizontal channel with applications to chemical vapor deposition", *Int. J. Heat Mass Transfer*, **34**, (1991), pp.2039-2051.
- [3] K. -C. Chiu and F. Rosenberger, "Mixed convection between horizontal plates — I. Entrance effects", *Int. J. Heat Mass Transfer*, **30**, (1987), pp.1645-1654.

- [4] T. A. Nyce, J. Ouazzani, A. Durand-Daubin and F. Rosenberger, "Mixed convection in a horizontal rectangular channel — experimental and numerical velocity distribution", *Int. J. Heat Mass Transfer*, **35**, (1992), pp.1481-1494.
- [5] 加藤由紀, 藤村薫, "正方形断面の流路内における非定常熱対流への遷移の予測", *ながれ*, **19**, (2000), pp.391-394.
- [6] J. K. Platten and J. C. Legros, "Chap. VIII Mixed convection in a one-component fluid", *Convection in Liquids*, Springer-Verlag, (1983), pp.556-564.
- [7] 山田純, 宮寄武, 細川巖, "下面加熱矩形ダクト内混合対流の線形不安定性解析", *ながれ*, **15**, (1996), pp.417-427.
- [8] J. M. Luijckx and J. K. Platten, "On the onset of Free convection in a rectangular channel", *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, **6**, (1981), pp.141-157.
- [9] N. Y. Lee, W. W. Schultz and J. P. Boyd, "Stability of fluid in a rectangular enclosure by spectral method", *Int. J. Heat Mass Transfer*, **32**, (1989), pp.513-520.
- [10] J. Mizushima, "Onset of the thermal convection in a finite two-dimensional box", *J. Phys. Soc. Jpn.*, **64**, (1995), pp.2420-2432.
- [11] Y. Kato and K. Fujimura, "Prediction of pattern selection due to an interaction between longitudinal rolls and transverse modes in a flow through a rectangular channel heated from below", *Phys. Rev. E*, **62**, (2000), pp.601-611.
- [12] J. Mizushima and T. Adachi, "Sequential transitions of the thermal convection in a square cavity", *J. Phys. Soc. Jpn.*, **66**, (1997), pp.79-90.