数理解析研究所講究録 1243 巻 2002 年 1-8



# $BKW-$Operators for Chevichev systems

新潟大学大学院　自然科学研究科　　石井　隆 (TAKASHI ISHII)

## 1　序論

閉区間 $I=[0,1]$ 上の実数値連続関数全体のなす Banach 空間を $C(I)$ とする．$S_k=\{1,x,x^2,\cdots x^k\}$ とし，$S_k$ の生成する部分空間を $\tilde{S}_k$ とあらわす.

本稿は，[9] がもとになっており，試験関数族 $S_3$ に対する $C(I)$ 上の BKW-作用素のひとつの特徴付けをあたえる．また，[9] のなかで，いくつかの計算ミスを発見したので，この場を借りて，修正させていただきました.

## 2　準備と背景

**定理 A** ([4, Korovkin]) $\{T_n\}_n$ を $C(I)$ 上の正線形作用素列で，$j=0,1,2$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\|T_nx^j-x^j\|=0$ をみたすとき，任意の $f\in C(I)$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\|T_nf-f\|=0$.

**Remark** $C(I)$ 上の正線形作用素とは，$f\in C(I),f\geq 0\Rightarrow Tf\geq 0.$ が成立することをいう．また，定理 A で $\{T_n\}$ が正作用素という条件は $\sup_{n\in\mathrm{N}}\|T_n\|\leq 1$ という条件で置き換えても成立する ([10, Wulbert]).

この定理 $A$ の結論は，$\{T_n\}$ が与えられた仮定を満たすとき，$\{T_n\}$ は恒等作用素に強収束することを主張している．髙橋先生 [6, 7, 8] は恒等作用素のほかにこのような性質を満たす有界線形作用素にはどのようなものがあるのか，ということを問題とした.

**定義 2.1** $C(I)$ 上の有界線形作用素 $T$ が試験関数 $S_k$ の $BKW$-作用素であるとは，次の条件

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n\| = \|T\|, \quad \lim_{n\to\infty}\|T_n h - Th\| = 0 \quad \textit{for each} \quad h \in S_k.$$

を満たす有界線形作用素列 $\{T_n\}_n$ に対して，

$$\|T_n f - Tf\| \to 0 \quad \textit{for every} \quad f \in C(I).$$

が成立することと定義し，これを満たす有界線形作用素全体を $BKW(C(I), S_k)$ と表す.

$BKW(C(I), S_1)$ についてはつぎの定理が知られている.

**定理 B**([8, S.-E. Takahasi]) $T$ を $C(I)$ 上の有界線形作用素で $\|T\| = 1$ とする．$T \in BKW(C(I), S_1)$ であるための必要十分条件は，$T$ が次の型で (i), (ii), (iii) をみたすことである.

$$(Tf)(t) = f(0)a_1(t) + f(1)a_2(t), \quad t \in I, f \in C(I).$$

(i) $|a_1(t)| + |a_2(t)| = 1, \quad t \in I.$

(ii) $a_1(t) \neq 0, a_2(t) \neq 0 \Rightarrow |a_1(t) + a_2(t)| \neq 1.$

(iii) $a_1(t), a_2(t)$ は連続関数.

一般の $BKW(C(I), S_k)$ については次のように特徴付けがなされている.

**定理 C**([3, K. Izuchi and S.-E. Takahasi]) $T$ を $C(I)$ 上の有界線形作用素で $\|T\| = 1$ とする．$T \in BKW(C(I), S_k)$ であるための必要十分条件は $T$ が次の型で (i),(ii),(iii) をみたすことである.

$$(Tf)(t) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j(t) f(x_j(t)), \quad t \in I, f \in C(I).$$

(i) $\sum_{j=1}^{n+1} |a_j(t)| = 1 \quad t \in I.$

(ii) $\mu_t = \sum_{j=1}^{n+1} a_j(t)\delta_{x_j(t)}$ は $M_1(I)$ ($I$ 上の実数値有界測度のなす Banach 空間 $M(I)$ の閉単位球) の中で汎弱位相に関して，連続的に変化する．ここで，$\delta_x$ は $x \in I$ での point mass をあらわす．

(iii) 各 $t \in I$ に対して，非定数関数 $g_t \in \tilde{S}_k$ が存在し，$\|g_t\| = 1, \int g_t d\mu_t = 1$ となる．

$n = 1$ の場合は，定理 C の条件 (i),(iii) を使って，$x_1(t) = 0, x_2(t) = 1$ を導くことができる．その意味で定理 C は定理 B の一般化となっている．また，$n = 2$ のときにも同様に，$x_j(t)$ をより具体的にかくことができ，つぎの定理 D として知られている．

**定理 D** ([2, K. Izuchi and S.-E. Takahasi]) $T$ を $C(I)$ 上の有界線形作用素で $\|T\| = 1$ とする．$T \in BKW(C(I), S_k)$ であるための必要十分条件は $T$ が (i),(ii),(iii) をみたす

$$(Tf)(t) = f(0)a_1(t) + f(1)a_2(t) + a_3(t)f(x(t)), \quad t \in I, f \in C(I).$$

(i) $a_j(t)(j = 1, 2, 3)$ は実数値関数で，$\sum_{j=1}^{3} |a_j(t)| = 1 \quad t \in I.$

(ii) $x(t)$ は $I$ 上の実数値関数で，$0 \le x(t) \le 1$. ある $t_0 \in I$ が存在して，$x(t_0) = 0 or 1$ ならば $a_3(t_0) = 0$.

(iii) $0 < |a_3(t_0)| < 1$ ならば $|(a_1 + a_2 + a_3)(t_0)| < |(a_1 + a_2)(t_0)| + |(a_3)(t_0)| = 1$.

(iv) $0 < |a_3(t_0)| < 1, 0 < x(t_0) < 1/2$ ならば $a_1(t_0) = 0$.

(v) $0 < |a_3(t_0)| < 1, 1/2 < x(t_0) < 1$ ならば $a_2(t_0) = 0$.

(vi) $a_1(t)\delta_0 + a_2(t)\delta_1 + a_3(t)\delta_{x(t)}, t \in I$ は $M_1(I)$ のなかで 汎弱位相に関して連続的に変化する．

## 3 結果

定理C において，$T \in BKW(C(I), S_k)$ の特徴付けがなされたが，その条件をより詳細に解析することにより，定理B(k=1のとき), 定理D(k=2のとき) と同様に，$BKW(C(I), S_3)$ における $x_j(t), a_j(t)$ の満たすべき条件を導く．

0 でない実数 $a \in \mathbb{R}$ 対して，$a > 0$ のとき，$\mathrm{sgn}a = 1$, $a < 0$ のとき，$\mathrm{sgn}a = -1$ とする．

**補題 3.1** $\mu = \sum_{j=1}^{4} a_j \delta_{x_j}, \sum_{j=1}^{4} |a_j| = 1, a_j \neq 0, 0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 1$ とする．非定数関数 $g \in \tilde{S}_3$ が存在し、$\|g\| = 1, \int g d\mu = 1$ となるための必要十分条件は，

$$\mathrm{sgn}\, a_1 = \mathrm{sgn}\, a_3 \neq \mathrm{sgn}\, a_2 = \mathrm{sgn}\, a_4$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1/4, 3/4, 1)$$

となることである．

**証明** $\mathrm{sgn}\, a_1 = \mathrm{sgn}\, a_3 \neq \mathrm{sgn}\, a_2 = \mathrm{sgn}\, a_4, (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\right)$ のとき，$g(x) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1$ が条件をみたし，かつ，そのときに限る． □

**補題 3.2** $\mu = \sum_{j=1}^{3} a_j \delta_{x_j}, \sum_{j=1}^{3} |a_j| = 1, a_j \neq 0, 0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1$ とする．非定数関数 $g \in \tilde{S}_3$ が存在し、$\|g\| = 1, \int g d\mu = 1$ となるための必要十分条件は，つぎのいずれかが成立するときである．

(i) $\mathrm{sgn}\, a_1 = \mathrm{sgn}\, a_2 \neq \mathrm{sgn}\, a_3$, $\quad (x_1, x_2, x_3) \in \{(0, \alpha, 1); 0 < \alpha \leq 3/4\}$.

(ii) $\mathrm{sgn}\, a_1 \neq \mathrm{sgn}\, a_2 = \mathrm{sgn}\, a_3$, $\quad (x_1, x_2, x_3) \in \{(0, \alpha, 1); 1/4 < \alpha < 1\}$.

(iii) $\operatorname{sgn} a_1 = \operatorname{sgn} a_3 \neq \operatorname{sgn} a_2$, $(x_1, x_2, x_3) \in \{(0, \alpha, 3\alpha); 1/4 \leq \alpha \leq 1/3\} \cup \{(\alpha, (\alpha + 2)/3, 1); 0 \leq \alpha \leq 1/4\}$.

**証明** (i) $g(x) = ax(x-\alpha)^2 - 1 \quad (a > 0, \quad 0 < \alpha < 1)$ として，$g(\frac{\alpha}{3}) \leq 1, g(1) = 1$ なる条件から出る．

(ii) $g(x) = a(x-\alpha)^2(x-1)+1 \quad (a > 0, \quad 0 < \alpha < 1)$ として，$g(\frac{\alpha+2}{3}) \geq -1, g(0) = -1$ なる条件から出る．

(iii) $g(x) = ax(x-\alpha)^2 - 1 \quad (a > 0, \quad 0 < \alpha < 1)$ として，$g(\frac{\alpha}{3}) = 1, g(1) \leq 1$ なる条件から出る．□

**補題 3.3** $\mu = \sum_{j=1}^{2} a_j \delta_{x_j}, \sum_{j=1}^{2} |a_j| = 1, a_j \neq 0, 0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ とする．非定数関数 $g \in \tilde{S}_3$ が存在し、$\|g\| = 1, \int g d\mu = 1$ となるための必要十分条件は，つぎのいずれかが成立するときである．

(i) $\operatorname{sgn} a_1 = \operatorname{sgn} a_2$, $(x_1, x_2) \in \{(0, \alpha); 0 < \alpha \leq 1\} \cup \{(\alpha, 1); 0 \leq \alpha < 1\}$.

(ii) $\operatorname{sgn} a_1 \neq \operatorname{sgn} a_2$, $(x_1, x_2) \in \{(0, \alpha); 1/4 \leq \alpha \leq 1\} \cup \{(\alpha, 1); 0 \leq \alpha \leq 3/4\} \cup \{(\alpha, \beta) \in I^2; 3\alpha \leq \beta, \quad \alpha + 2 \leq 3\beta\}$.

**証明** (i) $g(x) = ax(x-\alpha)^2 - 1 \quad (a > 0, \quad 0 < \alpha < 1)$ として，$g(\frac{\alpha}{3}) \leq 1, g(1) \leq 1$ なる条件から出る．

(ii) $g(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)^2 - 1 \quad (a > 0, \alpha \leq 0, \quad 0 \leq \beta \leq 1)$ として，$g(\frac{2\alpha+\beta}{3}) = 1, g(1) \leq 1$ なる条件から出る．□

**補題 3.4** $\mu = a\delta_x, |a| = 1, a \neq 0, 0 \leq x \leq 1$ とすると，非定数関数 $g \in \tilde{S}_3$ が存在し、$\|g\| = 1, \int g d\mu = 1$ となる．

以上の補題から，つぎの結果を得る．

**定理 3.5** $T$ を $C(I)$ 上の有界線形作用素で $\|T\|=1$ とする．$T\in BKW(C(I),S_3)$ であるための必要十分条件は $T$ が (a),(b),(c) をみたすつぎの型のもので，かつ (i), (ii), (iii) をみたすことである．

$$(Tf)(t)=\sum_{j=1}^{k(t)}a_j(t)f(x_j(t)),\quad t\in I.$$

(a) $1\le k(t)\le 4,\quad t\in I.$

(b) $\sum_{j=1}^{k(t)}|a_j(t)|=1,\quad a_j(t)\neq 0\quad t\in I.$

(c) $\mu_t=\sum_{j=1}^{k(t)}a_j(t)\delta_{x_j(t)}$ は $M_1(I)$ の中で汎弱位相に関して，連続的に変化する．

さらに，

(i) $k(t)=4$ のとき，

$$\operatorname{sgn}a_1(t)=\operatorname{sgn}a_3(t)\neq\operatorname{sgn}a_2(t)=\operatorname{sgn}a_4(t),(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t))=(0,1/4,3/4,1).$$

(ii) $k(t)=3$ のとき，つぎのいずれかがみたされる．

(1) $\operatorname{sgn}a_1(t)=\operatorname{sgn}a_2(t)\neq\operatorname{sgn}a_3(t),\quad (x_1(t),x_2(t),x_3(t))\in\{(0,\alpha,1);0<\alpha\le 3/4\}.$

(2) $\operatorname{sgn}a_1(t)\neq\operatorname{sgn}a_2(t)=\operatorname{sgn}a_3(t),\quad (x_1(t),x_2(t),x_3(t))\in\{(0,\alpha,1);1/4<\alpha<1\}.$

(3) $\operatorname{sgn}a_1(t)=\operatorname{sgn}a_3(t)\neq\operatorname{sgn}a_2(t),\quad (x_1(t),x_2(t),x_3(t))\in\{(0,\alpha,3\alpha);1/4\le\alpha\le 1/3\}\cup\{(\alpha,(\alpha+2)/3,1);0\le\alpha\le 1/4\}.$

(iii) $k(t) = 2$ のとき，つぎのいずれかがみたされる.

(1) $\mathrm{sgn}\, a_1(t) = \mathrm{sgn}\, a_2(t)$, $\quad (x_1(t), x_2(t)) \in \{(0, \alpha); 0 < \alpha \leq 1\} \cup \{(\alpha, 1); 0 \leq \alpha < 1\}$.

(2) $\mathrm{sgn}\, a_1(t) \neq \mathrm{sgn}\, a_2(t)$, $\quad (x_1(t), x_2(t)) \in \{(0, \alpha); 1/4 \leq \alpha \leq 1\} \cup \{(\alpha, 1); 0 \leq \alpha \leq 3/4\} \cup \{(\alpha, \beta) \in I^2; 3\alpha \leq \beta, \quad \alpha + 2 \leq 3\beta\}$.

(iv) $k(t) = 2$ のとき，$0 \leq x_1(t) \leq 1$.

## References

[1] F. Altomare and M. Campiti, *Korovkin-Type Approximation Theory and its Application,* Walter de Gruyter(1994).

[2] K. Izuchi and S.-E. Takahasi, *BKW-operators on the interval and the sequence spaces,* J. Approx. Theory **87** (1996), 159–169.

[3] K. Izuchi and S.-E. Takahasi, *BKW-operators on the interval* $[0, 1]$, Rend. Circ. Mat. Palermo **46** (1997), 477–489.

[4] P. P. Korovkin, *On convergence of linear operators in the space of continuous functions,* Dokl. Akad. Nauk SSSR **90** (1953), 961–964(Russian).

[5] P. P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory,* Hindustan Publishing(1960).

[6] S.-E. Takahasi, *Borman-Korovkin-Wulbert operators on* $C[0, 1]$ *for* $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, Nihonkai. Math. J. **1** (1990), 155–159.

[7] S.-E. Takahasi, *Borman-Korovkin-Wulbert operators on normed spaces*, J. Approx. Theory **72** (1993), 174–184.

[8] S.-E. Takahasi, *$(T,E)$-Korovkin closures in normed spaces and BKW-operators,* J. Approx. Theory **82** (1995), 340–351.

[9] T. Ishii and K. Izuchi, *BKW-Operators for Chebychev Systems,* Tokyo J. Math. **22** (1999), 375–389.

[10] D. E. Wulbert, *Convergence of operators and Korovkin's theorem*, J. Approx. Theory **1** (1968), 381–390.