数理解析研究所講究録 1235 巻 2001 年 1-21

The existence of the solution of the initial value problem for the semilinear Schrödinger equation in Besov spaces

中央大学理工学研究科 田岡志婦
(Shifu Taoka, Chuo University)

1 定義と主な結果

Kenig-Ponce-Vega ([6]) は，Bourgain の Fourier restriction norm,

$$\|f\|_{X_{s,b}} = \|(1+|\tau-\xi^2|)^b(1+|\xi|)^s|\hat{f}(\xi,\tau)|\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{1.1}$$

($\hat{f}$ は f の Fourier 変換) を用いて，$s>-3/4$ のとき， 評価,

$$\|fg\|_{X_{s,b-1}} \leq c\|f\|_{X_{s,b}}\|g\|_{X_{s,b}}, \tag{1.2}$$
$$\|\bar{f}\bar{g}\|_{X_{s,b-1}} \leq c\|f\|_{X_{s,b}}\|g\|_{X_{s,b}}, \tag{1.3}$$

(ここで，$b>1/2$ とする)

を示して，初期値 $u(x,0)=u_0(x)\in H^s(\mathbb{R}), s>-3/4$ に対して，$N(u,\bar{u})=u^2$ または，$N(u,\bar{u})=\bar{u}^2$ のとき，半線型 Schrödinger 方程式

$$\partial_t u = i\partial_x^2 u + N(u,\bar{u}),\ x,t\in\mathbb{R}, \tag{1.4}$$

の時間局所解の存在を証明し，$s<-3/4$ のとき (1.2) と (1.3) は成立しないことを示した．
一方，Nakanishi-Takaoka-Tsutsumi ([8]) は $s=-3/4$ のとき (1.2) と (1.3) は成立しないことを示した．

この Sobolev 型ノルムに対応する Besov 型ノルムを用いるとさらによい結果が得られることがわかった．対応する Besov 型ノルムは次のように定義する:

定義 1 ρ を $\mathbb{R}_+$ 上の重みの関数, $b\in\mathbb{R}, 1\leq p\leq\infty, 1\leq q\leq\infty$, $P(\xi)$ を C^∞ 級実数値関数として，$f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$ に対して，

$$\|f\|_{B^{(\rho,b)}_{p,q,P}} := \|\{\rho(2^j)2^{bk}\|f_{jk}(x,t)\|_{L^p(R^{d+1})}\}\|_{\ell^q} \tag{1.5}$$

と定義し，空間 $B^{(\rho,b)}_{p,q,P}(\mathbb{R}^{d+1})$ をこのノルムが有限な $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ の全体と定義する．
特に，$\rho(t)=t^s$ のとき $B^{(s,b)}_{p,q,P}(\mathbb{R}^{d+1})$ と書く．
ただし，$\hat{f}_{jk}(\xi,\tau)=\varphi_j(|\xi|)\varphi_k(\tau-P(\xi))\hat{f}(\xi,\tau))$ で，$\varphi_j(z), j=0,1,\cdots$ は次をみたす $z\in\mathbb{R}$ の C^∞ 級関数である．

$$\varphi_j(z)=\varphi_j(-z), \mathrm{supp}\varphi_0\subset\{z;|z|<2\}, \mathrm{supp}\varphi_1\subset\{z;1<|z|<4\},$$
$$\varphi_k(z)=\varphi_1(2^{-k+1}z), (\mathit{for}\ ), k\ge 1\ \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(z)=1.$$

また，ℓ^q は (j,k) を添字とする数列についての ℓ^q 空間である．

容易に次の二つの定理が分かる：

定理 1 任意の α とある c_α に対して，$|\partial_\xi^\alpha P(\xi)|\le c_\alpha(1+|\xi|)^{\nu-|\alpha|}$ が成り立つような実数 $\nu\ge 1$ が存在すると仮定すると，$B^{(\rho,b)}_{p,q,P}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$ は *Banach* 空間で，$p<\infty, q<\infty$ であれば $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ は $B^{(\rho,b)}_{p,q,P}(\mathbb{R}^{d+1})$ の稠密部分集合である．

定理 2 $B^{(\rho,1/2)}_{2,1,P(\xi)}(\mathbb{R}^{d+1})\subset C(\mathbb{R};B^{\rho}_{2,1}(\mathbb{R}^d))$.
t_0 について $\|f(\cdot,t_0)\|_{B^{\rho}_{2,1}(\mathbb{R}^d)}\le\|f\|_{B^{(\rho,1/2)}_{2,1,P(\xi)}(\mathbb{R}^{d+1})}$.

定理 3 $-3/4\le s<0$, $\rho(t)=\log(2+t)t^s$, $P(\xi)=\xi^2$ または $-\xi^2$, Q は P または $-P$ とすると，次の評価が成り立つ．ただし，$b>1/2$, $s'>-3/4$.

$$\text{(1.6)}\qquad \|fg\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}}\ \le\ c\|f\|_{B^{(\rho,1/2)}_{2,1,Q}}\|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,Q}},$$
$$\text{(1.7)}\qquad \|fg\|_{B^{(s,-1/2)}_{2,1,P}}\ \le\ c\|f\|_{B^{(s',1/2)}_{2,1,Q}}\|g\|_{B^{(s',1/2)}_{2,1,Q}},$$
$$\text{(1.8)}\qquad \|fg\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}}\ \le\ c\{\|f\|_{B^{(s,b)}_{2,1,Q}}\|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,Q}}+\|f\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,Q}}\|g\|_{B^{(s,b)}_{2,1,Q}}\},$$

$P(-\xi)=P(\xi)$ のとき，定義からただちに $\|\bar{f}\|_{B^{(\rho,1/2)}_{2,1,P}}=\|f\|_{B^{(\rho,1/2)}_{2,1,-P}}$ がわかるから，

定理 4 $P(\xi)=\pm\xi^2$, $\rho(t)=\log(2+t)t^{-3/4}$ とすると，

$$\text{(1.9)}\qquad \|c_1fg+c_2\bar{f}\bar{g}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}}\le\left\{\begin{array}{c} c\|f\|_{B^{(\rho,1/2)}_{2,1,P}}\|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}}, \\ c\{\|f\|_{B^{(s,b)}_{2,1,P}}\|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}}+\|f\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}}\|g\|_{B^{(s,b)}_{2,1,P}}\}, \end{array}\right.$$

が成り立つ．ただし，$b>1/2$ とする．

定理 5 ρ を $\mathbb{R}_+$ 上の重みの関数，$b\in\mathbb{R}, P(\xi)$ を 実数値 C^∞ 関数とし，$W(t)$ を $W(t)f(x):=\mathcal{F}_x^{-1}e^{itP(\xi)}\mathcal{F}_xf(x,t)$ と定義する．

(a) $u_0 \in B^{\rho}_{2,1}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in B^{b}_{2,1}(\mathbb{R})$ とすると, $\psi(t)W(t)u_0 \in B^{(\rho,b)}_{2,1,P}(\mathbb{R}^{d+1})$ となり次の不等式が成り立つ:

$$\|\psi(t)W(t)u_0\|_{B^{(\rho,b)}_{2,1,P}(\mathbb{R}^{d+1})} \le \|u_0\|_{B^{\rho}_{2,1}(\mathbb{R}^d)}\|\psi\|_{B^{b}_{2,1}(\mathbb{R})}. \tag{1.10}$$

(b) $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とすると, $b \ge 1/2$ のとき,

$$\|\psi(t)\int_0^t W(t-t')f(x,t')dt'\|_{B^{(\rho,b)}_{2,1,P}(\mathbb{R}^{d+1})} \le c\|f\|_{B^{(\rho,b-1)}_{2,1,P}(\mathbb{R}^{d+1})} \tag{1.11}$$

が成り立つ. ただし, c は f に独立な定数である.

定理 6 p を正の整数, $s \le 0$, $\delta = 2^{-p}$ とすると,

$$\|f(\delta x)\|_{B^{s}_{2,1}(\mathbb{R}^d)} \le \delta^{s-d/2}\|f\|_{B^{s}_{2,1}(\mathbb{R}^d)} \tag{1.12}$$

が成り立つ.

主定理
$N(u,\bar{u}) = c_1u^2 + c_2\bar{u}^2$, $u(x,0) = u_0(x) \in B^{-3/4}_{2,1}(\mathbb{R})$ と仮定すると, $|t| \le T$ で方程式 *(1.4)* を満たす $T = T(\|u_0\|_{B^{-3/4}_{2,1}(\mathbb{R})})$ と $u(x,t) \in B^{(-3/4,1/2)}_{2,1,-\xi^2}(\mathbb{R}^2)$ が存在する.

2 積分作用素のノルム

積分作用素の有界性を示すには次の補題が便利である:

補題 2.1 (Ω_j, μ_j), $j = 1,2$, を σ-有界測度空間とし, $1 \le p \le q \le \infty$, X と Y を *Bansch* 空間とする. $1/p + 1/p' = 1$ にとる. ($p = 1$ のときは $p' = \infty$, $p = \infty$ のときには $p' = 1$ とする). $K(x,y)$ を 積測度空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 上の $\mathcal{L}(X,Y)$-値強可測関数とし, 非負値可測関数 $H_1(x,y)$ と $H_2(x,y)$ で,

$$\|K(x,y)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le H_1(x,y)H_2(x,y), \tag{2.1}$$

$$\operatorname*{ess.\,sup}_{y\in\Omega_2} \|H_1(x,y)\|_{L^q(\Omega_1,\mu_1)} = C_1 < \infty \tag{2.2}$$

$$\operatorname*{ess.\,sup}_{x\in\Omega_1} \|H_2(x,y)\|_{L^{p'}(\Omega_2,\mu_2)} = C_2 < \infty \tag{2.3}$$

を満たす H_1 と H_2 が存在すると仮定する. このとき, 積分作用素

$$Tf(x) = \int_{\Omega_2} K(x,y)f(y)d\mu_2(y) \tag{2.4}$$

は $L^p(\Omega_2,\mu_2;X)$ から $L^q(\Omega_1,\mu_1;Y)$ への有界作用素で, そのノルムは C_1C_2 を越え

証明. [1] Theorem 6.3 (p. 239), [7] p. 38 を参照.

補題 2.2

$$\| \iint H(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\hat{f}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\hat{g}(\xi_1,\tau_1)d\xi_1 d\tau_1\|_{L^2} \le C\|\hat{f}\|_{L^2}\|\hat{g}\|_{L^2}$$

ただし, C は,
$C_1 = \sup_{\xi_1,\tau_1}(\int |H(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)|^2 d\xi d\tau)^{1/2}$, $C_2 = \sup_{\xi,\tau}(\int |H(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1)^{1/2}$ のどちらでもよい.

証明. $H_1(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) = H(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)$, $H_2(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) = \hat{f}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)$ にとり, 補題 2.1 を使うと, $C_1\|\hat{f}\|_{L^2}\|\hat{g}\|_{L^2}$ で評価でき, $H_1(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) = \hat{g}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)$, $H_2(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) = H(\xi,\tau,\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)$ にとり, 補題 2.1 を使うと, $C_2\|\hat{f}\|_{L^2}\|\hat{g}\|_{L^2}$ で評価できる.

3 いくつかの補題

C^∞ 実数値関数 P と $f \in \mathcal{S}'$ に対して, $\varphi_{jk,P}(\xi,\tau) := \varphi_j(\xi)\varphi_k(\tau - P(\xi))$, $\hat{f}_{jk,P}(\xi,\tau) := \varphi_{jk,P}(\xi,\tau)\hat{f}(\xi,\tau)$ と書くことにする.

補題 3.1 P, Q, R : C^∞ 実数値関数 とすると,

$$\|f_{jk,P}g_{\ell m,Q}\|_{L^2} \le c2^{(k\wedge m+j\wedge\ell)/2}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\|g_{\ell m,Q}\|_{L^2}, \tag{3.1}$$

$$\|\varphi_h(\xi)\hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,Q}\|_{L^2} \le c2^{(h+k\wedge m)/2}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\|g_{\ell m,Q}\|_{L^2}, \tag{3.2}$$

$$\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,Q} * \hat{g}_{\ell m,R}\|_{L^2} \le c2^{(h+n)/2}\|f_{jk,Q}\|_{L^2}\|g_{\ell m,R}\|_{L^2}, \tag{3.3}$$

ただし, $j \wedge \ell = \min\{j,\ell\}$.

証明. γ_j を $j > 0$ のときは, $[2^{j-1}, 2^{j+1}] \cup [-2^{j+1}, -2^{j-1}]$ の定義関数, γ_0 は $[-2,2]$ の定義関数とする.

$$H_{P,Q}(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) = \gamma_j(\xi_1)\gamma_\ell(\xi-\xi_1)\gamma_k(\tau_1 - P(\xi_1))\gamma_m(\tau-\tau_1-Q(\xi-\xi_1)). \tag{3.4}$$

とおくと,

(3.5)
$$\hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,Q}(\xi,\tau) = \iint H_{P,Q}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)\hat{g}_{\ell m,Q}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\hat{f}_{jk,P}(\xi_1,\tau_1)d\xi_1 d\tau_1.$$

であるから，不等式

$$\begin{aligned}
\iint |H_{P,Q}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 &\leq \int \gamma_\ell(\xi-\xi_1)d\xi_1 \int \gamma_m(\tau-\tau_1-Q(\xi-\xi_1))d\tau_1 \\
&\leq 2^{\ell+m+4} \\
\iint |H_{P,Q}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 &\leq \int \gamma_j(\xi_1)d\xi_1 \int \gamma_m(\tau-\tau_1-Q(\xi-\xi_1))d\tau_1 \\
&\leq 2^{j+m+4}
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，このことと 補題 2.2 より，

$$\|f_{jk,P}g_{\ell m,Q}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\|\hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,Q}\|_{L^2} \leq c2^{(m+j\wedge\ell)/2}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\|g_{\ell m,Q}\|_{L^2}.$$

が成り立ち，また，$f_{jk,P}g_{\ell m,Q} = g_{\ell m,Q}f_{jk,P}$ であるから，
$\|f_{jk,P}g_{\ell m,Q}\|_{L^2} \leq c2^{(k+j\wedge\ell)/2}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\|g_{\ell m,Q}\|_{L^2}$ も得られ，(3.1) がわかった．

同様に，

$$\begin{aligned}
\iint |\varphi_h(\xi,\tau)H_{P,\pm Q}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)|^2 d\xi d\tau &\leq \int |\varphi_h(\xi)|^2\gamma_m(\tau-\tau_1-Q(\xi-\xi_1))d\xi d\tau \\
&\leq 2^{h+m+2},
\end{aligned}$$

から，(3.2) が成り立ち，(3.3) もまた，

$$\iint |\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)H_{Q,R}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)|^2 d\xi d\tau \leq \int |\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)|^2 d\xi d\tau \leq 2^{n+h+2},$$

$$\iint |\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)H_{Q,R}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)|^2 d\xi d\tau \leq \int |\varphi_n(\tau-P(\xi))\gamma_\ell(\xi-\xi_1)|^2 d\xi d\tau \leq 2^{n+\ell+2},$$

および，$\hat{f}_{jk} * \hat{g}_{\ell m} = \hat{g}_{jk} * \hat{f}_{\ell m}$ によって得られる．

補題 3.2 $P(\xi) = \pm\xi^2$ とすると，

$$\|f_{jk,P}g_{\ell m,P}\|_{L^2} \leq c2^{(k\wedge m/2)+(k\vee m/4)}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\|g_{\ell m,P}\|_{L^2}. \tag{3.6}$$

ここで，$j\vee\ell = \max\{j,\ell\}$ とする．

$|j-\ell| \geq 3$ と仮定すると，

$$\|f_{jk,P}g_{\ell m,P}\|_{L^2} \leq c2^{(k+m-j\vee\ell)/2}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\|g_{\ell m,P}\|_{L^2}. \tag{3.7}$$

証明．(3.4) で定義した $H_{P,Q}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)$ に対して $Q = P$ としても，(3.5) が成り立つ．

$\sigma_1 = \tau_1 - P(\xi_1)$ とおき，

$$\eta_1 = \tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi-\xi_1) \tag{3.8}$$

と変数変換する．$\left|\dfrac{d\eta_1}{d\xi_1}\right| = |2\xi - 4\xi_1|$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\int \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1))d\xi_1 \\
&\leq \int_{|\xi_1 - \xi/2| < 2^{m/2-1}} d\xi_1 + \int_{|\xi_1 - \xi/2| \geq 2^{m/2-1}} \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1))d\xi_1 \\
&\leq 2^{m/2} + 2^{-m/2-1} \int \gamma_m(\eta_1)d\eta_1 \\
&\leq 2^{m/2} + 2^{-m/2+m} = 2^{m/2+1}
\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
\iint |H_{P,P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 &\leq \int \gamma_k(\sigma_1)d\sigma_1 \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1))d\xi_1 \\
&\leq c2^{k+m/2}
\end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned}
&\iint |H_{P,P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \\
&\leq \int_{|\xi_1 - \xi/2| < 2^{k/2-1}} d\xi_1 \int \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1))d\sigma_1 \\
&\quad + \int \gamma_k(\sigma_1)d\sigma_1 \int_{|\xi_1 - \xi/2| \geq 2^{k/2-1}} \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1))d\xi_1 \\
&\leq 2^{k/2+m+1} + 2^{-k/2} \int \gamma_k(\sigma_1)d\sigma_1 \int \gamma_m(\eta_1)d\eta_1 \\
&\leq c2^{k/2+m}
\end{aligned}$$

を得る．従って，補題 2.2 より (3.6) が成り立つ．

次に，$|j - \ell| \geq 3$ と仮定する．$\gamma_j(\xi_1)\gamma_\ell(\xi - \xi_1) \neq 0$ のとき，$2^{j-1} < |\xi_1| < 2^{j+1}$，$2^{\ell-1} < |\xi - \xi_1| < 2^{\ell+1}$ であるから，

$$|2\xi - 4\xi_1| \geq \begin{cases} 2|\xi_1| - 2|\xi - \xi_1| > 2^j - 2^{\ell+2} \geq 2^{j-1} & (j \geq \ell + 3 \text{ のとき}), \\ 2|\xi - \xi_1| - 2|\xi_1| > 2^\ell - 2^{j+2} \geq 2^{\ell-1} & (\ell \geq j + 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．よって，変数変換 (3.8) をすると，$\left|\dfrac{d\eta_1}{d\xi_1}\right| = |2\xi - 4\xi_1| \geq 2^{j\vee\ell-1}$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\iint |H_{P,P}(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \\
&\leq \int d\sigma_1 \int |\varphi_h(\xi)\gamma_k(\sigma_1)\gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1))|d\xi_1 \\
&\leq 2^{-j\vee\ell} \int \gamma_k(\sigma_1)d\sigma_1 \int \gamma_m(\eta_1)d\eta_1 \leq 2^{k+m-j\vee\ell+4}
\end{aligned}$$

を得，(3.7) が証明できた．

補題 3.3 $P(\xi)=\pm\xi^2$, Q を C^∞ 実数値関数とする．

$$
\begin{aligned}
&(3.9)\quad \|\varphi_n(\tau-P(\xi))\hat{f}_{jk,Q}*\hat{g}_{\ell m,P}\|_{L^2} &\le\ & c2^{(n+m-j)/2}\|f_{jk,Q}\|_{L^2}\|g_{\ell m,P}\|_{L^2},\\
&(3.10)\,\|\varphi_n(\tau-P(\xi))\hat{f}_{jk,Q}*\hat{g}_{\ell m,-P}\|_{L^2} &\le\ & c2^{(m\wedge n/2)+(m\vee n/4)}\|f_{jk,Q}\|_{L^2}\|g_{\ell m,-P}\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

$|j-\ell|\ge 3$ と仮定すると，

$$
(3.11)\qquad \|\varphi_n(\tau-P(\xi))\hat{f}_{jk,Q}*\hat{g}_{\ell m,-P}\|_{L^2}\le c2^{(n+m-j\vee\ell)/2}\|f_{jk,Q}\|_{L^2}\|g_{\ell m,-P}\|_{L^2}.
$$

証明．$\sigma=\tau-P(\xi)$ とおき，$\eta=\sigma-\tau_1+P(\xi)-P(\xi-\xi_1)$ と変数変換すると，$\left|\dfrac{d\eta}{d\xi}\right|=|2\xi_1|$ であるから，

$$
\int\gamma_m(\sigma-\tau_1+P(\xi)-P(\xi-\xi_1))d\xi\le 2^{-j}\int\gamma_m(\eta)d\eta\le 2^{m-j+2}.
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
&\iint|\varphi_n(\tau-P(\xi))H_{Q,P}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)|^2d\xi d\tau\\
&\quad\le\int|\varphi_n(\sigma)|d\sigma\int|\gamma_m(\sigma-\tau_1+P(\xi)-P(\xi-\xi_1))|d\xi\le 2^{n+m-j+4}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．従って，(3.5) より (3.9) を得る．

次に，$\eta=\sigma-\tau_1+P(\xi)+P(\xi-\xi_1)$ とおく．$\left|\dfrac{d\eta}{d\xi}\right|=|4\xi-2\xi_1|$ であるから，

$$
\begin{aligned}
&\iint|\varphi_n(\tau-P(\xi))H_{Q,-P}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)|^2d\xi d\tau\\
&=\ \iint|\varphi_n(\sigma)|^2\gamma_m(\sigma-\tau_1+P(\xi)+P(\xi-\xi))d\xi d\sigma\\
&\le\ \int|\varphi_n(\sigma)|^2d\sigma\left\{\int_{|\xi-\xi_1/2|<2^{m/2-1}}d\xi\right.\\
&\qquad\left.+\int_{|\xi-\xi_1/2|\ge 2^{m/2-1}}\gamma_m(\sigma-\tau_1+P(\xi)+P(\xi-\xi_1))d\xi\right\}\\
&\le\ \int|\varphi_n(\sigma)|^2d\sigma\left\{2^{m/2}+2^{-m/2-1}\int\gamma_m(\eta)d\eta\right\}\\
&\le\ 2^{n+m/2+3}
\end{aligned}
$$

を得る．同様にして，

$$\begin{aligned}
&\iint |\varphi_n(\tau-P(\xi))H_{Q,-P}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)|^2 d\xi d\tau \\
\le\ & \int |\varphi_n(\sigma)|^2 d\sigma \int_{|\xi-\xi_1/2|<2^{n/2-1}} d\xi \int \gamma_m(\sigma-\tau_1+P(\xi)+P(\xi-\xi_1))d\sigma \\
&+\int |\varphi_n(\sigma)|^2 d\sigma \int_{|\xi-\xi_1/2|\ge 2^{n/2-1}} \gamma_m(\sigma-\tau_1+P(\xi)+P(\xi-\xi_1))d\xi \\
\le\ & 2^{m+n/2+3}
\end{aligned}$$

が成り立つので，(3.10) を得る．

(3.11) に関しても同様の議論をする．

$\gamma_j(\xi_1)\gamma_\ell(\xi-\xi_1)\neq 0$ のとき，

$|4\xi-2\xi_1|\ge 2|\xi_1|-4|\xi-\xi_1|>2^j-2^{\ell+3}=2^{j-1}$ ($j\ge\ell+4$ のとき),

$|4\xi-2\xi_1|\ge 4|\xi-\xi_1|-2|\xi_1|>2^{\ell+1}-2^{j+2}\ge 2^{\ell-1}$ ($\ell\ge j+4$ のとき)

であるので，変数変換 $\eta=\sigma-\tau_1+P(\xi)+P(\xi-\xi_1)$ をすると，

$|\dfrac{d\eta}{d\xi}|=|4\xi-2\xi_1|\ge 2^{j\vee\ell-1}$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\iint |\varphi_n(\tau-P(\xi))H_{Q,-P}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)|^2 d\xi d\tau \\
\le\ & \int d\sigma \int |\varphi_n(\sigma)|^2 \gamma_m(\sigma-\tau_1+P(\xi)+P(\xi-\xi_1))|d\xi \\
\le\ & 2^{-j\vee\ell+1}\int |\varphi_n(\sigma)|^2 d\sigma \int \gamma_m(\eta)d\eta \le 2^{n+m-j\vee\ell+5}.
\end{aligned}$$

である．よって，(3.11) を得る．

補題 3.4 $P(\xi)=\pm\xi^2$, Q を C^∞ 実数値関数とする．
$h\le j\vee\ell-3$ であれば，

(3.12) $$\|\varphi_h(\xi)\hat{f}_{jk,P}*\hat{g}_{\ell m,P}\|_{L^2} \le c2^{(k+m-j\vee\ell)/2}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\|g_{\ell m,P}\|_{L^2},$$

$h\le j\vee\ell-4$ であれば，

(3.13) $$\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,Q}*\hat{g}_{\ell m,-P}\|_{L^2}\le c2^{(n+m-j\vee\ell)/2}\|f_{jk,Q}\|_{L^2}\|g_{\ell m,-P}\|_{L^2}$$

が成り立つ．

証明．$\varphi_h(\xi)\gamma_j(\xi_1)\gamma_\ell(\xi-\xi_1)\neq 0$ のとき，$|\xi|<2^{h+1}, 2^{j-1}<|\xi_1|<2^{j+1}, 2^{\ell-1}$ $|\xi-\xi_1|<2^{\ell+1}$ であるから，

$j>\ell, h\le j-3$ のとき，$|2\xi-4\xi_1|\ge 4|\xi_1|-2|\xi|>2^{j+1}-2^{h+2}\ge 2^j$,

$j \leq \ell, h \leq \ell - 3$ のとき，$|2\xi - 4\xi_1| \geq 4|\xi - \xi_1| - 2|\xi| > 2^{\ell+1} - 2^{h+2} \geq 2^{\ell}$.
よって，変数変換 (3.8) をすると，$\left|\dfrac{d\eta_1}{d\xi_1}\right| = |2\xi - 4\xi_1| \geq 2^{j\vee\ell}$ となるので，

$$\begin{aligned}
&\iint |\varphi_h(\xi)H_{P,P}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \\
&\leq \int \gamma_k(\sigma_1)d\sigma_1 \int |\varphi_h(\xi)|^2 \gamma_m(\tau - \sigma_1 - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1))d\xi_1 \\
&\leq 2^{-j\vee\ell} \int \gamma_k(\sigma_1)d\sigma_1 \int \gamma_m(\eta_1)d\eta_1 \leq 2^{k+m-j\vee\ell+4}.
\end{aligned}$$

となり，(3.12) を得る．

次に (3.13) を示す．$\varphi_h(\xi)\gamma_j(\xi_1)\gamma_\ell(\xi - \xi_1) \neq 0$ のとき，$|\xi| < 2^{h+1}, 2^{j-1} < |\xi_1| < 2^{j+1}, 2^{\ell-1} < |\xi - \xi_1| < 2^{\ell+1}$. 従って，

$j > \ell, h \leq j - 4$ のとき，$|4\xi - 2\xi_1| \geq 2|\xi_1| - 4|\xi| > 2^j - 2^{h+3} \geq 2^{j-1}$,

$j \leq \ell, h \leq \ell - 4$ のとき，$|4\xi - 2\xi_1| \geq 2|\xi - \xi_1| - 2|\xi| > 2^{\ell} - 2^{h+2} \geq 2^{\ell-1}$.

$\eta = \sigma - \tau_1 + P(\xi) + P(\xi - \xi_1)$ と変数変換すると，$\left|\dfrac{d\eta}{d\xi}\right| = |4\xi - 2\xi_1| \geq 2^{j\vee\ell-1}$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\iint |\varphi_h(\xi)\varphi_n(\tau - P(\xi))H_{Q,-P}(\xi,\xi_1,\tau,\tau_1)|^2 d\xi d\tau \\
&\leq \int d\sigma \int |\varphi_h(\xi)|^2 \varphi_n(\sigma)\gamma_m(\sigma - \tau_1 + P(\xi) + P(\xi - \xi_1))d\xi \\
&\leq 2^{-j\vee\ell+1} \int \gamma_n(\sigma)d\sigma \int \gamma_m(\eta)d\eta \leq 2^{n+m-j\vee\ell+5}.
\end{aligned}$$

よって，(3.13) が成り立つ．

4　定理 3 の証明

$\varphi_{hn,P}(\xi,\tau) := \varphi_h(\xi)\varphi_n(\tau - P(\xi))$, $\hat{f}_{jk,Q}(\xi,\tau) := \varphi_{jk,Q}(\xi,\tau)\hat{f}(\xi,\tau)$ と書くことにし，$f = \sum_{j,k} f_{jk,Q}$, $g = \sum_{\ell,m} g_{\ell m,Q}$ であることに注意すると，

$$fg = \sum_{j,k,\ell,m} f_{jk,Q}\,g_{\ell m,Q}, \tag{4.1}$$

である．

まず次の 補題 が成り立つ:

補題 4.1 P, Q を実数値 C^∞ 関数とする．

$\|\varphi_h(\xi)\hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,Q}(\xi,\tau)\|_{L^2} \neq 0$ であれば, $h \leq j \vee \ell + 2$ である．

さらに, $|j - \ell| \geq 3$ であれば，$h \geq j \vee \ell - 2$ であり，$h \leq j \vee \ell - 3$ であれば，$|j - \ell| \leq 2$ である．

証明. $\|\varphi_h(\xi)\hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,Q}(\xi,\tau)\|_{L^2} \neq 0$ であれば, $2^{h-1} < |\xi| < 2^{h+1}, 2^{j-1} < |\xi_1| < 2^{j+1}, 2^{\ell-1} < |\xi - \xi_1| < 2^{\ell+1}$ をみたす ξ と ξ_1 が存在する.
よって $2^{h-1} < |\xi| \le |\xi_1| + |\xi - \xi_1| < 2^{j+1} + 2^{\ell+1} \le 2^{j\vee\ell+2}$ であり, これよりこのとき $h \le j \vee \ell + 2$ である.

$\ell \le j-3$ のとき, $2^{h+1} > |\xi| \ge |\xi_1| - |\xi - \xi_1| > 2^{j-1} - 2^{\ell+1} \ge 2^{j-2}$ で, このとき $h \ge j-2$ となる. 同様に考えると, $j \le \ell - 3$ のときは $h \ge \ell - 2$ である.

$h \le j-3, j \ge \ell$ と仮定すると,

$$2^{\ell+1} > |\xi - \xi_1| \ge |\xi_1| - |\xi| > 2^{j-1} - 2^{h+1} \ge 2^{j-2}$$

となり, よって $\ell \ge j-2$ である. 同様にして, もし $h \le \ell - 3, \ell \ge j$ であれば, $j \ge \ell - 2$ となる.

補題 4.2 $P(\xi) = \pm\xi^2$ とする. (a) $\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,P}(\xi,\tau)\|_{L^2} \neq 0$ と仮定すると, $n \le \max\{j+\ell+2, k, m\} + 2$,

$$n \ge \begin{cases} j+\ell-3 & \textit{if} \;\; k \vee m \le j+\ell-4, j>0, \ell>0 \\ k \vee m - 2 & \textit{if} \;\; |k-m| \ge 4, j+\ell+6 \le k \vee m, \end{cases} \tag{4.2}$$

である. (b) $\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,-P} * \hat{g}_{\ell m,-P}(\xi,\tau)\|_{L^2} \neq 0$ と仮定すると, $n \le \max\{2(j \vee \ell)+1, k, m\} + 5$,

$$n \ge \begin{cases} 2(j\vee\ell)-3 & \textit{if} \;\; k \vee m \le 2(j \vee \ell) - 4, \\ k \vee m - 2 & \textit{if} \;\; 2(j\vee\ell)+7 \le k \vee m, |k-m| \ge 5. \end{cases} \tag{4.3}$$

である.

Proof. Part (a). $\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,P} * \hat{g}_{\ell m,P}(\xi,\tau)\|_{L^2} \neq 0$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} 2^{h-1} &< |\xi| < 2^{h+1}, 2^{j-1} < |\xi_1| < 2^{j+1}, 2^{\ell-1} < |\xi-\xi_1| < 2^{\ell+1}, \\ 2^{n-1} &< |\sigma| < 2^{n+1}, 2^{k-1} < |\sigma_1| < 2^{k+1}, 2^{m-1} < |\sigma - \sigma_1 \pm 2\xi_1(\xi-\xi_1)| < 2^{m+1}, \end{aligned}$$

を満たす ξ, τ, ξ_1, τ_1 が存在する. ただし $\sigma = \tau - P(\xi), \sigma_1 = \tau_1 - P(\xi_1)$ とおく. ここで, 2 の指数が負のとき, 左辺は成り立たない.
$P(\xi) - P(\xi_1) - P(\xi - \xi_1) = \pm 2\xi_1(\xi - \xi_1)$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} 2^{n-1} &< |\sigma| \le |\sigma - \sigma_1 \pm 2\xi_1(\xi-\xi_1)| + |\sigma_1| + 2|\xi_1(\xi-\xi_1)| \\ &< 2^{m+1} + 2^{k+1} + 2^{j+\ell+3}, \end{aligned}$$

となり, よって $n \le \max\{j+\ell+2, k, m\} + 3$.

さらに $k \vee m \leq j+\ell-4, j>0, \ell>0$ と仮定すると，

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> |\sigma| \geq 2|\xi_1(\xi-\xi_1)| - |\sigma-\sigma_1 \pm 2(\xi_1(\xi-\xi_1)| - |\sigma_1| \\ &> 2^{j+\ell-1} - 2^{m+1} - 2^{k+1} \geq 2^{j+\ell-3}, \end{aligned}$$

となるので $n \geq j+\ell-3$ となる．$k \geq j+\ell+6, k \geq m+4$ と仮定すると，

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> |\sigma| \geq |\sigma_1| - |\sigma-\sigma_1 \pm 2\xi_1(\xi-\xi_1)| - 2|\xi_1(\xi-\xi_1)| \\ &> 2^{k-1} - 2^{m+1} - 2^{j+\ell+3} \geq 2^{k-2}, \end{aligned}$$

となるので $n \geq k-2$ となる．同様にすれば $m \geq j+\ell+6, m \geq k+4$ のときは $n \geq m-2$ であることがわかる．

(b). $\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,-P} * \hat{g}_{\ell m,-P}(\xi,\tau)\|_{L^2} \neq 0$ と仮定すると，

$$\begin{aligned} 2^{h-1} &< |\xi| < 2^{h+1}, 2^{j-1} < |\xi_1| < 2^{j+1},\ 2^{\ell-1} < |\xi-\xi_1| < 2^{\ell+1}, \\ 2^{n-1} &< |\sigma| < 2^{n+1},\ 2^{k-1} < |\sigma_1| < 2^{k+1}, 2^{m-1} < |\sigma-\sigma_1 \pm 2(\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2)| < 2^{m+1}, \end{aligned}$$

を満たす ξ,τ,ξ_1,τ_1 が存在する．ただし $\sigma=\tau-P(\xi), \sigma_1=\tau_1+P(\xi_1)$ とおく．($P(\xi)+P(\xi_1)+P(\xi-\xi_1)=\pm 2(\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2)$ であることに注意する). $2(\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2) = 2(\xi-\xi_1)^2+2\xi_1(\xi-\xi_1)+2\xi_1^2 \leq 32^{2(j\vee\ell)+3}$ であるから，

$$\begin{aligned} 2^{n-1} &< |\sigma| \leq |\sigma-\sigma_1 \pm 2(\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2)| + |\sigma_1| + 2|\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2| \\ &< 2^{m+1} + 2^{k+1} + 32^{2(j\vee\ell)+3}, \end{aligned}$$

となるので，$n \leq \max\{2(j\vee\ell)+1, k, m\}+4$ を得る．また，

$$\begin{aligned} 2\xi^2 - 2\xi\xi_1 + 2\xi_1^2 &= 2(\xi-\frac{\xi_1}{2})^2 + \frac{3}{2}\xi_1^2 \geq \frac{3}{2}\xi_1^2, \\ 2\xi^2 - 2\xi\xi_1 + 2\xi_1^2 &= \frac{1}{2}(\xi+\xi_1)^2 + \frac{3}{2}(\xi-\xi_1)^2 \geq \frac{3}{2}(\xi-\xi_1)^2, \end{aligned}$$

であるので，$2\xi^2-2\xi\xi_1+2\xi_1^2 \geq 32^{2(j\vee\ell)-4}$ である．よって，$k\vee m \leq 2(j\vee\ell)-3$ のとき，

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> |\sigma| \geq 2|\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2| - |\sigma-\sigma_1 \pm 2(\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2)| - |\sigma_1| \\ &> 32^{2(j\vee\ell)-3} - 2^{m+1} - 2^{k+1} \geq 2^{2(j\vee\ell)-3}, \end{aligned}$$

となり $n \geq 2(j\vee\ell)-3$ を得る．

最後に，

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> |\sigma| \geq |\sigma_1| - |\sigma-\sigma_1 \pm 2(\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2)| - 2|\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2| \\ &> 2^{k-1} - 2^{m+1} - 32^{2(j\vee\ell)+3} \end{aligned}$$

であることから，$k \geq 2(j \vee \ell)+7, k \geq m+5$ のとき，$n \geq k-2$ であることがわかり，同様の計算によって，$m \geq 2(j \vee \ell)+7, m \geq k+5$ のとき，$n \geq m-2$ となることもわかる．

証明終．

さて，補題 4.1, 補題 4.2 より, (4.1) を分解する式で添え字の集合を次のように 6 個にわける．すなわち，$Q=P$ のときは，

$$
(4.4) \qquad \begin{cases}
I(1) := \{(j,k,\ell,m);\ k < j+\ell-3, m < j+\ell-3\}, \\
I(2) := \{(j,k,\ell,m);\ j+\ell-3 \leq k \leq j+\ell+3, 0 \leq m < j+\ell-3\}, \\
I(3) := \{(j,k,\ell,m);\ j+\ell-3 \leq m \leq j+\ell+3, 0 \leq k < j+\ell-3\}, \\
I(4) := \{(j,k,\ell,m);\ k \geq j+\ell+3, 0 \leq m \leq j+\ell-3\}, \\
I(5) := \{(j,k,\ell,m);\ m \geq j+\ell+3, 0 \leq k \leq j+\ell-3\}, \\
I(6) := \{(j,k,\ell,m);\ k \geq j+\ell-3, m \geq j+\ell-3\},
\end{cases}
$$

とし，$Q=-P$ のときは，

(4.5)

$$
\begin{cases}
I(1) := \{(j,k,\ell,m);\ k < 2(j \vee \ell)-4, m < 2(j \vee \ell)-4\}, \\
I(2) := \{(j,k,\ell,m);\ 2(j \vee \ell)-4 \leq k \leq 2(j \vee \ell)+7, 0 \leq m < 2(j \vee \ell)-4\}, \\
I(3) := \{(j,k,\ell,m);\ 2(j \vee \ell)-4 \leq m \leq 2(j \vee \ell)+7, 0 \leq k < 2(j \vee \ell)-4\}, \\
I(4) := \{(j,k,\ell,m);\ k \geq 2(j \vee \ell)+7, 0 \leq m \leq 2(j \vee \ell)-4\}, \\
I(5) := \{(j,k,\ell,m);\ m \geq 2(j \vee \ell)+7, 0 \leq k \leq j+\ell-4\}, \\
I(6) := \{(j,k,\ell,m);\ k \geq 2(j \vee \ell)-4, m \geq 2(j \vee \ell)-4\},
\end{cases}
$$

として，$F_\nu := \sum_{I(\nu)} f_{jk} g_{\ell m}, \nu = 1, \cdots, 6$ とおくと，$fg = F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6$ となる．

F_1 の評価.

F_1 をつぎのように 3 つの部分にわける．$F_1 = F_{11}+F_{12}+F_{13}$，ただし $F_{11} := \sum_{I(1)} f_{0k} g_{\ell m}, F_{12} := \sum_{I(1)} f_{jk} g_{0m}, F_{13} := \sum_{I(1), j \geq 1, \ell \geq 1} f_{jk} g_{\ell m}$ とする．

$F_{11}+F_{12}$ の評価. $(0,k,\ell,m) \in I(1)$ であれば, $0 \leq k \leq \ell-3$ なので，補題 4.1 と評価 (3.7) より，

$$
\begin{aligned}
\|F_{11}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} &\leq \sum_{\ell \geq 3} \sum_{k,m} \sum_{h=\ell-2}^{\ell+2} \sum_n \rho(2^h) 2^{-n/2} \|f_{0k} g_{\ell m}\|_{L^2} \\
&\leq c \sum_{\ell \geq 3} \sum_{k,m} \rho(2^\ell) 2^{(k+m-\ell)/2} \|f_{0k}\|_{L^2} \|g_{\ell m}\|_{L^2} \\
&\leq c \|f\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}} \|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}}
\end{aligned}
$$

である．$F_{12} := \sum_{(j,k,0,m) \in I(1)} f_{jk} g_{0m} = \sum_{(0,k,\ell,m) \in I(1)} g_{0k} f_{\ell m}$ であるから, $\|F_{12}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} \leq c \|f\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}} \|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}}$ もわかる．

F_{13} の評価. $Q=P$ のとき. 補題 4.2, (3.6), (3.12) より,

$$
\begin{aligned}
&\|F_{13}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\rho(2^h)2^{-n/2}\sum_{(j,k,\ell,m)\in I(1)}\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,Q}*\hat{g}_{\ell m,Q}(\xi,\tau)\|_{L^2} \\
&\le \sum_{(j,k,\ell,m)\in I(1)}\sum_{n=j+\ell-3}^{j+\ell+4}2^{-n/2}\Big\{\sum_{h=0}^{j\vee\ell-4}+\sum_{h=j\vee\ell-3}^{j\vee\ell+2}\Big\}\rho(2^h)\|\varphi_h(\xi)\hat{f}_{jk,Q}*\hat{g}_{\ell m,Q}(\xi,\tau)\|_{L^2} \\
&\le c\sum_{(j,k,\ell,m)\in I(1)}2^{(k+m)/2-(j\vee\ell+j+\ell)/2}\|f_{jk,Q}\|_{L^2}\|g_{\ell m,Q}\|_{L^2} \\
&\quad +c\sum_{(j,k,\ell,m)\in I(1)}(1+j\vee\ell)2^{(k+m)/2+s(j\vee\ell)-(j+\ell)/2}\|f_{jk,Q}\|_{L^2}\|g_{\ell m,Q}\|_{L^2} \\
&\le c\|f\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,Q}}\|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,Q}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. $Q=-P$ のときは $\sum_{n=j+\ell-2}^{j+\ell+4}$ を $\sum_{n=2(j\vee\ell)-2}^{2(j\vee\ell)+5}$ におきかえて同様に計算できる.

F_2 **の評価.**
$Q=P$ の評価.
$(j,k,\ell,m)\in I(2)$ であれば, $j+\ell-3\le k\le j+\ell+3$ なので, 補題 4.1, 補題 4.2, (3.9) より,

$$
\begin{aligned}
(4.6)\;&\|F_2\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\rho(2^h)2^{-n/2}\sum_{(j,k,\ell,m)\in I(2)}\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,P}*\hat{g}_{\ell m,P}(\xi,\tau)\|_{L^2} \\
&\le \sum_{(j,k,\ell,m)\in I(2)}\sum_{h=0}^{j\vee\ell-4}\rho(2^h)\sum_{n=0}^{j+\ell+5}2^{-n/2}\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,P}*\hat{g}_{\ell m,P}(\xi,\tau)\|_{L^2} \\
&\quad +\sum_{(j,k,\ell,m)\in I(2)}\sum_{h=j\vee\ell-3}^{j\vee\ell+2}\rho(2^h)\sum_{n=0}^{j+\ell+5}2^{-n/2}\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,P}*\hat{g}_{\ell m,P}(\xi,\tau)\|_{L^2} \\
&\le c\sum_{|j-\ell|\le 2}\sum_{k,m}(j+\ell+6)2^{(k+m)/2-(j+\ell+j)/2}\|f_{jk,Q}\|_{L^2}\|g_{\ell m,P}\|_{L^2} \\
&\quad +c\sum_{(j,k,\ell,m)\in I(2)}(j+\ell+6)(1+j\vee\ell)2^{s(j\vee\ell)+(k+m-2j-\ell)/2}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\|g_{\ell m,P}\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

を得る. 右辺第二項は, $(j+\ell+6)(1+j\vee\ell)2^{s(j\vee\ell)-(s+1/2)(j+\ell)}\le 2(j\vee\ell+2)^2 2^{-(j\vee\ell)/4}$ が有界であるので, $c\|f\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}}\|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}}$ でおさえられる.

右辺第一項は明らかに，$c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}$ と $c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,1/2)}}$ でおさえられる．また，$s>-3/4$ であれば，右辺第一項は明らかに，$c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}$ でおさえられる．

また，$b>1/2, s\geq -3/4$ であれば，(4.6) の右辺第一項は，

$$\sum_{j,k,\ell,m}(j+\ell+6)2^{bk+\{m-j-\ell-j\vee\ell)-(2b-1)(j+\ell)\}/2}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\|g_{\ell m,P}\|_{L^2}\leq c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(-3/4,b)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}$$

で評価できる．

$Q=-P$ のときは, (3.10) と (3.13) を使い, $\sum_{n=0}^{j+\ell+5}$ を $\sum_{n=0}^{2(j\vee\ell)+5}$ におきかえて同様に計算できる．

F_3 **の評価**.

$$F_3=\sum_{(j,k,\ell,m)\in I(3)}f_{jk,Q}g_{\ell m,Q}=\sum_{(j,k,\ell,m)\in I(2)}g_{jk,Q}f_{\ell m,Q}$$

であるから，F_2 のノルムの評価より，

$$\|F_3\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}}\leq\begin{cases}c\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(\rho,1/2)}}\|f\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}} & ,\\ c\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}}\|f\|_{B_{2,1,Q}^{(\rho,1/2)}} & ,\\ c\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}}\|f\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}} & \text{if } s>-3/4,\\ c\|g\|_{B_{2,1,Q}^{(s,b)}}\|f\|_{B_{2,1,Q}^{(s,1/2)}} & \text{if } b>1/2, s\geq -3/4\end{cases}\tag{4.7}$$

を得る．

F_4 **の評価**.

$Q=P$ のとき．

補題 4.2 より，$(j,k,\ell,m)\in I(4)$ であれば，$\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,P}*\hat{g}_{\ell m,P}(\xi,\tau)\|_{L^2}\neq 0$ のとき，$k-4\leq n\leq k+2, k\geq j+\ell+5$ であるので，(3.1) より，

$$\begin{aligned}&\|F_4\|_{B_{2,1,P}^{(\rho,-1/2)}}\\ &\leq \sum_{(j,k,\ell,m)\in I(4)}\sum_{h=0}^{\infty}\rho(2^h)\sum_{n=k-4}^{k+2}2^{-n/2}\|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau)\hat{f}_{jk,P}*\hat{g}_{\ell m,P}(\xi,\tau)\|_{L^2}\\ &\leq c\sum_{(j,k,\ell,m)\in I(4)}2^{(k+m+j\wedge\ell)/2-j-\ell}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\|g_{\ell m,P}\|_{L^2}\\ &\leq c\|f\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}\|g\|_{B_{2,1,P}^{(s,1/2)}}\end{aligned}$$

を得る．最後の不等式は，$(j\wedge\ell)/2-j-\ell=(-3/4)(j+\ell)-(j\vee\ell-j\wedge\ell)/4$ より成り立つ．

$Q=-P$ のときは，F_4 のノルムの $Q=P$ のときと同様に計算すればよい．

F_5 **の評価.**

$F_5 = \sum_{(j,k,\ell,m)\in I(4)} g_{jk,Q} f_{\ell m,Q}$ であるから，F_4 のノルムの評価と同様にすればよい.

F_6 **の評価.**

$Q = P$ の場合だけを考える ($Q = -P$ の場合は同様な議論によって示せる).

$s < -1/2$ のとき，補題 4.2 と (3.3) より，

$$\begin{aligned}
&\|F_6\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} \\
&\le \sum_{(j,k,\ell,m)\in I(6)} \sum_{h=0}^{\infty} \rho(2^h) \sum_{n=0}^{k\vee m+7} 2^{-n/2} \|\varphi_{hn,P}(\xi,\tau) f_{jk,P} * g_{\ell m,P}(\xi,\tau)\|_{L^2} \\
&\le c \sum_{h=0}^{\infty} \rho(2^h) 2^{h/2} \sum_{(j,k,\ell,m)\in I(6)} (k\vee m + 8) \|f_{jk,P}\|_{L^2} \|g_{\ell m,P}\|_{L^2} \\
&\le c \|f\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,Q}} \|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}}
\end{aligned}$$

を得る. $k + m \ge 2(j + \ell - 3)$ と $(k\vee m + 8)2^{-(k+m)/8}$ が有界なことを使うことにより

$$\frac{3}{4}(j+\ell) - \frac{k+m}{2} \le -\frac{1}{8}(k+m) + 3$$

が示せ，最後の不等式が成り立つ.

$s \ge -1/2$ のときは, $0 \le h \le j \vee \ell + 3$ であるので,

$$\begin{aligned}
&\|F_6\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} \\
&\le \sum_{(j,k,\ell,m)\in I(6)} \sum_{h=0}^{j\vee\ell+3} \rho(2^h) \sum_{n=0}^{k\vee m+7} 2^{-n/2} \|\varphi_{hn}(\xi,\tau) f_{jk,P} * g_{\ell m,P}(\xi,\tau)\|_{L^2} \\
&\le c \sum_{(j,k,\ell,m)\in I(6)} \sum_{h=0}^{j\vee\ell+3} \rho(2^h) 2^{h/2} (k\vee m + 8) \|f_{jk,P}\|_{L^2} \|g_{\ell m,P}\|_{L^2} \\
&\le c \|f\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}} \|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 最後の不等式は，$k+m \ge 2(j+\ell-3)$ であることと $\sum_h \rho(2^h) 2^{-s/2} < \infty$ を用いることによって，

$$\frac{1+s}{2}(j+\ell) - \frac{k+m}{2} \le \frac{1+s}{2}(j+\ell) + \frac{s-1}{2}(j+\ell-3) - \frac{1+s}{4}(k+m)$$

が成り立つことからわかる.

定理 3 の証明終.

5　定理 5 と定理 6 の証明

$B^{(\rho,b)}_{2,1,P}$ を $B^{(\rho,b)}_{2,1}$ と略記する.

定理 5 (a) の証明.

(5.1)

$$\mathcal{F}[\psi(t)W(t)u_0(x)](\xi,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-it(\tau-P(\xi))}\psi(t)dt\hat{u}_0(\xi)=\hat{\psi}(\tau-P(\xi))\hat{u}_0(\xi),$$

であるから，$\sigma=\tau-P(\xi)$ とおくと,

$$\begin{aligned}
&\|\psi(t)W(t)u_0(x)\|_{B^{(\rho,b)}_{2,1,P}}\\
&=c\sum_{j,k}\rho(2^j)2^{bk}\left\{\int|\varphi_j(|\xi|)\hat{u}_0(\xi)|^2d\xi\int|\varphi_k(\tau-P(\xi))\hat{\psi}(\tau-P(\xi))|^2d\tau\right\}^{1/2}\\
&=\sum_{j,k}\rho(2^j)2^{bk}\left\{\int|\varphi_j(|\xi|)\hat{u}_0(\xi)|^2d\xi\int|\varphi_k(\sigma)\hat{\psi}(\sigma)|^2d\sigma\right\}^{1/2}\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\rho(2^j)\left\{\int|\varphi_j(|\xi|)\hat{u}_0(\xi)|^2d\xi\right\}^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}2^{bk}\left\{\int|\varphi_k(\sigma)\hat{\psi}(\sigma)|^2d\sigma\right\}^{1/2}\\
&=\|u_0\|_{B^{\rho}_{2,1}}\|\psi\|_{B^{b}_{2,1}}
\end{aligned}$$

となり，定理 5 (a) が証明できた.

定理 5 (b) の証明. $\hat{f}_{jk,P}(\xi,\tau):=\varphi_j(\xi)\varphi_k(\tau-P(\xi))$, $\hat{\psi}_m(\tau):=\varphi_m(\tau)\hat{\psi}(\tau)$, $F_{jkm,P}:=\psi_m(t)\int_0^t W(t-t')f_{jk,P}(x,t')dt'$, とおくと，$f=\sum_{j,k}f_{jk,P}$, $\psi=\sum_m\psi_m$ であるから,

(5.2)
$$F(x,t):=\psi(t)\int_0^t W(t-t')f(x,t')dt'=\sum_m\sum_j\sum_k F_{jkm,P}(x,t).$$

である．F を $F=F_1+F_2$, $F_1=\sum_j\sum_{k\le m}F_{jkm,P}$, $F_2=\sum_j\sum_{k>m}F_{jkm,P}$ と 2 つにわけて評価する.

F_1 の評価. $\sigma=\tau-P(\xi)$, $\sigma'=\tau'-P(\xi), t'=t\theta$ とおいて変数変換すると,

$$\begin{aligned}
\hat{F}(\xi,\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\tau t}\psi(t)dt\int_0^t e^{i(t-t')P(\xi)}dt'\int e^{it'\tau'}\hat{f}(\xi,\tau')d\tau'\\
&=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\sigma t}\psi(t)dt\int\hat{f}(\xi,\sigma'+P(\xi))d\sigma'\int_0^t e^{i\sigma't'}dt'\\
&=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\sigma t}t\psi(t)dt\int\hat{f}(\xi,\sigma'+P(\xi))d\sigma'\int_0^1 e^{it\sigma'\theta}d\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 d\theta\int\hat{f}(\xi,\sigma'+P(\xi))d\sigma'\int e^{-i(\sigma-\sigma'\theta)t}t\psi(t)dt\\
&=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 d\theta\int(\hat{\psi})'(\sigma-\sigma'\theta)\hat{f}(\xi,\sigma'+P(\xi))d\sigma',
\end{aligned}$$

を得る．よって，

$$\hat{F}_1(\xi,\tau) = i\sum_j \sum_{k\le m}\int_0^1 d\theta \int (\hat{\psi}_m)'(\sigma-\sigma'\theta)\hat{f}_{jk,P}(\xi,\sigma'+P(\xi))d\sigma' \tag{5.3}$$

が成り立つ．

一方，$\varphi_n(\sigma)\gamma_k(\sigma')\hat{\psi}'_m(\sigma-\sigma'\theta)\neq 0$ であれば，$|\sigma-\sigma'\theta|<2^{m+1}$, $|\sigma'|<2^{k+1}$, $|\sigma|<2^{n+1}$ なので，$\varphi_n(\tau-P(\xi))\hat{F}_1(\xi,\tau)\neq 0$ であれば $0\le n\le m+2$ となる．よって，補題 2.2 と不等式

$$\int |\hat{\psi}'_m(\sigma-\sigma'\theta)|d\sigma = \|\hat{\psi}'_m\|_{L^1},\ \int |\hat{\psi}'_m(\sigma-\sigma'\theta)|d\sigma' = \frac{1}{\theta}\|\hat{\psi}'_m\|_{L^1} \tag{5.4}$$

によって，

$$\begin{aligned}
\|F_1\|_{B^{(\rho,b)}_{2,1,P}} &\le c\sum_j \rho(2^j)\sum_{n=0}^{m+2} 2^{bn}\left(\int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}\right)\|\hat{\psi}'_m\|_{L^1}\sum_{k\le m}\|\hat{f}_{jk}\|_{L^2} \\
&\le c\sum_j\sum_{k\le m}\rho(2^j)\|\hat{f}_{jk}\|_{L^2}2^{(b-1)m}2^m\|\hat{\psi}'_m\|_{L^1} \\
&\le c\sum_j \rho(2^j)\sum_k \|\hat{f}_{jk,P}\|_{L^2}2^{(b-1)k}C_1(\psi) \\
&\le cC_1(\psi)\|f\|_{B^{(\rho,b-1)}_{2,1,P}},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

を得る．ただし $C_1(\psi)=\sup_m\{2^m\|\hat{\psi}'_m\|_{L^1}\}$ とする．

F_2 **の評価**. $\tau'\neq P(\xi)\neq 0$ のとき，$\sigma'=\tau'-P(\xi), \sigma=\tau-P(\xi)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\hat{F}(\xi,\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int e^{-it\tau}\psi(t)dt\int_0^t e^{i(t-t')P(\xi)}dt'\int e^{it'\tau'}\hat{f}(\xi,\tau')d\tau' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int e^{-it\sigma}\psi(t)dt\int \hat{f}(\xi,\sigma'+P(\xi))d\sigma'\int_0^t e^{i\sigma't'}dt' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int e^{-it\sigma}\psi(t)dt\int \frac{e^{i\sigma't}-1}{i\sigma'}\hat{f}(\xi,\sigma'+P(\xi))d\sigma' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \frac{\hat{\psi}(\sigma-\sigma')-\hat{\psi}(\sigma)}{i\sigma'}\hat{f}(\xi,\sigma'+P(\xi))d\sigma',
\end{aligned} \tag{5.6}$$

であるから，$k>0$ のとき，

$$\hat{F}_{jkm,P}(\xi,\tau) = \int \frac{\hat{\psi}_m(\sigma-\sigma')-\hat{\psi}_m(\sigma)}{i\sigma'}f_{jk,P}(\xi,\sigma'+P(\xi))d\sigma' \tag{5.7}$$

である．そこで F_2 を

$$\text{(5.8)}\qquad \begin{aligned}\hat{F}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_j\sum_{k>m}\int\hat{\psi}_m(\sigma-\sigma')\{\frac{f_{jk,P}(\xi,\sigma'+P(\xi)}{i\sigma'}\}d\sigma'\\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_j\sum_{k>m}\hat{\psi}_m(\sigma)\int\frac{f_{jk,P}(\xi,\sigma'+P(\xi))}{i\sigma'}d\sigma'\\ &= F_{21}+F_{22}\end{aligned}$$

とわける．

F_{21} の評価．$\hat{\psi}_m(\sigma-\sigma')\gamma_k(\sigma')$ の台で，$|\sigma-\sigma'|<2^{m+1}$, $|\sigma'|<2^{k+1}$ であるから，φ_n の台も考慮すれば，$\varphi_n(\sigma)\hat{F}_{21}(\xi,\tau)$ は $0\le n\le k+2$ の範囲を加えればよい．$\displaystyle\int|\hat{\psi}_m(\sigma-\sigma')|d\sigma=\int|\hat{\psi}_m(\sigma-\sigma')|d\sigma'=\|\hat{\psi}_m\|_{L^1}$ と 補題 2.2 を使えば,

$$\text{(5.9)}\qquad \begin{aligned}\|F_{21}\|_{B^{(\rho,b)}_{2,1,P}} &\le c\sum_j\rho(2^j)\sum_{n=0}^{k+2}2^{bn}\|\hat{\psi}_m\|_{L^1}\sum_{k>m}2^{-k}\|\hat{f}_{jk,P}\|_{L^2}\\ &\le c\sum_j\rho(2^j)\sum_{k=1}^{\infty}2^{bk-k}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\sum_{m=0}^{k-1}\|\hat{\psi}_m\|_{L^1}\\ &\le c\sum_j\rho(2^j)\sum_k 2^{(b-1)k}\|\hat{f}_{jk}\|_{L^2}C_2(\psi)\\ &\le cC_2(\psi)\|f\|_{B^{(\rho,b-1)}_{2,1,P}},\end{aligned}$$

を得る．ただし $C_2(\psi)=\sum_m\{\|\hat{\psi}_m\|_{L^1}\}$.

F_{22} の評価. $\hat{\psi}_m(\sigma)\neq 0$ のとき，$2^{m-1}<|\sigma|<2^{m+1}$ であるから, $\varphi_n(\sigma)$ の台も考慮すれば，$\varphi_n(\tau-P(\xi))\hat{F}_{22}(\xi,\tau)$ は $m-1\le n\le m+1$ の範囲を加えればよい．一方, Schwarz の不等式より,

$$\text{(5.10)}\qquad \int|\frac{f_{jk,P}(\xi,\sigma'+P(\xi))}{\sigma'}|d\sigma'\le c2^{-k/2}\|\hat{f}_{jk,P}\|_{L^2(\mathbf{R}_\tau)}$$

であるから，補題 2.2 より，

$$\text{(5.11)}\qquad \begin{aligned}\|F_{22}\|_{B^{(\rho,b)}_{2,1,P}} &\le c\sum_j\rho(2^j)\sum_{n=m-1}^{m+2}2^{bn}\|\hat{\psi}_m\|_{L^2}\sum_{k>m}2^{-k/2}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\\ &\le c\sum_j\rho(2^j)\sum_{k>m}2^{bm}\|\hat{\psi}_m\|_{L^2}2^{-k/2}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\\ &\le c\sum_j\rho(2^j)\sum_{k>m}2^{(b-1)k}\|f_{jk,P}\|_{L^2}\sum_{m=0}^{k-1}2^{m/2}\|\hat{\psi}_m\|_{L^2}\\ &\le cC_3(\psi)\|f\|_{B^{(\rho,b-1)}_{2,1,P}}\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $C_3(\psi)=\sum_m\{2^{m/2}\|\psi_m\|_{L^2}\}=\|\psi\|_{B^{1/2}_{2,1}}$ とする．以上により 定理 5 (b) が証明できた．

定理 6 の証明． $g(x):=f(\delta x)$ とおくと，

$$\hat{g}(\xi)=(2\pi)^{-d/2}\int e^{-ix\xi}f(\delta x)dx=(2\pi)^{-d/2}\delta^{-d}\int e^{-iy\xi/\delta}dy=\delta^{-d}\hat{f}(\frac{\xi}{\delta}) \tag{5.12}$$

であるから，

(5.13)
$$\|g\|_{B^s_{2,1}}=\sum_{j=0}^{\infty}2^{sj}\|\hat{g}_j\|_{L^2}=\delta^{-d}\sum_{j=0}^{\infty}2^{sj}\|\varphi_j(|\xi|)\hat{f}(\frac{\xi}{\delta})\|_{L^2}=\delta^{-d/2}\sum_{j=0}^{\infty}2^{sj}\|\varphi_j(\delta|\eta|)\hat{f}(\eta)\|_{L^2}$$

である．ここで $\delta=2^{-p},\eta:=2^p\xi$, p は正整数，とおき，また，$\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j=1$ であることから $\varphi_0(2^{-p}|\eta|)=\sum_{k=0}^{p}\varphi_k(|\eta|)$ となることに注意すると，

$$\begin{aligned}
\|g\|_{B^s_{2,1}} &= 2^{pd/2}\|\varphi_0(2^{-p}|\eta|)\hat{f}(\eta)\|_{L^2}+2^{pd/2}\sum_{j=1}^{\infty}2^{sj}\|\varphi_j(2^{-p}|\eta|)\hat{f}(\eta)\|_{L^2}\\
&= 2^{pd/2}\|\sum_{k=0}^{p}\varphi_k(|\eta|)\hat{f}(\eta)\|_{L^2}+2^{pd/2}\sum_{j=1}^{\infty}2^{sj}\|\varphi_1(2^{-j+1-p}|\eta|)\hat{f}(\eta)\|_{L^2}\\
&\le 2^{p(d/2)-sp}\left\{\sum_{k=0}^{p}2^{sk}\|f_k\|_{L^2}+\sum_{j=1}^{\infty}2^{sj+sp}\|f_{j+p}\|_{L^2}\right\}\\
&= 2^{pd/2-sp}\|f\|_{B^s_{2,1}}=\delta^{s-d/2}\|f\|_{B^s_{2,1}},
\end{aligned}$$

となり，定理 6 が証明できた．

6 主定理の証明

$N(u,\bar{u})=c_1u^2+c_2\bar{u}^2$ とする．まず，$\lambda>0$ をパラメーターとする方程式

$$\begin{cases}\partial_t v=i\partial_x^2 v+\lambda N(v,\bar{v}), & x,t\in\mathbb{R},\\ v(x,0)=v_0(x)\in B^s_{2,1}\end{cases} \tag{6.1}$$

を考える．

これを解くために，$P(\xi)=-\xi^2$, $s=-3/4$ とし，$\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を $|t|<1$ のとき $\psi(t)=1$ となる関数とする．また，$\alpha=\|v_0\|_{B^s_{2,1}}$,

$$v^0 := \psi(t)W(t)v_0,\ \{W(t)f\}(x,t)=\mathcal{F}_x^{-1}e^{itP(\xi)}\mathcal{F}f(x,t), \tag{6.2}$$

$$B(v,w) := \psi(t)\int_0^t W(t-t')\{c_1v(x,t')w(x,t')+c_2\bar{v}(x,t')\bar{w}(x,t')\}dt' \tag{6.3}$$

と定め，$v = v^0 + \lambda B(v,v)$ を解く．$v = v^0 + w$ とおき，

$$\Phi(w) = \lambda B(v,v) = \lambda B(v^0,v^0) + 2\lambda B(v^0,w) + \lambda B(w,w). \tag{6.4}$$

と定義すると，w の方程式 $w = \Phi(w)$ を解けばよいことになる．

$b > 1/2$ とし，

$$X := B^{(\rho,1/2)}_{2,1,P},\ \rho(t) = \log(2+t)t^s \tag{6.5}$$

と定義すると，定理 5 より $v^0 \in B^{(s,b)}_{2,1,P}$, $\|v^0\|_{B^{(s,b)}_{2,1,P}} \le c\alpha$ が成り立ち，定理 3 より $c_1(v^0)^2 + c_2(\bar{v}^0)^2 \in X$ が成り立つ．また 定理 3, 定理 4, 定理 5 より，

$$\|B(w_1,w_2)\|_X \le C_1\|w_1\|_X\|w_2\|_X, \tag{6.6}$$

$$B(v^0,v^0) \in X, \qquad \|B(v^0,v^0)\|_X \le C_1C_0^2\alpha^2, \tag{6.7}$$

$$\|B(v^0,w)\|_X \le C_1C_0\alpha\|w\|_X, \tag{6.8}$$

が成り立つ．従って，

$$\|\Phi(w)\|_X \le \lambda C_1(C_0^2\alpha^2 + 2C_0\alpha\|w\|_X + \|w\|_X^2) \tag{6.9}$$

を得る．Φ が $M = \{w \in X; \|w\|_X \le \beta\}$ から M への縮小写像であることを示す．そのために，

$$0 < \alpha < \frac{1}{4\lambda C_0C_1} \tag{6.10}$$

と仮定し，β を方程式: $\lambda C_1{C_0}^2\alpha^2 + 2\lambda C_1C_0\alpha\beta + \lambda C_1\beta^2 = \beta$, の小さいほうの解とする．すなわち，

$$\beta = \frac{1 - 2C_0C_1\lambda\alpha - \sqrt{1 - 4C_0C_1\lambda\alpha}}{2C_1\lambda} \tag{6.11}$$

とする．そうすると，(6.9) によって，$\|\Phi(w)\|_X \le \beta$ であることがわかる．つまり Φ は M に M に写す．同様にして，$w_1, w_2 \in M$ とすると，$\kappa := 2C_1\lambda\alpha + 2C_1\lambda\beta = 1 - \sqrt{1 - 4C_1\lambda\alpha} < 1$ で，

$$\begin{aligned}
\|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)\|_X &= \lambda\|2B(v^0, w_1 - w_2) + B(w_1 - w_2, w_1 + w_2)\|_X \\
&\le \lambda(2C_0C_1\alpha\|w_1 - w_2\|_X + C_1\|w_1 - w_2\|_X\{\|w_1\|_X + \|w_2\|_X) \\
&\le \lambda(2C_0C_1\alpha + 2C_0\beta)\|w_1 - w_2\|_X \\
&= \kappa\|w_1 - w_2\|_X, \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

であるから，Φ は縮小写像である．不動点定理により，$w = \Phi(w)$ の解が M の中でただ一つ存在する．

よって，$v=v^0+w$ は (6.1) を $t\in(-1,1)$ で満たすことがわかる．
$u(x,t)=v(\delta^{-1}x,\delta^{-2}t)$ とおくと，v は方程式

$$v_t=iv_{xx}+\delta^2N(v,\bar{v}),\ v_0(x)=u_0(\delta x) \tag{6.13}$$

を満たす．また，$\delta=2^{-p}$, (p は正整数) を

$$4C_0C_1\|u_0\|_{B^s_{2,1}}<\delta^{-3/4}, \tag{6.14}$$

ととると，定理 6 より，$\|v_0\|_{B^s_{2,1}}\le\delta^{-5/4}\|u_0\|_{B^s_{2,1}}<1/(4\delta^2C_0C_1)$ が成立するので，方程式 (6.13) は解 v をもつ．よって, $u(x,t)=v(\delta^{-1}x,\delta^{-2}t)$ が半線型 Schrödinger 方程式 (1.4) の区間 $(-\delta^2,\delta^2)$ での解となる．

参考文献

[1] N. Aronszajn, F. Mulla, and P. Szepycki, *On spaces of potentials connected with L^p classes* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **13** (1963), 211–306.

[2] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces* Acta Math., **104** (1960), 93–140.

[3] C.E.Kenig,G.Ponce and L.Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Koreteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm.Pure Appl.Math. **46**(1993), 527–620.

[4] C.E.Kenig,G.Ponce and L.Vega, *The Cauchy Problem for the Koreteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math.J.**71**(1993),1–21.

[5] C.E.Kenig,G.Ponce and L.Vega, *A bilinear estimates with applications to the KdV equations*, J.Amer.Math.Soc.**9**(1996),573–603.

[6] C.E.Kenig,G.Ponce and L.Vega, *Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation*, Trans.Amer.Math.Soc. **348**(1996),3323–3353.

[7] T.Muramatu, *Interpolation Spaces and Linear Operators, Kinokuniyashoten, 1985, in Japanese*

[8] K.Nakanishi,H.Takaoka and Y.Tsutsumi, *Counterexamples to bilinear estimates related with the KdV equation and the nonlinear Schrödinger equation*, preprint, 2000