

## 離散事象システムにおける平均サイクル時間の上下限值

名古屋工業大学 生産システム工学科 中出康一 (Koichi Nakade)  
 Dept. of Systems Engineering, Nagoya Institute of Technology

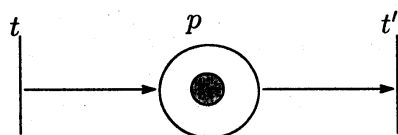
### 1 はじめに

離散事象システムは、生産システムなどを定式化する際によく用いられている。モデル化した際の評価規範として、製品の完成時間間隔といったある事象の平均生起時間間隔（サイクル時間）を求めることが多い。しかしながら、実際にはそのようなサイクル時間を理論的に求めることは困難である。

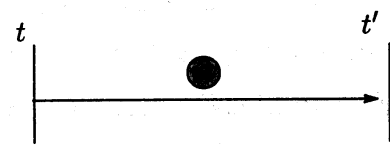
本報告では、このような一般分布に従う要素時間をもつ離散事象システムにおける各事象のサイクル時間の上下限を求める方法を概説する。その後、最近示されたいくつかのシステムに関する下限値を求める方法について、離散事象システムのモデル化との関係を中心に述べる。

### 2 ペトリネットによる表現

離散事象システムをモデル化する（拡張）確率ペトリネットについて、いくつか用語を簡単に定義する（詳細はたとえば [3] 参照）。システムは事象に対応するトランジション、事象の生起を引き起こすトークン、トークンを置く場所を示すプレースからなっており、トランジションとプレースは有向枝で結ばれている。トークンの各プレースへの配置をマーキングと呼び、初期におけるマーキングを初期マーキングとよぶ。各トランジションにおいて、すべての入力プレース（入力枝に付随するプレース）にトークンが存在するとき、このトランジションに対する事象の生起が可能となり、ある要素時間の経過後、事象が生起すると同時に、トランジションの各出力プレースに1個トークンが加わり、各入力プレースのトークンが1つずつ減る。各プレースに対する入力トランジション、出力トランジションがただ1つであるとき、マークグラフとよぶ。マークグラフは、プレースを省略して枝上にトークンを表示することで、有向グラフとして表現可能になる。



マークグラフにおいて許される構造



有向グラフによる表現

初期マーキングから事象のある生起列により到達可能（可達）なマーキングの集合  $M$  を考え

たとき、 $M$  に属するどのマーキングからも各事象がいつかは生起可能となるとき、活性とよぶ。

特にマークグラフにおいて、すべての有向閉路（1つのトランジションから同じトランジションに戻るまでの路）上に少なくとも1つのトークンが存在するとき、またそのときに限り活性となることが知られている。

さらに、マークグラフが強連結グラフとして表現されたとする。強連結マークグラフにおいて、マーキング  $M$  から他のマーキング  $M'$  へは、マークグラフ内の各有向閉路上のトークン総数が  $M$  と  $M'$  について等しいとき、そのときに限り可達である。互いに可達なマーキングの集合を同値類と呼ぶ。

$A$  を事象の集合、 $T_\alpha(n)$  を事象  $\alpha$  の  $n$  番目の生起時刻とする。このとき、次の結果が得られている。

### 補題

離散事象システムが、活性である強連結マークグラフにより表現されたとする。さらに、各事象  $\alpha \in A$  について、要素時間列  $\{\omega_\alpha(n); n \geq 1\}$  が可積、定常かつエルゴード的であるとする。このときある有限の  $\gamma_\alpha$  が存在して、確率1で

$$\gamma_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_\alpha(n)}{n}$$

となり、この値は同値類内の任意の初期マーキングについて同一である。

証明：活性であるマークグラフで表現される離散事象システムは、一般化セミマルコフ過程 (GSMP) で定式化したとき、GSMP の convex property (CX) を満たし、homogeneous minimal element を持つことが知られている ([2], 系 5.29)。このことから、[2] の定理 7.23 を用いると補題を得る。

システムのある事象  $\alpha$  に対し、 $\gamma_\alpha$  を事象  $\alpha$  に関するサイクル時間と呼ぶことにする。

## 3 上限値

離散事象システムにおけるサイクル時間の上限値を求める方法ために、以下では、同期システムを定め、そのサイクル時間の理論値を求める。同期システムは動作が単純なシステムとなるため、要素時間が一般分布に従う場合でも解析が可能となるときがある。同期システムにおけるサイクル時間の厳密値の解析が困難な場合でも、確率順序を用いて同期システムに関する良い上限値を求める方法があれば、結果として対象としているシステムに関するサイクル時間の上限値を求めることができる [6]。上限値をあたえるシステムが多数考えられる場合、確率順序などを用いることにより、それらの中で最小の上限値をあたえるシステムを見つけることで、対象としている元のシステムの良い上限値を求めることができる [4]。

#### 4 下限値

サイクル時間の下限値を求める方法として、

- (i) 確率順序を用いて、元のシステムより確率的に小さい要素時間を持つシステムのサイクル時間（またはその下限値）を理論的に求める、
- (ii) 本来生じる待ちを無視するシステムを定め、そのサイクル時間の理論値または下限値を求めることが考えられる。(i)の例として、要素時間のうちいくつかを定数（通常要素時間の期待値）とおくことで、サイクル時間をする事が考えられる。(ii)としては、たとえば生産工程において、複数の作業員あるいは機械の間の製品の受け渡しのための待ち時間を無視して、それぞれが独立した複数個のサブシステムを考え、それぞれのサイクル時間（あるいはその下限値）を理論的に求め、その最大値を、元のシステム全体のサイクル時間の下限値とすることが挙げられる。

以下では、上記と異なる方法として、[4], [6], [8] で用いられている下限値を求める方法について解説する。次の条件を満たす離散事象システムを考える。

1. モデルをペトリネットを用いて表現したとき、有限個のトランジション、プレースからなる強連結活性マークグラフとなる。さらに、各トランジションが、次の2種類のみからなるとする。

A: 異なるトランジションから入ってくる2つの入力枝と異なるトランジションに向かう2つの出力枝をもつ。

B: 1つの入力枝と1つの（入力とは異なる）出力枝をもつ。

この場合、Aの性質を持つ2つのトランジションについて、一方から他方に到達する2つの路が存在する。

2. 各トランジションにおいて、対応する事象の要素時間列は有限の平均をもつ互いに独立で同一分布に従うとする。

1.の仮定から、あるトランジション $t$ からあるトランジション $t'$ への2つの路が生ずる（この2つのトランジションは同一でもよい）。このとき、トークンが2つに分かれて、再度 $t$ にトークンが戻ってくると考えれば、 $t'$ への到達時間の差によって、 $t'$ に早く到達したトークンに対して生起可能となるまでの待ちが生じることになる。

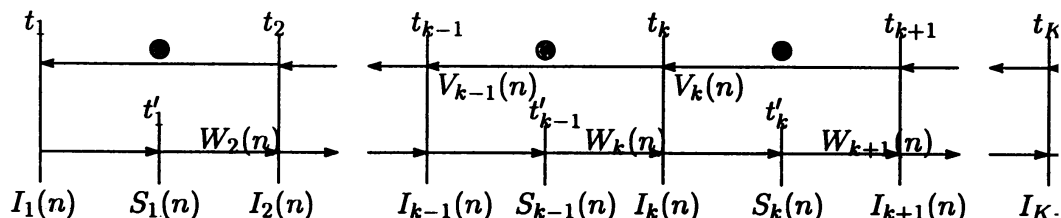
2節の補題より、各事象 $\alpha$ の生起時間間隔 $\gamma_\alpha$ が存在し、初期状態に依存しないことがわかる。

#### 5 有限バッファ直列型ライン

マークグラフとなる前記のシステムにおけるサイクル時間の下限を求める手順を考察する。そのために、例として[4]において示された有限バッファ直列型ラインにおけるサイクル時間の上下限を求める方法を示す。

### 5.1 マークグラフによる表現

有限バッファ直列型ラインは、以下で表現されるマークグラフとなる。



この図において、 $n$  番目の  $t_k$  の要素時間が  $I_k(n)$ 、 $t'_k$  の要素時間が  $S_k(n)$  であるとき、工程  $k$  の加工時間が  $S_k(n)$  である中間バッファのない生産ブロッキングを、 $S_k(n) = 0$  のとき工程  $k$  の加工時間が  $I_k(n)$  である中間バッファのない通をもつ直列型ラインをしめしている。ここで、工程 1 の前は常に部品が存在し、直ちに引き取られるものとする。加工時間のいくつかを 0 と置くことで、有限バッファになる。このグラフは活性、強連結マークグラフである。

### 5.2 上限値

生産ブロッキングの場合、サービス時間が正の値をとる工程についてすべて完了した後、ジョブが次の工程に進む同期型システムを考える。このときの平均サイ

$$E[\max_k S_k(n)]$$

となり、元のシステムの平均サイクル時間の上限値となる [4].

通信ブロッキングでは、隣接する工程を同時に処理することはできない。正の集合を 2 つのグループ  $A, B$  に分け、 $A$  の処理がすべて完了した後、 $B$  で処理するシステムを考える。ただし、隣接する工程同士は異なるグループに属するとする。このシステムのサイクル時間は

$$E[\max_{k \in A} I_k(n) + \max_{k \in B} I_k(n)]$$

となり、元のシステムの上限値となる。グループ分けをうまく選択することで、この値を小さくすることができる [5].

### 5.3 待ち時間の表現

トランジション  $t_k$  の  $n$  番目の生起に関して、生起可能となるまでの 2 種類の生起が存在し、次の式で示される。  $k = 2, \dots, K-1$  について、

$$W_k(n) = [S_k(n-1) + W_{k+1}(n-1) + I_{k+1}(n-1) - \{V_{k-1}(n) + I_{k-1}(n)\}]$$

$$= [H_k(n) - X_k(n)]^+,$$

$$V_k(n) = [X_k(n) - H_k(n)]^+ = X_k(n) - H_k(n) + [H_k(n) - X_k(n)]^+,$$

ここで  $[a]^+ = \max\{a, 0\}$ ,  $V_1(n) = W_K(n) = 0$  であり,  $k = 2, \dots, K-1$  について

$$H_k(n) = I_{k+1}(n) - I_{k-1}(n) - S_{k-1}(n), \quad X_k(n) = V_{k-1}(n) - S_k(n-1) - W_{k+1}(n-1)$$

である.  $H_k(n)$  と  $X_k(n)$  が独立であり, かつ  $H_k(n)$  は要素時間のみからなる, すなわち  $H_k(n)$  の分布が既知であることに注意する.

このシステムでは, サイクル時間について  $\gamma_{t_1} = \dots = \gamma_{t_K} = \gamma$  が成り立つ. さらに,  $C_k(n)$  を  $n-1$  番目と  $n$  番目のトランジション  $t_k$  の事象生起時間間隔とすると,

$$\begin{aligned} C_1(n) &= S_1(n-1) + W_2(n-1) + I_2(n-1) + I_1(n) \\ &= S_1(n-1) + [H_2(n-1) - X_2(n-1)]^+ + I_2(n-1) + I_1(n) \end{aligned}$$

$k = 2, \dots, K-2$  について

$$\begin{aligned} C_k(n) &= S_k(n-1) + W_{k+1}(n-1) + I_{k+1}(n-1) + V_k(n) + I_k(n) \\ &= S_k(n-1) + [H_{k+1}(n-1) - X_{k+1}(n-1)]^+ + I_{k+1}(n-1) + X_k(n) - H_k(n) \\ &\quad + [H_k(n) - X_k(n)]^+ + I_k(n), \end{aligned}$$

さらに

$$C_{K-1}(n) = S_{K-1}(n-1) + I_K(n-1) + X_{K-1}(n) - H_{K-1}(n) + [H_{K-1}(n) - X_{K-1}(n)]^+ + I_{K-1}(n)$$

が成り立つ. いま,  $X_k(n)$  が確率変数  $X_k$  に法則収束し,  $E[C_k(n)]$  が  $\gamma_{t_k}$  に収束するとすれば, 次の式が成り立つ.

$$\gamma = s_1 + E[[H_2 - X_2]^+] + i_2 + i_1 \quad (1)$$

$$\gamma = s_k + E[[H_{k+1} - X_{k+1}]^+] + i_{k+1} + x_k - h_k + E[[H_k - X_k]^+] + i_k, \quad k = 2, \dots, K-2 \quad (2)$$

$$\gamma = s_{K-1} + i_K + x_{K-1} - h_{K-1} + E[[H_{K-1} - X_{K-1}]^+] + i_{K-1} \quad (3)$$

ここで  $H_k$  は  $H_k(n)$  と同じ分布にしたがう  $X_k$  と独立な確率変数であり,  $h_k = E[H_k(n)]$ ,  $s_k = E[S_k(n)]$ ,  $i_k = E[I_k(n)]$ ,  $x_k = E[X_k(n)]$  である.

#### 5.4 サイクル時間の下限値の導出

式 (1)-(3) において,  $X_k$  を  $x_k$  と書き換えて,  $x_k$  に関する連立非線形方程式と見なし, その解  $\hat{x}_k$  が求められたとする. そのとき,  $k = 2, \dots, K-2$  について,

$$\gamma \geq s_k + E[[H_{k+1} - \hat{x}_{k+1}]^+] + i_{k+1} + \hat{x}_k - h_k + E[[H_k - \hat{x}_k]^+] + i_k$$

となることが証明できる。(通信型の時の証明方法は [4] 参照)

上記により下限値を求めたとき、単純に確率変数を平均値に置き換える場合に比べて、良い下限値が得られている。有限バッファの直列型ラインでは、バッファ容量が小さいシステムにおいて、他の方法と比較して有効であることが確認されている。 [4]

## 6 その他の離散事象システム

以上と同様の手順を用いて、先の条件を満たすマークグラフで表現される離散事象システムについて、適切な同期システムを用いて上限値を求める方法、ならびに上記の  $H_k, X_k$  に対応するものを見つけることにより、サイクル時間との関係式から、解が下限値をあたえるような連立非線形方程式を見つけることができる場合がある。以下その他の例を示す。

### (i) 有限バッファ閉鎖型直列ライン

前節のモデルにおいて、 $t_k$  と  $t_1$  が他と同様につながっているモデルを考える。このシステムの初期マーキングにおいて、 $t_{k-1}$  から  $t_{k-1}$  (または  $t_{k-1}$  から  $t_k$ ) のトークンの総数が  $J$  であるとすると、このシステムは  $J$  個の系内ジョブを持つ有限バッファ閉鎖型直列ラインになる。

#### 上限値

生産型ブロッキングでは、 $J$  個のジョブを配置して開放型と同様に同期処理することにより、上限値を得ることができる。ただし、 $J$  が小さい場合には、1回の同期の際、各ジョブが複数の工程を処理する(ただし前のジョブに追いつかない範囲で)方が良い上限値が得られる。

通信ブロッキングの場合さらに複雑である。 $J \leq K/2$  のとき、1つおきに  $J$  個のジョブを配置することは可能なため、その範囲内で開放型と類似の方法を用いることができる。しかし、 $J > K/2$  のときは、必ず連続するジョブが生じるため、別の方法を考える必要がある。

#### 下限値

前節と同様に、生産ブロッキング、通信ブロッキングを含むモデルとなり、サイクル時間に関する関係式を定義できる。ただし、この場合には、 $K$  個の求めるべき  $\hat{x}_k$  にたいし、独立な方程式は  $K - 1$  個しか生じない。従って、別の式が1つ必要となる。閉鎖型ラインでは、システム内のジョブ数が一定数  $J$  であることに注意すると、あるジョブがシステムを1周するのに必要な時間が

$$\sum_{k=1}^K \{S_k(n) + W_k(n) + I_k(n)\}$$

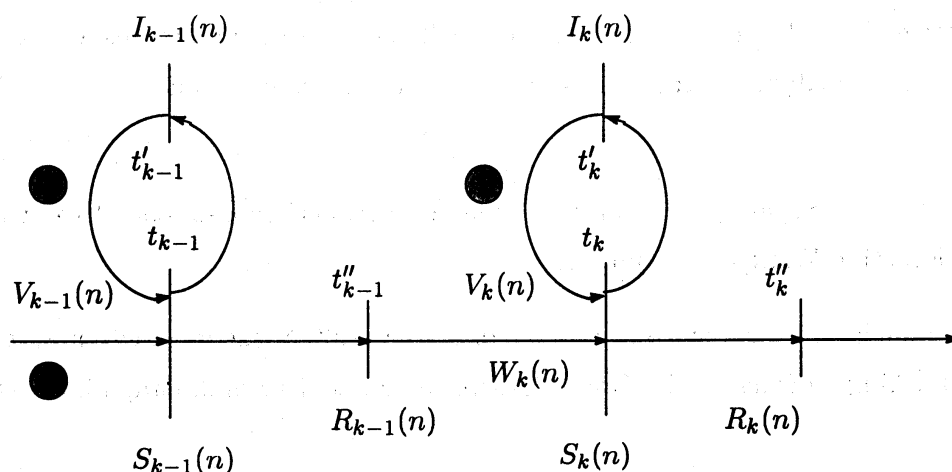
であり、この1周あたり各トランジションは  $J$  回生起することを考えれば、

$$\gamma = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^K \{s_k + i_k + E[[H_k - X_k]^+]\}$$

という式を得ることができる。この式を用いて、同様に連立非線形方程式を立て、解を求められれば、サイクル時間の下限値を求めることが可能となる。

### (ii) 複数の多能工からなる U 字型ライン [6]

$J$ 人の同等な能力を持つ作業員（多能工）と  $K$  台の工程からなる巡回型ラインを考察する。詳しいモデルの説明は省略するが、このモデルはマークグラフとなり、工程  $k-1, k$  について次のように表現できる。ここで、 $I, S, R$  は要素時間、 $V, W$  は待ち時間を表す確率変数である。



このとき、 $t_{k-1}$  から  $t_k$  への2つの路 ( $t_{k-1} \rightarrow t''_{k-1} \rightarrow t_k \rightarrow t'_k \rightarrow t_k$ ,  $t_{k-1} \rightarrow t'_{k-1} \rightarrow t_{k-1} \rightarrow t''_{k-1} \rightarrow t_k$ ) に注目することにより、 $W_k(n), V_k(n)$  は次のように表現できる。

$$W_k(n) = [H_k(n) - X_k(n)]^+, V_k(n) = X_k(n) - H_k(n) + [H_k(n) - X_k(n)]^+$$

$$H_k(n) = S_k(n-1) + I_k(n-1) - S_{k-1}(n) - R_{k-1}(n),$$

$$X_k(n) = I_{k-1}(n-1) + V_{k-1}(n) - R_{k-1}(n-1) - W_k(n-1)$$

この式から、(i) の閉鎖型と同様にして、サイクル時間の下限値を求めることができる。

## 7 おわりに

ここでは、離散事象システムの上下限値について考察した。

複数の異なる離散事象システムの間にも構造的等価性が成り立つときや、システムが可逆性を持つ場合があり ([7]), 等価なシステムのうち1つのシステムについてサイクル時間の上下限を求めれば、その他の等価なシステムについても上下限を求めたことになる。

## 参考文献

- [1] Buzacott, J. A. and Shanthikumar, J. G., Stochastic Models of Manufacturing Systems, Prentice-Hall, 1993.
- [2] Glasserman, P. and Yao, D., Monotone Structure in Discrete-Event Systems, Wiley, New York, 1994.

- [3] 村田忠夫, ペトリネットの解析と応用, 近代科学社.
- [4] Nakade, K., New Bounds for Expected Cycle Times in Tandem Queues with Blocking, *European Journal of Operational Research*, vol.125, 84-92, 2000.
- [5] Nakade, K. Effective Upper Bounds for Expected Cycle Times in Tandem Queues with Communication Blocking, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 15, 327-334, 2001.
- [6] Nakade, K. and Ohno, K., Separate and Carousel Type Allocations in a U-Shaped Production Line with Multi-Function Workers, submitted, 2001.
- [7] Nakade, K. and Ohno, K., Stochastic Properties of Fork/Join Multi-Stage Production Systems with General Blocking, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 40, 341-355, 1997.
- [8] Nakade, K., Ohno, K. and Shanthikumar, J. G., Bounds and Approximations for Cycle Times of a U-shaped Production Line, *Operations Research Letters*, 21, 191-200, 1997.