数理解析研究所講究録 1239 巻 2001 年 1-10

Connection problem for Birkhoff-Okubo equations

熊本大学理学部　原岡喜重 (Yoshishige Haraoka)
Department of Mathematics, Kumamoto University

§0. 序　Λ を $n\times n$ 定数対角行列，A を $n\times n$ 定数行列とするとき，微分方程式

$$(tI_n-\Lambda)\frac{dY}{dt}=AY \tag{1}$$

を Okubo equation (Okubo system, system of Okubo normal form) と呼ぶ。簡単に分かるように，これは Λ の対角成分および ∞ に確定特異点を持つ $\mathbf{CP}^1$ 上の Fuchs 型方程式である。本論で触れるように，この方程式は不確定特異点を持つ方程式の標準形として名高い Birkhoff 標準形の方程式の Laplace 変換として得られるもので，歴史的には不確定特異点における解析を，Fuchs 型方程式の大域解析に帰着させようということから見出されてきたようである ([Bi], [I])。大久保謙二郎は，この方程式そのものが超幾何関数の優れた拡張を与える可能性に気づき，アクセサリー・パラメターを持たない方程式の構成とその大域解析の理論を作り上げた ([O])。横山利章 [Y2] は Okubo equation の拡大・縮小を考案し，それによってあらゆるアクセサリー・パラメターを持たない Okubo equation の構成法を与えた。その結果を利用して，[H1] ではそのような方程式の解は Euler 型の積分表示を持つことが示された。

この時点では対象が Okubo normal form に書ける方程式に限っていたのであるが，その後，あらゆる $\mathbf{CP}^1$ 上の Fuchs 型方程式でアクセサリー・パラメターを持たないものが，この理論の枠組みに取り入れられることが判明した ([HY])。その経緯を説明しよう。Fuchs 型方程式を考えることは，monodromy 表現をとることにより，$\mathbf{CP}^1\setminus\{a_1,\ldots,a_{p+1}\}$ 上の局所系を考えることとカテゴリー的に同値となる。Deligne はその観点から，アクセサリー・パラメターを持たない方程式に対応するものとして，変形を許さない局所系 (rigid local system) の概念を得た。局所系が rigid なときには，各 a_j における local monodromy の共役類により局所系が決定される。そこでそのような共役類の tuple を与えて，それを local monodromy に持つ局所系を構成せよという問題が生まれる。この問題に最初に貢献したのが Simpson [Sim] であり，この問題は Deligne-Simpson problem と呼ばれることになった。rigid local system の構成は Katz [Ka] により解決され，そこで用いられた構成法を初等的に再構成したものとして Dettweiler-Reiter [DR] がある。Deligne-Simpson problem の additive version も考えられ，それは与えられた特性指数を持つ微分方程式を構成せよという問題となる。Kostov [Ko1], [Ko2] は additive version にも解答を与えた。その結果を見ると，微分方程式はいわゆる Schlesinger type

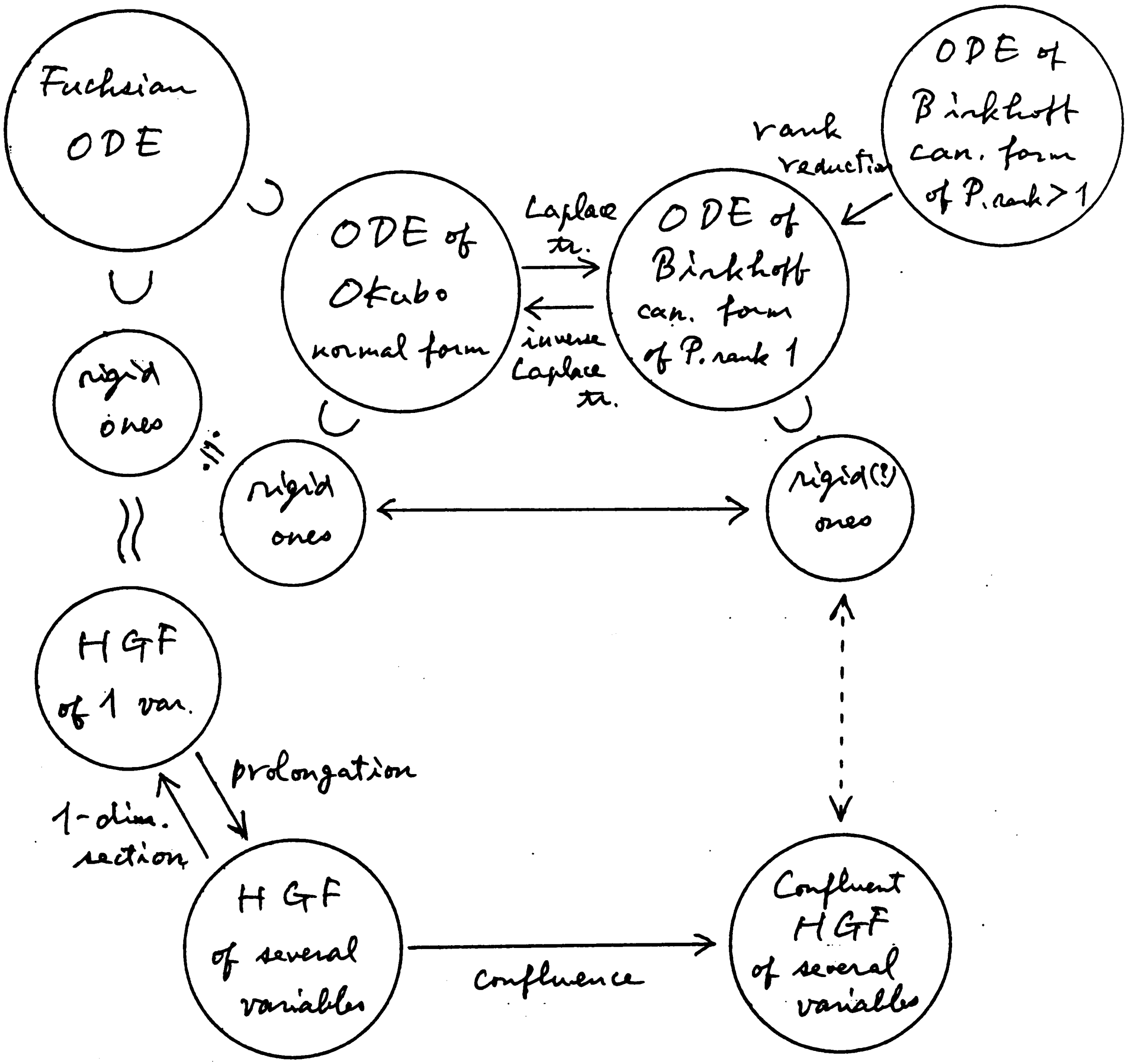
$$\frac{dY}{dt}=\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{A_j}{t-a_j}\right)Y \tag{2}$$

の形で得られている。Okubo equation は Schlesinger type の特別な場合であるが，Dettweiler-Reiter の構成法からアイデアを得て，rigid な場合には Schlesinger system (2) は，Okubo equation (1) の subsystem として実現されることを示すことができた。解の積分表示などの性質も，(1) から (2) へ遺伝することも確かめられた。このことから，アクセサリー・パラメ

ターを持たない方程式（rigid な方程式という言い方もする）については，Okubo equation を考察することで十分普遍的であることが分かったのである。

さて Okubo equation に戻ると，その Birkhoff 標準形とのつながりを通して，不確定特異点を持つような方程式に対しても何らかの rigidity を定義できるのではないかと期待される。感じとしては，monodromy および Stokes 係数を指定したときに変形が許されない方程式が rigid ということになるのではないだろうか。（Laplace 変換により，Okubo equation の接続係数と Birkhoff 標準形の方程式の Stokes 係数が直接対応するという事実（§1 で説明される）がこの観察をサポートする。または，Ramis による微分 Galois 群の理論 [RM] を念頭に置いてもよい。）そしてそのような方程式については，monodromy や Stokes 係数が陽に計算できるということになっていると思われる。

この構想を絵にしてみると，次のようになる。



以下§1 では Okubo equation と Birkhoff 標準形の方程式の対応を説明し，§2 において考察の題材とするためいくつかの例を計算する。

§1. Birkhoff 標準形方程式と Okubo equation の対応　$x=\infty$ に不確定特異点を持つ常微分方程式は，$x=\infty$ の近傍において

$$\frac{dW}{dx}=x^{r-1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m}{x^m}\right)W \tag{3}$$

と書ける。ただし右辺の級数は $x=\infty$ の適当な近傍で収束している。Birkhoff-Turrittin によると，このとき A_0 の固有値がすべて異なれば，∞ において有理型な係数による線形変換により，(3) は

$$\frac{dV}{dx}=x^{r-1}\left(\sum_{m=0}^{r}\frac{B_m}{x^m}\right)V \tag{4}$$

へ変換される。このとき r を Poincaré rank と呼ぶ。

さて (4) で $r=1$ とすると，方程式は

$$\frac{dV}{dx}=\left(B_0+\frac{B_1}{x}\right)V \tag{5}$$

となるが，これに対して Laplace 変換

$$Y(t)=\int e^{-xt}V(x)dx,\quad V(x)=\int e^{xt}Y(t)dt \tag{6}$$

を施すと，(5) は

$$(tI-B_0)\frac{dY}{dt}=(-B_1-I)Y \tag{7}$$

という Okubo equation に変換される。すなわち Poincaré rank= 1 の場合には，Birkhoff 標準形の方程式は Okubo equation と対応するのである。

Poincaré rank が 1 より大きいときは，Laplace 変換 (6) を (4) に施しても，一般には積分方程式が現れ，Okubo equation とはならない。ところで rank reduction という考え方がある。変数を $u=x^r$ により定まる u にとりかえ，方程式のサイズが r 倍になるよう未知関数を適当にふやすことで，$r=1$ の場合に帰着させられるのである ([L])。したがってその意味では，Okubo equation はすべての Birkhoff 標準形の方程式に対応すると考えることができる。

さて以下では，[BJL] に従って，Poincaré rank= 1 の Birkhoff 標準形の方程式 (5) の Stokes 係数と，対応する Okubo equation(7) の接続係数の関係を説明する。以下では

$$B_0=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\quad (\lambda_i\neq\lambda_j\ (i\neq j)) \tag{8}$$

を仮定する。(8) とならない場合，すなわち B_0 は対角行列だが固有値に重複がある場合や，B_0 が対角化されない場合については，§2 において例を考えることにする。仮定 (8) により，方程式 (7) は

$$t=\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\infty$$

に確定特異点を持ち，$t=\lambda_j$ においては 1 次元分の exponent solution がある。その基底を

$$Y_j(t)=(t-\lambda_j)^{\mu_j}\left(\vec{f}_j+O(t-\lambda_j)\right) \tag{9}$$

のように特定しておく。λ_j と λ_k の位置関係やこれらを結ぶ道をしかるべく特定しておく。このとき $Y_k(t)$ を $t=\lambda_j$ の近傍に解析接続することで，接続関係式が得られ，その係数として接続係数が決まる。とくに接続係数 c_{jk} を

$$Y_k(t)=c_{jk}Y_j(t)+\mathrm{reg}(t=\lambda_j) \tag{10}$$

により定めよう。ここで $\mathrm{reg}(t=\lambda_j)$ は，$t=\lambda_j$ において正則な解を表す。

さて特定された Okubo eqaution の解 $Y_j(t)$ の Laplace 変換として，対応する Birkhoff 標準形の方程式 (5) の解を特定する：

$$V_k(x;\eta)=\int_{\gamma_k(\eta)}e^{xt}Y_k(t)dt \tag{11}$$

ここで積分路 $\gamma_k(\eta)$ は，t 平面内で $t=\lambda_k$ から η の方向に ∞ へ向かう半直線のまわりを回る道とする（図 1 参照)。

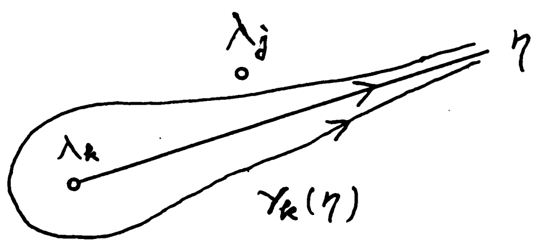


図 1

すると $V_k(x;\eta)$ は，$x=\infty$ のまわりの $(\pi/2-\eta, 3\pi/2-\eta)$ という角領域で漸近展開される解を与える。

Stokes 現象は，別な方向 $\tilde{\eta}$ による角領域 $(\pi/2-\tilde{\eta}, 3\pi/2-\tilde{\eta})$ における漸近解 $V_k(x,;\tilde{\eta})$ と $V_k(x;\eta)$ とのずれである。さて二つの方向 $\eta, \tilde{\eta}$ を，図 2 のように間に別の特異点 λ_j を挟むようにとったとき，(9), (10), (11) により次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} V_k(x;\eta)-V_k(x;\tilde{\eta}) &= \frac{1-e^{2\pi i d_k}}{2\pi i}\int e^{xt}Y_k(t)dt \\ &= (1-e^{2\pi i d_k})c_{jk}V_j(x;\hat{\eta}) \end{aligned} \tag{12}$$

ただし $-(d_k+1)=\mu_k$ である。

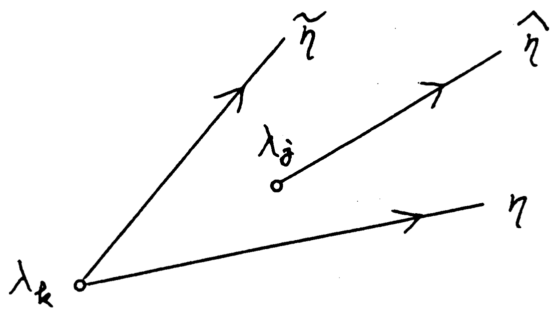


図 2

この式が Stokes 現象を記述するものとなり，Stokes 係数として

$$(1-e^{2\pi i d_k})c_{jk}$$

が得られた。こうして方程式 (7) の接続係数と方程式 (5) の Stokes 係数が，ダイレクトに対応することが分かったのである。

§2. 例 §1 のストーリーを，いくつかの例に則して広げていこう。

2.1. Jordan-Pochhammer equation. 方程式 (7) において，B_0 への条件 (8) を仮定し，さらに

$$B_1 \sim \begin{pmatrix} d_1 I_{n-1} & \\ & d_2 \end{pmatrix}$$

を課す。$-(d_k+1)=\mu_k$ とおくと，$-B_1-I$ は次の形をしているとしてよい。

$$-B_1-I=\begin{pmatrix} a_1 & a_1-\mu_1 & \cdots & a_1-\mu_1 \\ a_2-\mu_1 & a_2 & \cdots & a_2-\mu_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n-\mu_1 & a_n-\mu_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

ただし $(n-1)\mu_1+\mu_2=a_1+a_2+\cdots+a_n$ となっている。このとき方程式 (7) は Jordan-Pochhammer 方程式と呼ばれ，その解 $Y(t)$ は，次の形の積分表示をもつ。

$$Y(t)=\begin{pmatrix} (a_1-\mu_1)\int_\Delta \prod_{j=1}^n (\lambda_j-s)^{a_j-\mu_1}\cdot(t-s)^{\mu_1}\frac{ds}{(\lambda_1-s)} \\ \vdots \\ (a_n-\mu_1)\int_\Delta \prod_{j=1}^n (\lambda_j-s)^{a_j-\mu_1}\cdot(t-s)^{\mu_1}\frac{ds}{(\lambda_n-s)} \end{pmatrix}$$

積分路 Δ を適当にとることで，各特異点 $t=\lambda_j$ における exponent solution および $(n-1)$ 次元分の正則解が得られる。その積分路たちの線形関係式と積分の特異点における挙動の評価を組み合わせることで，つまり標準的な方法で，Jordan-Pochhammer 方程式の接続問題は完全に解かれる。よって§1 で説明した方法により，対応する Birkhoff 標準形の方程式 (5) の Stokes 係数が，陽に求められることが分かった。なおこの場合の方程式 (5) は，Lauricella's F_D の Laplace 変換の 1 次元切り口と思うことができる。具体的な計算結果については，[HL] に記述する予定である。

2.2. Okubo's system II_4 4 階の Okubo system

$$\left(tI_4 - \begin{pmatrix} \lambda_1 I_2 & \\ & \lambda_2 I_2 \end{pmatrix}\right)\frac{dY}{dt} = AY \tag{13}$$

において，A が

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & * & \\ & a_2 & & \\ \hline & & b_1 & \\ * & & & b_2 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} \mu_1 I_2 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \mu_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

をみたすとき，(13) を system II_4 と呼ぶ。ただし $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ である。この方程式は，アクセサリー・パラメターをもたない方程式の分類表に現れるものである ([Y1])。さて方程式 (13) は，$\Lambda(= B_0)$ が対角ではあるが固有値に重複がある場合で，仮定 (8) はみたされていないが，この場合にも§1 の議論を敷衍することができ，(13) の接続係数と対応する Birkhoff 標準形の方程式の Stokes 係数の関係が記述される。

ここでは，(13) の接続係数が積分表示から求められることを説明する。接続係数には，少し雑に言うと (10) における c_{jk} のように exponent solutions 間の接続係数と，(10) で $\mathrm{reg}(t = \lambda_j)$ で表されている項が内包している正則解との接続係数の 2 種類があり，Stokes 係数は前者に対応し，また前者は後者に比べて格段に求めやすい量になっている（前者は monodromy の生成元の中の要素として求められる)。アクセサリー・パラメターを持たない方程式に対しては，monodromy の生成元を求めるためには monodromy 表現の rigidity を用いるだけでよいので，積分表示は必要ない。rigidity から monodromy 表現の構成を導くのが大久保理論である。しかし (13) は解の積分表示を持ち ([H1], [H2])，その表示はもちろん接続係数の計算にも役立つし，さらに対応する Birkhoff 標準形の方程式の解の積分表示も与えるので，ここでは積分表示を表に出すことにした。

(13) の解の積分表示は次の通りである ([H1, Proposition 5.10], [M])。ただし (14) における $*$ の部分は特定されているとする。

$$Y(t) = \int_\Delta \Phi U \, d\tau_1 \wedge d\tau_2$$

ここで

$$\begin{aligned}\Phi = {} & \left(1 - \frac{\lambda_2 - t}{\lambda_2 - \lambda_1}\tau_2\right)^{\mu_1} {\tau_2}^{-\mu_2}(1-\tau_2)^{a_1-\mu_1}(1-\tau_1-\tau_2)^{\mu_1+\mu_2-a_1-b_1} \\ & \times {\tau_1}^{a_2+b_1-\mu_1-\mu_2}(1-\tau_1)^{\mu_1+\mu_2-a_2-b_2},\end{aligned}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{\tau_2(1-\tau_2)(1-\tau_1)} \\ \frac{c_2}{\tau_2(1-\tau_1-\tau_2)\tau_1} \\ \frac{c_3}{\tau_2\tau_1(1-\tau_1)} \\ \frac{c_4}{\tau_2(1-\tau_1-\tau_2)} \end{pmatrix},$$

$$c_1 = \frac{(\mu_1 - a_1)(a_1 + b_2 - \mu_1 - \mu_2)}{a_2 - a_1}, \quad c_2 = \frac{(\mu_1 - a_2)(a_2 + b_1 - \mu_1 - \mu_2)}{a_2 - a_1},$$
$$c_3 = \frac{(\mu_1 - b_1)(a_2 + b_1 - \mu_1 - \mu_2)}{b_1 - b_2}, \quad c_4 = \frac{(\mu_1 - b_2)(a_1 + b_2 - \mu_1 - \mu_2)}{b_1 - b_2}.$$

積分領域 Δ は，(τ_1, τ_2) 空間における平面

$$1 - \frac{\lambda_2 - t}{\lambda_2 - \lambda_1}\tau_2 = 0,\ \tau_2 = 0,\ 1 - \tau_2 = 0,\ 1 - \tau_1 - \tau_2 = 0,\ \tau_1 = 0,\ 1 - \tau_1 = 0$$

たちで限られる 2-chain となる。たとえば λ_1, λ_2, t が実数の場合には，図 3 の直線たちで限られた領域 Δ_j が Δ として採れる。

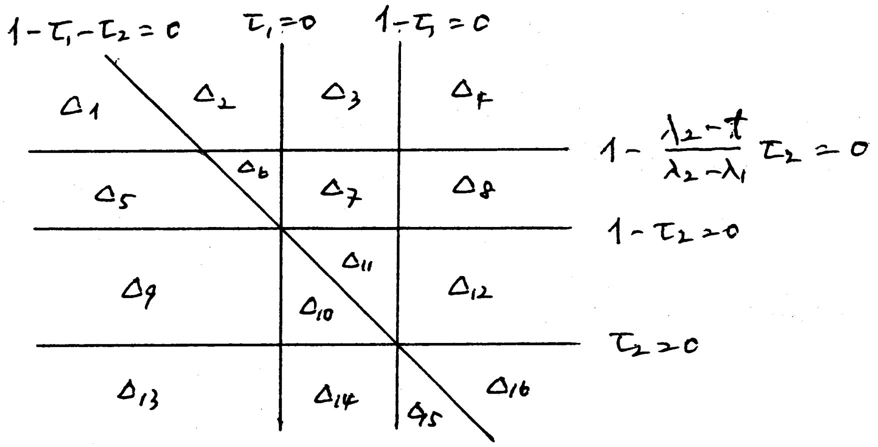


図 3

命題 1 積分領域 Δ_j に対応する解を $Y_j(t)$ と書くとき，
(i) $t = \lambda_1$ において，$Y_8(t)$ が exponent a_1 を持つ解，$Y_6(t)$ が exponent a_2 を持つ解，$Y_{13}(t), Y_{14}(t), Y_{15}(t), Y_{16}(t)$ が正則解を与える。
(ii) $t = \lambda_2$ において，$Y_3(t)$ が exponent b_1 を持つ解，$Y_1(t)$ が exponent b_2 を持つ解，$Y_9(t), Y_{10}(t), Y_{11}(t), Y_{12}(t)$ が正則解を与える。

より詳しく，各特異点における挙動（たとえば $\lim_{t\to\lambda_1} Y_8(t)/(t-\lambda_1)^{a_1}$ などを指す）も，積分表示から完全に記述される。一方図 3 で与えられる Δ_j たちの間には，Cauchy の積分定理に由来する線形関係式が成立する ([A])。それを命題 1 と組み合わせることで，方程式 (13) の接続問題は完全に解かれるのである。具体的な結果については，[H2] に記述される。

2.3. Extended Airy equations. $p_n(x)$ を n 次多項式とし，2 階微分方程式

$$y'' + p_n(x)y = 0 \tag{15}$$

を考える。これは $x = \infty$ に不確定特異点を持つ方程式で，$n = 1$ の場合は Airy 方程式である。この方程式の Stokes 現象の解析は [Sib1] のテーマであり，[Sib2] によると，$n \leq 2$ の場合と $n \geq 3$ の場合で著しい違いが現れる理由を調べるのが [Sib1] の動機であったという。$n = 1$ の場合は Airy であったが，$n = 2$ の場合は parabolic cylinder 関数を用いて解が書け，いずれの場合も Stokes 係数が陽に計算される。そうすると，[Sib2] に言う違いは，rigid ones と non-rigid ones の違いと考えることができるのではないだろうか。

ここでは§1 の議論を使うため，rank reduction の手法を用いて (15) を (5) の形に持ち込んでみる。まず $n = 2$ の場合を考える。簡単な変換を施すことにより，

$$y'' = (x^2 + c)y \tag{16}$$

という形として一般性を失わない。

$$y_1 = y - \frac{y'}{x}, \quad y_2 = y + \frac{y'}{x}$$

により連立化すると，$Y = {}^t(y_1, y_2)$ のみたす方程式として

$$Y' = xA(x)Y, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c-1 & -c-1 \\ c-1 & -c-1 \end{pmatrix}\frac{1}{x^2}$$

が得られる。この表示より，この方程式の Poincaré rank は 2 であることが分かる。そこで Poincaré rank 1 の方程式に持っていくため，

$$z = x^2$$

という rank reduction を行う。付随して

$$V(z) := \begin{pmatrix} Y(z^{1/2}) \\ z^{1/2}Y(z^{1/2}) \end{pmatrix}$$

という未知関数を導入すると，方程式

$$V' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_0 + \frac{A_1}{z} & O \\ O & A_0 + \frac{A_1+1}{z} \end{pmatrix} V \tag{17}$$

が得られる。ここで

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c-1 & -c-1 \\ c-1 & -c-1 \end{pmatrix}$$

である。

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1+1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_0 & O \\ O & A_0 \end{pmatrix}$$

とすると，(17) は

$$zV' = (A + zB)V$$

と書け，これの Laplace 変換により，対応する Okubo equation として§2.2 で採り上げた II_4 が得られる。従って II_4 の rigidity から，(16) の Stokes 係数が陽に求められることが説明される。つまり (16) の「rigidity」が主張できると思われる。

ただしこうして得られる system II_4 は可約なものであり，接続係数の計算などでは既約な場合に限る部分もあるので，そのまま§2.2 の結果が使えるとは限らない。rank reduction を行うと，一般に方程式は（階数を水増しするのだから）可約なものになる。

$n = 2$ の次は $n = 3$ を考えたくなるが，計算してみると分かるように $n = 4$ の場合の方がやりやすいので，$n = 4$ で正規化された方程式

$$y'' = (x^4 + ax^3 + bx^2 + cx)y \tag{18}$$

を考えることにする。この方程式の Poincaré rank は 3 となるので，rank reduction

$$z = x^3, \quad V(z) = \begin{pmatrix} Y(z^{1/3}) \\ z^{1/3}Y(z^{1/3}) \\ z^{2/3}Y(z^{1/3}) \end{pmatrix}$$

を行う。ただし $Y(x)$ は (18) を 2 連立方程式に書き直したときの未知関数である。先と同様の計算を経て，この場合もやはり Poincaré rank 1 の Birkhoff 標準形

$$zV' = (A + zB)V$$

が得られる。ここで

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} A_0 & & \\ A_1 & A_0 & \\ A_2 & A_1 & A_0 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} A_3 & A_2 & A_1 \\ O & A_3 + 1 & A_2 \\ O & O & A_3 + 2 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \; A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \; A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -2 \end{pmatrix}$$

である。Laplace 変換をしたときの Λ に当たるのは行列 B であり，その固有値が $\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$ となっていくことから，対応する Okubo equation として II_6 が現れそうな気がするが，すぐに分かるように B は対角化不可能である。すると対応する Okubo equation は Fuchs 型にはならず，$t = 1, -1$ で不確定特異点を持つことになる。ただその場合でも，合流により Fuchs 型の Okubo equation の極限ととらえることができれば，接続問題は帰着できる。従って問題は，その Fuchs 型の Okubo equation の rigidity である。可約性，合流など障害はあるが，$n \geq 3$ の場合の方程式 (15) が「non-rigid」とするなら，このようにして対応づけられる合流前の Fuchs 型 Okubo equation が non-rigid であるということをもって定式化できる可能性があると考える。

Acknowledgement. この原稿の内容は，D. A. Lutz 氏との議論から生まれたもので，特に rank reduction の計算は氏の教示によるものを使わせていただいたことを明記し，氏に感謝の意を表します。

References

[A] K. Aomoto, On the structure of integrals of power products of linear functions, *Sci. Papers, Coll. Gen. Education, Univ. of Tokyo*, **27** (1977), 49-61.

[BJL] W. Balser, W. B. Jurkat and D. A. Lutz, On the reduction of connection problems for differential equations with an irregular singular point to ones with only regular singularities, I, *SIAM J. Math. Anal.*, **12** (1981), 691-721.

[Bi] G. D. Birkhoff, Singular points of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **10** (1909), 436-470.

[DR] M. Dettweiler and S. Reiter, An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem, "Algorithm methods in Galois theory", *J. Symbolic Comput.*, **30** (2000), 761-798.

[H1] Y. Haraoka, Integral representations of solutions of differential equations free from accessory parameters, to appear in *Advances in Math.*.

[H2] Y. Haraoka, Connection problem for Okubo's system II_4, in preparation.

[HL] Y. Haraoka and D. A. Lutz, in preparation.

[HY] Y. Haraoka and T. Yokoyama, Solutions of Riemann-Hilbert problem for rigid local systems, in preparation.

[I] E. L. Ince, "Ordinary Differential Equations", Dover, New York, 1956.

[Ka] N. M. Katz, "Rigid Local Systems", Princeton Univ. Press, 1996.

[Ko1] V. Kostov, On the Deligne-Simpson problem, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **329** (1999), 657-662.

[Ko2] V. Kostov, On the Deligne-Simpson problem, preprint, arXiv:math.AG/0011013, 2000.

[L] D. A. Lutz, On the reduction of rank of linear differential systems, *Pacific J. Math.*, **42** (1972), 153-164.

[M] K. Mimachi, An integral representation of the solution of a fourth order Fuchsian differential equation of Okubo type, *Funk. Ekvac.*, **38** (1995), 411-416.

[O] K. Okubo, "On the group of Fuchsian equations", Seminar Reports of Tokyo Metropolitan University, Tokyo, 1987.

[RM] J. P. Ramis and J. Martinet, Theorié de Galois différentielle et resommation, *Computer algebra and differential equations*, 117-214, Comput. Math. Appl., Academic Press, 1990.

[Sib1] Y. Sibuya, "Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient", North-Holland, 1975.

[Sib2] 渋谷泰隆, 漸近解析におけるコホモロジカルな方法をめぐって, 数学の楽しみ, **24** (2001), 91-95.

[Sim] C. T. Simpson, Products of Matrices, *in* "Differential Geometry, Global Analysis and Topology", pp. 157-185, Canad. Math. Soc. Proc., **12**, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

[Y1] T. Yokoyama, On an irreducibility condition for hypergeometric systems, *Funk. Ekvac.*, **38** (1995), 11-19.

[Y2] T. Yokoyama, On extension and restriction of Okubo systems, preprint.