数理解析研究所講究録 1243 巻 2002 年 30-44

Privalov 空間の準同型

信州大学理学部　真次　康夫 (Yasuo Matsugu)
植木誠一郎 (Sei-ichiro Ueki)
Faculty of Science, Shinshu University

1 Introduction

$B \equiv B_n$ を $\mathbb{C}^n$ の単位球, $S \equiv \partial B$ を単位球面とする. ν, σ はそれぞれ $\mathbb{C}^n$ 上の Lebesgue 測度, S 上の Euclid 測度であり, $\nu(B) = 1$, $\sigma(S) = 1$ となるように正規化したものを表す. $\alpha \in (-1, \infty)$ に対し, $c_\alpha = \Gamma(n+\alpha+1)/\{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\}$, $d\nu_\alpha(z) = c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha \nu(z)$ $(z \in B)$ と置く. ここで, Γ はガンマ関数である. この時, ν_α は B 上の正値 Borel 測度であり, $\nu_\alpha(B) = 1$ である. $H(B)$ は B 上の正則関数の全体を表す.

$p \in (1, \infty)$ に対し, B 上の Privalov 空間 $N^p(B)$ を次のように定義する:

$$N^p(B) = \left\{ f \in H(B) : \sup_{0<r<1} \int_S \{\log(1+|f_r|)\}^p \, d\sigma < \infty \right\}.$$

但し, $f_r(\zeta) = f(r\zeta)$ $(0 < r < 1, \zeta \in S)$ である. B 上の Nevanlinna 空間 $N(B)$, Smirnov 族 $N^*(B)$ を次のように定義する:

$$N(B) = \left\{ f \in H(B) : \sup_{0<r<1} \int_S \log(1+|f_r|) \, d\sigma < \infty \right\}.$$

$f \in N(B)$ に対し, S のほとんど全ての点 ζ で $f^*(\zeta) \equiv \lim_{r\uparrow 1} f_r(\zeta)$ が存在する.

$$N^*(B) = \left\{ f \in N(B) : \lim_{r\uparrow 1} \int_S \log(1+|f_r|) \, d\sigma = \int_S \log(1+|f^*|) \, d\sigma \right\}.$$

$p \in [1, \infty)$, $\alpha \in (-1, \infty)$ に対し, B 上の荷重 Bergman-Privalov 空間 $(AN)^p(\nu_\alpha)$ を次のように定義する:

$$(AN)^p(\nu_\alpha) = \left\{ f \in H(B) : \int_B \{\log(1+|f|)\}^p \, d\nu_\alpha < \infty \right\}.$$

便宜上, $N^1(B) \equiv N^*(B)$, $(AN)^p(\nu_{-1}) \equiv N^p(B)$ $(1 \leq p < \infty)$ と置く.

各 $p \in [1,\infty)$, $\alpha \in [-1,\infty)$ に対し, $(AN)^p(\nu_\alpha)$ 上の $\|\cdot\|_{p,\alpha}$, $d_{p,\alpha}(\cdot,\cdot)$ を次のように定義する:

$$\|f\|_{p,\alpha} = \begin{cases} \left[\displaystyle\int_S \{\log(1+|f^*|)\}^p \, d\sigma\right]^{\frac{1}{p}} & \text{if} \quad \alpha = -1, \\ \left[\displaystyle\int_B \{\log(1+|f|)\}^p \, d\nu_\alpha\right]^{\frac{1}{p}} & \text{if} \quad -1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

$$d_{p,\alpha}(f,g) = \|f-g\|_{p,\alpha} \qquad (f,g \in (AN)^p(\nu_\alpha)).$$

この時, $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ は次の 5 つの条件を満たす:

(i) 各 $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$ に対して, $0 \le \|f\|_{p,\alpha} < \infty$.

(ii) $\|f\|_{p,\alpha} = 0$ となるのは B 上で $f = 0$ の時に限る.

(iii) $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\min\{1,|\lambda|\}\|f\|_{p,\alpha} \le \|\lambda f\|_{p,\alpha} \le \max\{1,|\lambda|\}\|f\|_{p,\alpha}$$

が成り立つ.

(iv) $\|f+g\|_{p,\alpha} \le \|f\|_{p,\alpha} + \|g\|_{p,\alpha} \qquad (f,g \in (AN)^p(\nu_\alpha)).$

(v) $\|f\cdot g\|_{p,\alpha} \le \|f\|_{p,\alpha} + \|g\|_{p,\alpha} \qquad (f,g \in (AN)^p(\nu_\alpha)).$

$\|\cdot\|_{p,\alpha}$ のこの性質により $(AN)^p(\nu_\alpha)$ $(1 \le p < \infty, -1 \le \alpha < \infty)$ は加法, 乗法に関して閉じており, 従って algebra をなす. また, $d_{p,\alpha}$ は $(AN)^p(\nu_\alpha)$ 上の平行移動に関して不変な距離になる. この距離に関して $(AN)^p(\nu_\alpha)$ は完備であり, その加法, 乗法, スカラー乗法は何れも連続である. 従って $((AN)^p(\nu_\alpha), d_{p,\alpha})$ は F-algebra をなす. さらに, $(AN)^p(\nu_\alpha)$ における収束は B 上の広義一様収束を導く.

Privalov 空間 $N^p(B_1)$ は I. I. Privalov [8] の中で最初に考察された関数空間であり, その性質については M. Stoll [13], A. V. Subbotin [15] 等で論じられている. また, 1 次元の場合の Bergman-Privalov 空間 $(AN)^1(\nu)$ は M. Stoll [13] の中で最初に導入され論じられたものである.

2 Notations and Preliminaries

B から B の上への両正則写像の全体を $Aut(B)$ で表す. 各 $a \in B$ に対し, a によって生成される線型部分空間を $[a]$ で表す. P_a を $\mathbb{C}^n$ から $[a]$ の上への直交射影とする. $a = 0$ の時, $P_0 = 0$ であり, $a \ne 0$ の時,

$$P_a(z) = \frac{\langle z,a\rangle}{\langle a,a\rangle} a \qquad (z \in \mathbb{C}^n)$$

と表現される．さらに写像 φ_a を次のように定義する:

$$\varphi_a(z)=\frac{a-P_a(z)-\sqrt{1-|a|^2}(z-P_a(z))}{1-\langle z,a\rangle}\qquad (z\in B).$$

この時，φ_a について次のことが成立する ([10]Theorem 2.2.2, Theorem 2.2.6):

Lemma 1. 各 $a\in B$ に対し，

(i) $\varphi_a(0)=a$, $\varphi_a(a)=0$.

(ii) $$1-|\varphi_a(z)|^2=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z,a\rangle|^2}\qquad (z\in B).$$

(iii) $\varphi_a\in Aut(B)$, かつ ${\varphi_a}^{-1}=\varphi_a$.

(iv) $$(J_{\mathbb{R}}\varphi_a)(z)=\left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle z,a\rangle|^2}\right)^{n+1}\qquad (z\in B).$$

但し，$(J_{\mathbb{R}}\varphi_a)(z)$ は z における φ_a の実ヤコビアンである．

φ を B から B への単葉な正則写像とする．$z\in B$ に対し，$\Omega_\varphi(z)$ を次のように定義する:

$$\Omega_\varphi(z)=\frac{\|\varphi'(z)\|^2}{|J_\varphi(z)|^2}.$$

但し，$\varphi'(z)$ は z における φ の微分であり，$\|\varphi'(z)\|$ は $\varphi'(z)$ の作用素ノルムである．また，$J_\varphi(z)$ は z における φ の複素ヤコビアンである．次は容易に示される:

Lemma 2. φ は B から B への単葉な正則写像で，$\displaystyle\sup_{w\in\varphi(B)}\|(\varphi^{-1})'(w)\|<\infty$ を満たすものと仮定する．この時，

$$\sup_{z\in B}\Omega_\varphi(z)<\infty$$

が成り立つ．

ψ を $\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t}=\infty$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能非負非減少な凸関数とする．このような関数 ψ に対し，Hardy-Orlicz 空間 $H_\psi(B)$, 荷重 Bergman-Orlicz 空間 $A_\psi(\nu_\alpha)$ を次のように定義する:

$$H_\psi(B)=\left\{f\in H(B)\,:\,\sup_{0<r<1}\int_S\psi(\log|f_r|)\,d\sigma<\infty\right\},$$
$$A_\psi(\nu_\alpha)=\left\{f\in H(B)\,:\,\int_B\psi(\log|f|)\,d\nu_\alpha<\infty\right\}.$$

$\psi(t)=\{\log(1+e^t)\}^p\quad(1<p<\infty)$ の時，$H_\psi(B)$ は $N^p(B)$ であり，$A_\psi(\nu_\alpha)$ は $(AN)^p(\nu_\alpha)$ である．これらの $H_\psi(B)$, $A_\psi(\nu_\alpha)$ は次のように特徴づけられる:

Lemma 3 (C. Ouyang-J. Riihentaus [7]). $f \in H(B)\backslash\{0\}$ に対し, 次は $f \in H_\psi(B)$ である為の必要十分条件である:

$$\int_B \psi''(\log|f(z)|)\frac{|(\nabla f)(z)|^2}{|f(z)|^2}(1-|z|^2)\,d\nu(z) < \infty.$$

但し, $|(\nabla f)(z)|^2 = \sum_{j=1}^n |\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)|^2$ である.

Lemma 4 ([4]). $-1 < \alpha < \infty$ とする. $f \in H(B) \setminus \{0\}$ に対し, 次は $f \in A_\psi(\nu_\alpha)$ である為の必要十分条件である:

$$\int_B \psi''(\log|f(z)|)\frac{|(\mathcal{R}f)(z)|^2}{|z|^2|f(z)|^2}(1-|z|^2)^2\,d\nu_\alpha(z) < \infty.$$

但し, $(\mathcal{R}f)(z) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z)$ である.

特に $(AN)^p(\nu_\alpha)\quad(-1 < \alpha < \infty, 1 \le p < \infty)$ については次のことが成り立つ:

Lemma 5 ([5]). $-1 < \alpha < \infty$, $1 \le p < \infty$ とする. $f \in H(B) \setminus \{0\}$ に対し, 次は $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$ である為の必要十分条件である:

$$\int_B \widetilde{\Delta}(\{\log(1+|f|)\}^p)\,d\nu_\alpha < \infty.$$

但し, $\widetilde{\Delta}$ は B 上の Bergman 計量に関する Laplacian である.

Lemma 6 ([10]Theorem 6.6.5). T を B 上の有界正則関数の全体 $H^\infty(B)$ から $H(B)$ への乗法的線型写像とする. T は $T(A(B)) \supsetneqq \mathbb{C}$ を満たすものとする. ここで, $A(B) = C(\overline{B}) \cap H(B)$ は超球環である. この時, B から B への正則写像 φ が存在し, T は次の形で与えられる:

$$T(f) = f \circ \varphi \qquad (f \in H^\infty(B)).$$

次は Lemma 1 等を用いて簡単な計算により示される:

Lemma 7. $1 \le p \le q < \infty$, $-1 \le \alpha < \infty$ とする. $\varphi \in Aut(B)$ に対して, φ による合成作用素 $C_\varphi : (AN)^q(\nu_\alpha) \longrightarrow (AN)^p(\nu_\alpha)$ は有界である.

Lemma 8 ([14]Theorem 6.5). $f \in N(B)$ に対し, S 上の正値 Borel 測度 μ が存在し, 次が成立する:

(i) $\log(1+|f(z)|) \le P[\mu](z) \qquad (z \in B)$.
但し, $P[\mu]$ は μ の Poisson 積分である:

$$P[\mu](z) = \int_S P(z,\zeta)\, d\mu(\zeta), \quad P(z,\zeta) = \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2n}}.$$

(ii) $\|\mu\| = \sup_{0<r<1} \int_S \log(1+|f_r|)\, d\sigma$.
特に $f \in N^*(B)$ の場合は, $\|\mu\| = \|f\|_{N^*(B)}$ である.

3 Main Results

次の Theorem 1, Theorem 2, Corollary 1 は一変数の結果 [6, 9, 16] の多変数版である:

Theorem 1. $1 \le p < \infty$, $-1 \le \alpha < \infty$ とする. γ を $(AN)^p(\nu_\alpha)$ 上の連続な自明でない (すなわち $\gamma \not\equiv 0$) 乗法的線型汎関数とする. この時, B の点 w が存在して γ は

$$\gamma(f) = f(w) \qquad (f \in (AN)^p(\nu_\alpha))$$

を満たす.

Proof. $\mathbb{C}^n$ の座標関数を π_j $(1 \le j \le n)$ とすると各 π_j は $(AN)^p(\nu_\alpha)$ に属する. この π_j に対して $w_j = \gamma(\pi_j)$ とし, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ と置くと w は $\mathbb{C}^n$ の点である.

まず, 任意の多項式 f に対して,

$$\gamma(f) = f(w) \tag{1}$$

が成り立つことを証明する. f は $\mathbb{C}^n$ における多項式であるから π_j を用いて

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n_+} c_\alpha \pi_1^{\alpha_1} \cdot \pi_2^{\alpha_2} \cdots \pi_n^{\alpha_n}$$

と表される. 但し, $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^n_+} \subset \mathbb{C}$ は有限個を除いて 0 である. γ は乗法的線型汎関数であるから,

$$\begin{aligned}
\gamma(f) &= \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n_+} c_\alpha \gamma(\pi_1)^{\alpha_1} \cdot \gamma(\pi_2)^{\alpha_2} \cdots \gamma(\pi_n)^{\alpha_n} \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n_+} c_\alpha w_1^{\alpha_1} \cdot w_2^{\alpha_2} \cdots w_n^{\alpha_n} \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n_+} c_\alpha w^\alpha \\
&= f(w).
\end{aligned}$$

ゆえに (1) が成り立つ.

次に $w \in B$ であることを証明する. 仮に $w \notin B$ とすると次の 3 条件を満たす $\mathbb{C}^n$ における多項式 f が存在する:

(i) $|f| < 1$ in $\overline{B} \setminus \{\zeta\}$.

(ii) $f(\zeta) = 1$.

(iii) $f(w) \geq 1$.

但し, $\zeta = \frac{1}{|w|} w \in S$ である. この f に対して, $f_j = f^j$ $(j \in \mathbb{N})$ と置くと各 f_j も多項式であり, B 上で

$$0 \leq \{\log(1 + |f_j|)\}^p \leq (\log 2)^p \qquad (j \in \mathbb{N}),$$
$$\lim_{j \to \infty} \{\log(1 + |f_j|)\}^p = 0$$

を満たす. 従って, Lebesgue 収束定理により

$$\lim_{j \to \infty} \int_B \{\log(1 + |f_j|)\}^p \, d\nu_\alpha = 0$$

が成り立つ. ゆえに

$$\lim_{j \to \infty} \|f_j\|_{p,\alpha} = 0$$

である. この時, γ の連続性により

$$\lim_{j \to \infty} \gamma(f_j) = 0 \tag{2}$$

が従う.

他方, 各 f_j は多項式であるから (1) が成立するので f_j の決め方より,

$$\gamma(f_j) = f_j(w) = \{f(w)\}^j \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

f の取り方より $f(w) \geq 1$ であるから,

$$\gamma(f_j) \geq 1 \qquad (j \in \mathbb{N}) \tag{3}$$

となる. (2) と (3) は矛盾する. ゆえに $w \in B$ でなければならない.

最後に各 $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$ に対して,

$$\gamma(f) = f(w)$$

が成り立つことを証明する. $\mathbb{C}^n$ における多項式全体は $(AN)^p(\nu_\alpha)$ において稠密であるから, 各 $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$ に対して, ある多項式列 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ が存在して,

$$\lim_{j \to \infty} \|f_j - f\|_{p,\alpha} = 0 \tag{4}$$

を満たす. $(AN)^p(\nu_\alpha)$ における収束は B 上の広義一様収束を導くので (4) により $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ は B 上で広義一様収束である. 従って, B の各点で収束するので, 特に点 w において収束する. すなわち,

$$\lim_{j\to\infty} f_j(w) = f(w) \tag{5}$$

が成り立つ. 各 f_j は多項式であるから (1) により

$$\gamma(f_j) = f_j(w) \qquad (j \in \mathbb{N}) \tag{6}$$

が成り立つ. さらに γ の連続性と (4) により

$$\lim_{j\to\infty} \gamma(f_j) = \gamma(f) \tag{7}$$

が従う. (5)~(7) により

$$\gamma(f) = f(w)$$

が成り立つ. □

Theorem 2. $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $-1 \leq \alpha < \infty$ とする. Γ を $(AN)^q(\nu_\alpha)$ から $(AN)^p(\nu_\alpha)$ への連続な環準同型とし, $\Gamma((AN)^q(\nu_\alpha)) \supsetneqq \mathbb{C}$ を満たすものとする. この時, B から B への正則写像 φ が存在し, Γ は次の形で与えられる:

$$\Gamma(f) = f \circ \varphi \qquad (f \in (AN)^q(\nu_\alpha)).$$

Proof. $H^\infty(B) \subset (AN)^q(\nu_\alpha)$ であるから $\widetilde{\Gamma}$ を Γ の $H^\infty(B)$ への制限写像とすると, $\widetilde{\Gamma}$ は $H^\infty(B)$ から $H(B)$ への環準同型写像になる. $\widetilde{\Gamma}$ は $\widetilde{\Gamma}(A(B)) \supsetneqq \mathbb{C}$ を満たすことを示す. 仮に $\widetilde{\Gamma}(A(B)) = \mathbb{C}$ と仮定すると, $\Gamma((AN)^q(\nu_\alpha)) \supsetneqq \mathbb{C}$ によりある $f \in (AN)^q(\nu_\alpha)$ が存在して, $\Gamma(f)$ は非定数である. $A(B)$ は $(AN)^q(\nu_\alpha)$ において稠密であるから, この f に対して $A(B)$ に属する関数列 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が存在して,

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_{q,\alpha} = 0 \tag{1}$$

が成り立つ. 今, $\widetilde{\Gamma}(A(B)) = \mathbb{C}$ であるから, 各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $\widetilde{\Gamma}(f_j)$ は定数関数であり, 従って, ある複素数 c_j が存在して,

$$\Gamma(f_j) = \widetilde{\Gamma}(f_j) \equiv c_j \tag{2}$$

を満たす. Γ の連続性と (1) により

$$\lim_{j\to\infty} \|\Gamma(f_j) - \Gamma(f)\|_{p,\alpha} = 0$$

であるから, (2) と合わせると,

$$\lim_{j\to\infty} \|c_j - \Gamma(f)\|_{p,\alpha} = 0$$

が成り立つ. $(AN)^p(\nu_\alpha)$ における収束は B 上の広義一様収束を導くから, $\lim_{j\to\infty} c_j = \Gamma(f)$ は B 上で広義一様収束し, 従って B の各点で収束する. ゆえに各 $w \in B$ に対して $\lim_{j\to\infty} c_j = \Gamma(f)(w)$ であり, 特に $w=0$ として $\lim_{j\to\infty} c_j = \Gamma(f)(0)$ であるから

$$\Gamma(f)(w) = \lim_{j\to\infty} c_j = \Gamma(f)(0).$$

すなわち, $\Gamma(f)$ は定数関数である. このことは f の取り方に反する. よって $\widetilde{\Gamma}(A(B)) \supsetneqq \mathbb{C}$ が成立する. $\widetilde{\Gamma}$ は $H^\infty(B)$ から $H(B)$ への環準同型写像であり, $\widetilde{\Gamma}(A(B)) \supsetneqq \mathbb{C}$ を満たすので, Lemma 6 により, B から B への正則写像 φ が存在して,

$$\widetilde{\Gamma}(f) = f \circ \varphi \qquad (f \in H^\infty(B))$$

が成立する. $\widetilde{\Gamma}$ は Γ の $H^\infty(B)$ への制限写像であったから, 各 $f \in H^\infty(B)$ に対して,

$$\Gamma(f) = f \circ \varphi \tag{3}$$

である.

最後に各 $f \in (AN)^q(\nu_\alpha)$ に対して,

$$\Gamma(f) = f \circ \varphi$$

が成り立つことを証明する. $H^\infty(B)$ は $(AN)^q(\nu_\alpha)$ において稠密であるから, 各 $f \in (AN)^q(\nu_\alpha)$ に対して $H^\infty(B)$ に属する関数列 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が存在し,

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_{q,\alpha} = 0 \tag{4}$$

を満たす. 従って,

$$\lim_{j\to\infty} f_j = f \tag{5}$$

は B 上の各点収束である. また, Γ の連続性と (4) により

$$\lim_{j\to\infty} \Gamma(f_j) = \Gamma(f) \tag{6}$$

は B 上の各点収束であることがわかる. さらに各 $j \in \mathbb{N}$ に対して, $f_j \in H^\infty(B)$ であるから (3) により

$$\Gamma(f_j) = f_j \circ \varphi \qquad (j \in \mathbb{N}) \tag{7}$$

が成り立つ. (5)~(7) により B 上の各点 z で,

$$\begin{aligned}\Gamma(f)(z) &= \lim_{j\to\infty} \Gamma(f_j)(z) \\ &= \lim_{j\to\infty} (f_j \circ \varphi)(z) \\ &= (f \circ \varphi)(z).\end{aligned}$$

□

Corollary 1. $1 \le p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $-1 \le \alpha < \infty$ とする. Γ を $(AN)^q(\nu_\alpha)$ から $(AN)^p(\nu_\alpha)$ の上への連続な同型写像とするとき, 次が成立する:

(i) $\varphi \in Aut(B)$ が存在し, Γ は

$$\Gamma(f) = f \circ \varphi \qquad (f \in (AN)^q(\nu_\alpha))$$

を満たす.

(ii) $p = q$.

Proof. (i) は Theorem 2 から従う. (ii) を示す為にまず, $p < q$ とする. W. Rudin [10], p.140, Theorem 7.3.8 及び, J. H. Shapiro [12], p.246, Corollary 2.5 により $f \in (AN)^p(\nu_\alpha) \setminus (AN)^q(\nu_\alpha)$ である関数 f が存在する. $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$, $\Gamma^{-1}(f) \in (AN)^q(\nu_\alpha)$ であり,

$$f = \Gamma(\Gamma^{-1}(f)) = \Gamma^{-1}(f) \circ \varphi$$

となる. $\varphi \in Aut(B)$ であるから, Lemma 7 により $f \in (AN)^q(\nu_\alpha)$ である. これは $f \notin (AN)^q(\nu_\alpha)$ に反する. ゆえに $p \ge q$ でなければならない. 今の議論と同様にして $p \le q$ が示される. 従って, $p = q$ であることがわかる. □

次の Theorem 3 で仮定する φ の条件は Cowen-MacCluer[2]Theorem 3.41 で取り上げられている:

Theorem 3. $1 \le p < \infty$, $-1 \le \alpha < \infty$ とする. φ は B から B への単葉な正則写像であり, $\sup_{z\in B} \Omega_\varphi(z) < \infty$ を満たすものとする. この時, $C_\varphi : (AN)^p(\nu_\alpha) \longrightarrow (AN)^p(\nu_\alpha)$ は有界である.

Proof. 先ず, $\alpha = -1$, $0 \in \varphi(B)$ の場合を考える. $a = \varphi^{-1}(0)$, $\psi = \varphi \circ \varphi_a$ と置く. この時, ψ は B から B への単葉な正則写像で $\psi(0) = 0$ である. Schwarz の補題により

$$|\psi(z)| \le |z| \qquad (z \in B) \tag{1}$$

が成り立つ. また,

$$\sup_{z\in B}\Omega_\psi(z) \le \sup_{z\in B}\Omega_\varphi(z)\cdot\sup_{z\in B}\Omega_{\varphi_a}(z)$$

であり, 仮定より

$$\sup_{z\in B}\Omega_\varphi(z) < \infty,$$

Lemma 2 より

$$\sup_{z\in B}\Omega_{\varphi_a}(z) < \infty$$

であるから

$$K \equiv \sup_{z\in B}\Omega_\psi(z) < \infty \tag{2}$$

となる.

各 $f\in N^p(B)\setminus\{0\}$ に対し, $f\circ\psi\in H(B)\setminus\{0\}$ であり,

$$|\nabla(f\circ\psi)(z)|^2 \le n|(\nabla f)\circ\psi(z)|^2\|\psi'(z)\|^2 \qquad (z\in B) \tag{3}$$

が成り立つ. (1), (2), (3) により

$$\begin{aligned}
&\int_B \chi''(\log|(f\circ\psi)(z)|)\frac{|\nabla(f\circ\psi)(z)|^2}{|(f\circ\psi)(z)|^2}(1-|z|^2)\,d\nu(z)\\
&\le \int_B \chi''(\log|f(\psi(z))|)\frac{n|(\nabla f)(\psi(z))|^2\|\psi'(z)\|^2}{|f(\psi(z))|^2}(1-|\psi(z)|^2)\,d\nu(z)\\
&= n\int_B \chi''(\log|f(\psi(z))|)\frac{|(\nabla f)(\psi(z))|^2}{|f(\psi(z))|^2}(1-|\psi(z)|^2)\Omega_\psi(z)|J_\psi(z)|^2\,d\nu(z)\\
&\le nK\int_B \chi''(\log|f(\psi(z))|)\frac{|(\nabla f)(\psi(z))|^2}{|f(\psi(z))|^2}(1-|\psi(z)|^2)|J_\psi(z)|^2\,d\nu(z)\\
&\le nK\int_B \chi''(\log|f(w)|)\frac{|(\nabla f)(w)|^2}{|f(w)|^2}(1-|w|^2)|\,d\nu(w)
\end{aligned} \tag{4}$$

が成立する. 但し, $\chi(t)=\{\log(1+e^t)\}^p \quad (t\in\mathbb{R})$ である.

$f\in N^p(B)$ であるから Lemma 3 より

$$\int_B \chi''(\log|f(w)|)\frac{|(\nabla f)(w)|^2}{|f(w)|^2}(1-|w|^2)\,d\nu(z) < \infty \tag{5}$$

である. (4), (5) 及び Lemma 3 により $f\circ\psi\in N^p(B)$ であることが従う. $\varphi_a\in Aut(B)$ であるから Lemma 7 より $f\circ\psi\circ\varphi_a\in N^p(B)$ である. すなわち $f\circ\varphi\in N^p(B)$ である. φ による合成写像 C_φ は $N^p(B)$ から $N^p(B)$ への線型写像となり, 閉グラフ定理を用いることにより, $C_\varphi : N^p(B) \longrightarrow N^p(B)$ は有界であることが示される.

$0 \notin \varphi(B)$ の場合は, $\psi = \varphi_b \circ \varphi \quad (b = \varphi(0))$ と置けば $0 \in \psi(B)$ である. 上記により $f \in N^p(B)$ に対し, $f \circ \psi \in N^p(B)$ が従う. ψ の決め方より $\varphi = \varphi_b \circ \psi$ であり, $\varphi_b \in Aut(B)$ であるから Lemma 7 より $f \circ \varphi_b \in N^p(B)$ である. 従って, $f \circ \varphi = (f \circ \varphi_b) \circ \psi \in N^p(B)$ である. このことから $0 \in \varphi(B)$ の場合と同様にして $C_\varphi : N^p(B) \longrightarrow N^p(B)$ は有界であることが示される.

$-1 < \alpha < \infty$ の時は, Lemma 4 及び, Lemma 5 を用いて $\alpha = -1$ の時とほぼ同様にして示される. □

次は単位円板上の定理 ([1]Theorem 4.1) を単位球 B 上で考察したものである:

Theorem 4. $1 \le p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ とする. φ を B から B への正則写像とする.

(a) φ が

$$\sup_{\substack{0<r<1 \\ \eta \in S}} \int_S \left(\frac{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}{|1 - \langle \varphi(r\zeta), \eta \rangle|^2} \right)^{np} d\sigma(\zeta) < \infty$$

を満たす時, 次が成立する:

(i) $\|f \circ \varphi\|_{N^p(B)} \le K \|f\|_{N(B)} \quad (f \in H(B))$.

但し,

$$K \equiv \sup_{\substack{0<r<1 \\ \eta \in S}} \left[\int_S \left(\frac{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}{|1 - \langle \varphi(r\zeta), \eta \rangle|^2} \right)^{np} d\sigma(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) $C_\varphi(N(B)) \subset N^p(B)$.

(iii) $C_\varphi : N(B) \longrightarrow N^p(B)$ は連続である.

(iv) $C_\varphi : N^q(B) \longrightarrow N^p(B)$ は有界である.

(b) φ が

$$\sup_{w \in B} \int_B \left(\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \langle \varphi(z), w \rangle|^2} \right)^{p(n+1+\alpha)} d\nu_\alpha(z) < \infty$$

を満たす時, 次が成立する:

(i) $\|f \circ \varphi\|_{(AN)^p(\nu_\alpha)} \le K \|f\|_{(AN)^1(\nu_\alpha)} \quad (f \in H(B))$.

但し,

$$K \equiv \sup_{w \in B} \left[\int_B \left(\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \langle \varphi(z), w \rangle|^2} \right)^{p(n+1+\alpha)} d\nu_\alpha(z) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) $C_\varphi : (AN)^q(\nu_\alpha) \longrightarrow (AN)^p(\nu_\alpha)$ は有界である.

Proof. (a) を証明する. $f \in N(B)$ に対し, Lemma 8 により S 上の正値 Borel 測度 μ が存在し, 次が成立する:

$$\log(1+|f(z)|) \leq P[\mu](z) \qquad (z \in B), \tag{1}$$

$$\|\mu\| = \sup_{0<r<1} \int_S \log(1+|f_r|)\, d\sigma. \tag{2}$$

各 $r \in (0,1)$ に対し, (1) により

$$\int_S \{\log(1+|(f\circ\varphi)(r\zeta)|)\}^p\, d\sigma(\zeta) \leq \int_S \{P[\mu](\varphi(r\zeta))\}^p\, d\sigma(\zeta). \tag{3}$$

ここで, Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}\{P[\mu](\varphi(r\zeta))\}^p &= \left[\int_S P(\varphi(r\zeta),\eta)\, d\mu(\eta)\right]^p \\ &\leq \int_S \{P(\varphi(r\zeta),\eta)\}^p\, d\mu(\eta)\cdot\|\mu\|^{p-1} \end{aligned}\tag{4}$$

が成立する. (2), (3), (4) により

$$\begin{aligned}&\int_S \{\log(1+|(f\circ\varphi)_r(\zeta)|)\}^p\, d\sigma(\zeta) \\ &\leq \left[\sup_{0<r<1}\int_S \log(1+|f_r|)\, d\sigma\right]^{p-1}\cdot\int_S \{P(\varphi(r\zeta),\eta)\}^p\, d\mu(\eta) \\ &\leq K^p\|f\|_{N(B)}^{p-1}\cdot\|\mu\| \\ &= K^p\|f\|_{N(B)}^p.\end{aligned}$$

従って, (i) が成り立つ. (ii), (iii) は (i) から従う. また, $1 \leq q < \infty$ であるから Hölder の不等式により $\|f\|_{N(B)} \leq \|f\|_{N^q(B)}$ が成立するから (i) により,

$$\|f\circ\varphi\|_{N^p(B)} \leq K\|f\|_{N^q(B)} \qquad (f \in N^q(B))$$

である. この不等式により $C_\varphi : N^q(B) \longrightarrow N^p(B)$ は連続であるから (iv) が従う.

次に (b) を示す. $f \in H(B)$ に対し, $\log(1+|f|)$ は B 上の $\mathcal{M}$-劣調和関数であるから, $z \in B$ に対し,

$$\log(1+|f(z)|) \leq \int_B \log(1+|(f\circ\varphi_z)(w)|)\, d\nu_\alpha(w) \tag{5}$$

が成立する. Lemma 1 により

$$(J_{\mathbb{R}}\varphi_z)(w)\cdot(1-|\varphi_z(w)|^2)^\alpha = \left(\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z,w\rangle|^2}\right)^{n+1+\alpha}(1-|w|^2)^\alpha$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&\int_B \log(1+|(f\circ\varphi_z)(w)|)\,d\nu_\alpha(w)\\
&= c_\alpha \int_B \log(1+|f(\varphi_z(w))|)(1-|w|^2)^\alpha\,d\nu(w)\\
&= c_\alpha \int_B \log(1+|f(w)|)(J_{\mathbf{R}}\varphi_z)(w)\cdot(1-|\varphi_z(w)|^2)^\alpha\,d\nu(w)\\
&= c_\alpha \int_B \log(1+|f(w)|)\left(\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z,w\rangle|^2}\right)^{n+1+\alpha}(1-|w|^2)^\alpha\,d\nu(w)\\
&= \int_B \log(1+|f(w)|)\left(\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z,w\rangle|^2}\right)^{n+1+\alpha}d\nu_\alpha(w) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

が成立する. (5), (6) より

$$
\log(1+|f(z)|)\le \int_B \log(1+|f(w)|)\left(\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z,w\rangle|^2}\right)^{n+1+\alpha}d\nu_\alpha(w) \qquad (z\in B) \quad (7)
$$

が成り立つ. $\varphi(z)\in B$ であるから (7) により

$$
\begin{aligned}
&\int_B \{\log(1+|(f\circ\varphi)(z)|)\}^p\,d\nu_\alpha(z)\\
&\le \int_B \left[\int_B \log(1+|f(w)|)\left(\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\langle\varphi(z),w\rangle|^2}\right)^{n+1+\alpha}d\nu_\alpha(w)\right]^p d\nu_\alpha(z)
\end{aligned}
$$

である. Hölder の不等式により

$$
\begin{aligned}
&\left[\int_B \log(1+|f(w)|)\left(\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\langle\varphi(z),w\rangle|^2}\right)^{n+1+\alpha}d\nu_\alpha(w)\right]^p\\
&\le \int_B \log(1+|f(w)|)\left(\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\langle\varphi(z),w\rangle|^2}\right)^{p(n+1+\alpha)}d\nu_\alpha(w)\\
&\qquad\times\left[\int_B \log(1+|f(w)|)\,d\nu_\alpha(w)\right]^{p-1}
\end{aligned}
$$

となる. 従って,

$$
\begin{aligned}
&\int_B \{\log(1+|(f\circ\varphi)(z)|)\}^p \, d\nu_\alpha(z) \\
&\le \left[\int_B \log(1+|f(w)|)\, d\nu_\alpha(w)\right]^{p-1} \\
&\quad \times \int_B d\nu_\alpha(z) \int_B \log(1+|f(w)|)\left(\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\langle\varphi(z),w\rangle|^2}\right)^{p(n+1+\alpha)} d\nu_\alpha(w) \\
&= \left[\int_B \log(1+|f(w)|)\, d\nu_\alpha(w)\right]^{p-1} \\
&\quad \times \int_B \log(1+|f(w)|)\, d\nu_\alpha(w) \int_B \left(\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\langle\varphi(z),w\rangle|^2}\right)^{p(n+1+\alpha)} d\nu_\alpha(z) \\
&\le K^p \|f\|^p_{(AN)^1(\nu_\alpha)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. これより (i) が従う. (ii) は (a) の (iv) と同様にして示される. □

References

[1] J. S. Choa and H. O. Kim. Composition operators between Nevanlinna-type spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 257, pp. 378–402, 2001.

[2] Carl C. Cowen and Barbara D. MacCluer. *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions.* CRC Press, 1994.

[3] B. D. MacCluer and J. H. Shapiro. Angular derivatives and compact composition operators on the Hrady and Bergman spaces. *Can. J. Math.*, Vol. 38, pp. 878–906, 1986.

[4] Y. Matsugu and J. Miyazawa. A characterization of weighted Bergman-Orlicz spaces on the unit ball of $\mathbb{C}^n$. preprint.

[5] Y. Matsugu and J. Miyazawa. A characterization of weighted Bergman-Privalov spaces on the unit ball of $\mathbb{C}^n$. preprint.

[6] N. Mochizuki. Algebras of holomorphic functions between H^p and N_*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 105, pp. 898–902, 1989.

[7] C. Ouyang and J. Riihentaus. Characterizations of Hardy-Orlicz spaces on $\mathbb{C}^n$. *Math. Scand.*, Vol. 80, pp. 25–40, 1997.

[8] I. I. Privalov. *Boundary Properties of Singled-Valued Analytic Functiones.* Izd. Moskov. Univ., Moscow, 1941. in Russian.

[9] J. W. Roberts and M. Stoll. Prime and principal ideals in the algebra N^+. *Arch. Math.*, Vol. 27, pp. 387–393, 1976.

[10] W. Rudin. *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.

[11] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, second edition, 1991.

[12] J. H. Shapiro. Zeros of functions in weighted Bergman spaces. *Michigan Math. J.*, Vol. 24, pp. 243–256, 1977.

[13] M. Stoll. Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions. *Ann. Polon. Math.*, Vol. 35, pp. 139–158, 1977.

[14] M. Stoll. *Invariant Potential Theory in the Unit of Ball of* $\mathbb{C}^n$. Cambridge Univ. Press, 1994.

[15] A. V. Subbotin. Functional properties of Privalov spaces of holomorphic functions in several variables. *Math. Notes.*, Vol. 65, pp. 230–237, 1999.

[16] N. Yanagihara and Y. Nakamura. Composition operators on the class N^+. *TRU Math.*, Vol. 14, pp. 9–16, 1978.