数理解析研究所講究録 1243 巻 2002 年 69-84

可算劣加法的汎関数に対するコロフキン型定理

お茶大・人間文化研究科　渡辺 ヒサ子 (Hisako Watanabe)
Graduate School of Humanities and Sciences, Ochanomizu Univ.

1. 序

可算基を持つ局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対して, 無限遠点で 0 となる X 上の実数値関数の全体を $C_0(X)$ とする. また, H は $C_0(X)$ の部分空間とする. H. Bauer と K. Donner は [BD] で, 空間 $C_0(X)$ でコロフキン型の定理が成り立つことを証明した. すなわち,

関数 $f \in C_0(X)$ に対し, 次の (i), (ii) は同値である ;

(i) f は H のコロフキン閉包 Kor(H) に属する,
(ii) $x \in X$ と $\mu(X) < \infty$ である正ラドン測度 μ に対して,

$$\int h d\mu = h(x) \qquad (\forall h \in H) \tag{1.1}$$

ならば,

$$\int f d\mu = f(x)$$

である.

ここで, H をバナッハ束 E の部分集合とすると, E 上の正線形作用素からなる一様有界なネット $\{T_\alpha\}$ に対し,

$$\lim_\alpha T_\alpha h = h \qquad (\forall h \in H)$$

ならば,

$$\lim_\alpha T_\alpha f = f$$

であるような $f \in E$ の全体を Kor(H) で表すものとする.

(1.1) が成り立つような正ラドン測度 μ を H-表現測度というが, 空間 $L^p(\nu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ についても H. Donner は H-表現測度を使って, Kor(H) の特徴づけを行っている (cf, [D1, D2]).

また, D. Feyer は [Fe] で, 測度を一般化して, 可算劣加法的汎関数を導入している. すなわち, X 上で定義された $\pm$ も許す拡張された実数値関数の全体を $J(X)$ で表すとき, $J(X)$ から $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ への写像 γ が, 次の (c_1)-(c_4) の性質を持つとき, 可算劣加法的汎関数と呼ばれる;

(c_1) $\gamma(f) = \gamma(|f|)$,
(c_2) $0 \leq f \leq g \Longrightarrow \gamma(f) \leq \gamma(g)$,
(c_3) $b \in \mathbf{R} \Longrightarrow \gamma(bf) = |b|\gamma(f)$,

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(c_4) $f,\ f_n \geq 0,\ f \leq \sum_n f_n \Longrightarrow \gamma(f) \leq \sum_n \gamma(f_n)$.

ここで, (c_2) は, 条件 (c_4) から導きだされるが, よく使用されるので, 条件として加えておく.

$\gamma(\chi_B) = 0$ であるような B を γ-極集合という. また, ある性質が集合 A 上で γ-極集合を除いて成り立つとき, A 上で γ-q.e. に成り立つという. さらに, X 上で $f = g$ γ-q.e. であるとき, f と g は γ-同値であるという. f と γ-同値である関数の全体を $\overline{f}$ で表す.

$\gamma(f) < \infty$ であれば、集合 $\{x \in X; |f(x)| < \infty\}$ は γ-極集合であることはよく知られている (cf. [Fu, 1.3 Lemma]).

空間 $\mathcal{F}(\gamma)$ を

$$\mathcal{F}(\gamma) = \{f \in J(X); \gamma(f) < \infty\}$$

と定義する. また, コンパクトな台を持つ X 上の実数値連続関数全体からなる空間 $\mathcal{K}(X)$ は $\mathcal{F}(\gamma)$ に含まれていると仮定する.

$\mathcal{L}(\gamma)$ を $\gamma(f_n - f) \to 0$ となる列 $\{f_n\} \subset \mathcal{K}(X)$ が存在するようなボレル可測関数 f の全体とする. $\mathcal{L}(\gamma)$ の γ-同値による商空間を $L(\gamma)$ で表すと, $L(\gamma)$ はベクトル束であり, $\overline{f} \in L(\gamma)$ に対し, $\overline{f}$ のノルムを

$$\|\overline{f}\| = \gamma(f),$$

順序を

$$\overline{f} \leq \overline{g} \Longleftrightarrow f \leq g\ \gamma - q.e.$$

と定めれば, この定義は well-defined であり, このノルムと順序により $L(\gamma)$ はバナッハ束になる.

このような $L(\gamma)$ の例は §2 で考えるが, この論文では, まず, バナッハ束 $L(\gamma)$ でも表現測度を使って, f が Kor(H) に含まれるための十分条件が, H. Bauer と K. Donner [BD] と同様に次の形で与えられることを, 論文 [W] に従って §5 で証明する.

定理 1. $\mathcal{H}$ は $\mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ の部分空間で, せいぜい可算個の要素からなり, それらは有限値をとる関数からなるとする. $H = \{\mathcal{H}; h \in \mathcal{H}\}$ とおく. また, f は有限値をとり, $f \in \mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ とする. もし, ある非負関数 $v \in \mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ が存在して, 任意の $\mu \in M_x^v(\mathcal{H})$ と $v(x) < \infty$ である x に対して

$$\int f d\mu = f(x)$$

ならば, $\overline{f}$ ∈Kor(H) である.

H は $L(\gamma)$ の部分空間とする. Kor(H)= $L(\gamma)$ となるとき, H をコロフキン空間という. $\mathcal{H}$ は $\mathcal{L}(\gamma)$ の部分空間で, $x \in X$ とする. また, $w \geq 0$ は μ-可積分であり,

$$\mathcal{H} \subset B_w$$

であり,

$$\int h d\mu = h(x)\ (\forall h \in \mathcal{H})$$

となる正ラドン測度 μ の全体を, $M_x^w(\mathcal{H})$ で表す. ここで、

$$B_w =: \{g; \text{ある } b > 0 \text{ に対して } |g| \leq bw\}.$$

$M_x^w(\mathcal{H})$ の元を x における $\mathcal{H}$ の表現測度 (w に関する) と呼ぶ.

K. Donner による L^p 空間の場合と同様に, 可算劣加法的汎関数 γ に対しても, $\mathcal{H}$ がコロフキン空間であるための十分条件が, 次の定理 2 で与えられることを §6 で証明する.

定理 **2.** $\mathcal{H}$ は $\mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ のせいぜい可算個の要素からなり, それらは有限値をとる関数からなるとする. ある非負の関数 $v \in L(\gamma)$ に対しては

$$M_x^v(\mathcal{H}) = \{\epsilon_x\} \quad (\forall x \in \{y; w(x) < \infty\})$$

を満足すれば, $H = \{\overline{h};\ h \in \mathcal{H}\}$ により生成された $L(\gamma)$ の部分空間はコロフキン空間である.

また, $\mathcal{H}$ は m-次元とする. ボレル可測かつ γ-極集合 N と, $x \in X$ に対し,

$$M_x^N(\mathcal{H}) := \{\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \epsilon_{x_i}; x_i \in X \setminus N,\ \alpha_i \in \mathbf{R}^+,$$
$$h(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i h(x_i)\ (\forall h \in \mathcal{H})\}$$

とおく. 有限次元部分空間 $\mathcal{H}$ に対しては, 次の定理も得られる.

定理 **3.** $\mathcal{H}$ は $\mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ の有限次元の部分空間とする. このとき、あるボレル可測かつ γ-極集合 N を除いた各点 x で,

$$M_x^N(\mathcal{H}) = \{\epsilon_x\}$$

ならば, $H = \{\overline{h}; h \in \mathcal{H}\}$ は $L(\gamma)$ のコロフキン空間である.

空間 $L(\gamma)$ の中でコロフキン型の定理を考えることで, 測度をもとに定義された空間だけでなく, ハウスドルフ測度 (外測度) を元にした空間でも, コロフキン型のある種の定理は考えることができることを紹介したい.

2. 可算劣加法的汎関数の例

(1) $f \in J(X)$ に対し,

$$\gamma(f) := \sup\{|f(x); x \in X\}$$

と定義する. このとき, 空集合のみが γ-極集合であり, $L(\gamma) = C_0(X)$ となる.

(2) ν は X 上のラドン測度で, $1 \leq p < \infty$ とする. $f \in J(X)$ に対して,

$$\gamma(f) := \left(\int |f|^p d\nu\right)^{1/p}$$

と定義すれば, ボレル集合 B が γ-極集合であるための必要かつ十分条件は, $\nu(B) = 0$ であることであり, $L(\gamma) = L^p(\nu)$ である.

(3) X は d-次元のユークリド空間 $\mathbf{R}^d$ の部分集合で, σ-コンパクトとする. また, $0 < \beta \leq d$ とする. $f \in J(X)$ に対して

$$\gamma(f) = \inf\{\sum_j a_j |B_j|^{\beta/d}; \sum_j a_j \chi_{B_j} \geq |f|, a_j \in \mathbf{R}^+,\ B_j = B(x_j, r_j),\ r_j > 0\}$$

と定義する. ここで, $B(x_j, r_j)$ は x_j を中心として半径 r_j の球であり, $|B_j|$ は B_j の体積を表す。

このように定義された γ は条件 $(c_1) - (c_4)$ を満たし, 次の性質も持つ.

補題 2.1. ボレル測度 B が γ-極集合であるための必要十分条件は, $\mathcal{H}^\beta(B) = 0$ であることである. ここで, $\mathcal{H}^\beta$ は β-次元のハウスドウフ測度を表す.

証明. はじめに, $\mathcal{H}^\beta(B) = 0$ とする. $\mathcal{H}^\beta$ は, $\delta > 0$ に対し,

$$\mathcal{H}^\beta_\delta(B) = \inf\{\sum_j r_j^\beta; \sum_j \chi_{B_j} \geq \chi_B,\ B_j = B(x_j, r_j),\ \operatorname{diam} B_j < \delta\},$$

$\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^\beta_\delta(B) = \mathcal{H}^\beta(B)$ と定義されることに注意する. $\mathcal{H}^\beta_\delta(B)$ は δ について単調減少だから, 任意の δ に対し, $\mathcal{H}^\beta_\delta(B) = 0$ である. $\gamma(\chi_B) \leq \mathcal{H}^\beta_\delta(B)$ だから $\gamma(\chi_B) = 0$ が成り立つ.

逆を示すために, $\mathcal{H}^\beta(B) > 0$ とする. そのとき、[C, Theorem 3 in §II] により, B のあるコンパクト部分集合 K では, $\mathcal{H}^\beta(K) > 0$ であり, K の中に台を持ち、、

$$\mu(B(x, r)) \leq r^\beta \quad (\forall x \in X,\ \forall r > 0)$$

となり, しかも、

$$\mathcal{H}^\beta(K) \leq c_1 \mu(K)$$

を満たす μ が存在する. ここで, c_1 は d と β のみにより, K にはよらない定数である.

$$\mu(K) \leq c_2 \gamma(\chi_K)$$

を示すために, $\chi_K \leq \sum_j b_j \chi_{B_j}$, $b_j \in \mathbf{R}^+$, $B_j = B(x_j, r_j)$ とする. そのとき, μ の性質により

$$\mu(K) \leq \sum_j b_j \mu(B_j) \leq \sum_j b_j r_j^\beta \leq c_3 \sum_j b_j |B_j|^{\beta/d}.$$

c_3 は d と β のみによる定数である. 従って, γ の定義より, $\mu(K) \le c_3\gamma(\chi_K)$ が成り立つ. だから $\gamma(\chi_K) > 0$, すなわち, $\gamma(\chi_B) > 0$ である. □

3. γ-quasi 連続関数

以下, X は可算基を持つ局所コンパクトハウスドルフ空間とする.
単調列に対するルベーグの収束定理を一般化した次の補題から始める.

補題 3.1. $\{f_n\}$ は $\mathcal{L}(\gamma)$ の関数からなる列で, X 上で $f_n \downarrow 0$ γ-q.e. とする. このとき, $\gamma(f_n) \to 0$ である.

証明. $L(\gamma)$ 上の有界線形汎関数全体からなる空間を $L(\gamma)'$ で表す. $K = \{\phi \in L(\gamma)'; \phi \ge 0,\ \|\phi\| \le 1\}$ とおく. K は位相 $\sigma(L(\gamma)', L(\gamma))$ でコンパクトである. K 上の関数列 $\{G_n\}$ を

$$G_n(\phi) := \phi(\overline{f_n})$$

と定義すれば, G_n は K 上で連続であり, $f_n \downarrow 0$ γ-q.e. だから $\phi(\overline{f_n}) \to 0$. 従って, K 上で $G_n \downarrow 0$ となる. Dini の定理により, この収束は K 上で一様なので,

$$\sup_{\phi\in K} G_n(\phi) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

$L(\gamma)$ はバナッハ束なので,

$$\gamma(f_n) = \|\overline{f}_n\| = \sup_{\phi\in K} G_n(\phi) \to 0.$$

□

$J(X)$ の元 f は次の性質を持つとき, γ-quasi 連続であるという;

どんな $\epsilon > 0$ に対しても, $\gamma(E^c) < \epsilon$ であり, f の E への制限 $f|E$ は連続であるような, ある閉集合 E が存在する.

ここで, E^c は E の補集合をあらわす. γ-quasi 連続である $\mathcal{L}(\gamma)$ の元の全体を $\mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ で表す.

$\mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ に対しては, 次の命題が成り立つ.

補題 3.2. $f \in \mathcal{L}(\gamma)$ とする. そのとき, X 上で $f = g$ γ-q.e. であるような $g \in \mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ が存在する.

証明. $f \in \mathcal{L}(\gamma)$ とする. $\mathcal{L}(\gamma)$ の定義より, $\{f_n\} \subset \mathcal{K}(X)$ で $\gamma(f_n - f) \to 0$ となる列が存在するので,

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m \gamma(g_{m+1} - g_m) < \infty$$

となる $\{f_n\}$ の部分列 $\{g_m\}$ を見つけることができる.

$$F_m := \cap_{j=m}^{\infty}\{x \in X; |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \le \frac{1}{2^j}\},$$

$g_0 = 0$ とおけば, $\{\sum_{j=0}^{p}(g_{j+1} - g_j)\}_p$ は F_m 上で一様収束するので,

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty}(g_{j+1}(x) - g_j(x), & \text{if } x \in \cup_{m=1}^{\infty} F_m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すれば, g は X 上で γ-quasi 連続であり, $\gamma(f-g) = 0$ である. 従って, X 上で $f = g$ γ-q.e. である. □

次に, $w \geq 0$ と閉集合の列 $\{F_n\}$ に対して, $o(w, \{F_n\})$ を, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある n があり, F_n に含まれるあるコンパクト集合 K の外では, $|f| \leq \epsilon w$ となる関数 $f \in J(X)$ の全体を表すものとする. また, 非負ボレル可測関数 w に対し

$$B_w := \{f \in J(X); |f| \leq bw \text{ for some } b\}$$

とおく. このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 3.3. $\mathcal{H}_1$ は $\mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ のせいぜい可算個からなる部分族とする. そのとき, 次の性質を持つ非負の $w \in \mathcal{L}(\gamma)$ と、閉集合の増大列 $\{F_n\}$ が存在する;

(a_1) $\mathcal{H}_1 \subset B_w$, $\mathcal{H}_1 \subset o(w, \{F_n\})$, $h|F_n$ $(\forall h \in \mathcal{H}_1,\ \forall n \in \mathbf{N})$ は連続,

(a_2) $w = \lim_{p\to\infty} w_p$, $w_p \in \mathcal{L}(\gamma)_{qc}$, $w_p \leq w_{p+1}$ $(\forall p \in \mathbf{N})$, $w_p|F_n$ $(\forall p \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N})$ は連続,

(a_3) $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \{x \in X; w(x) < \infty\}$,

(a_4) $\gamma(\chi_{F_n^c}) \to 0$ $(n \to \infty)$.

証明. $\mathcal{H}_1 = \{h_p\}$ とおくと, 各 h_p は γ-quasi 連続であることに注意して, $h_p \in B_v$ $(\forall p \in \mathbf{N})$ であり, $h_p|F_n$, $v|F_n$ は連続, $\gamma(F_n^c) \to 0$ $(n \to \infty)$ であるような非負の関数 $v \in \mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ と閉集合の増大列 $\{F_n\}$ が存在する. w を構成するために, $\{K_p\}$ はコンパクト集合の増大列からなる X の exhaustion として,

$$0 \leq g'_p \leq 1, \quad g'_p = 1 \text{ on } K_p, \quad \text{supp } g'_p \subset K^i_{p+1}$$

を満たす $\mathcal{K}(X)$ の増大列 $\{g'_p\}$ を選ぶ. ここで, K^i_{p+1} は K_{p+1} の内部を表す. $v - vg'_n \downarrow 0$ γ-q.e. だから, 補題 2.1 より, $\gamma(v - vg'_m) \to 0$. 従って

$$\gamma(v - vg_{n(p)}) < \frac{1}{2^p}$$

となる自然数 $n(p)$ がある. そして

$$w'_m(x) = \begin{cases} \sum_{p=1}^{m}(v(x) - v(x)g'_{n(p)}(x)) + v(x) & \text{if } x \in \cup_{n=1}^{\infty} F_n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく. また, $m \to \infty$ のとき, $\gamma(v - v\chi_{F_m}) \to 0$ だから

$$\gamma(v - v\chi_{n(p)}) < \frac{1}{2^p}$$

となる自然数 $n(p)$ を選び,

$$w''_m(x) = \begin{cases} \sum_{p=1}^{m}(v(x) - v(x)\chi_{F_{n(p)}}(x) & \text{if } x \in \cup_{n=1}^{\infty} F_n \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく. さらに, $w_m = w'_m + w''_m$, $w = \lim_{m\to\infty} w_m$ と定義する.

このように定義された $\{w_m\}$、w は (a_1) の性質を持つ. なぜなら, $\mathcal{H}_1 \subset B_v$ であるから, $\mathcal{H}_1 \subset B_w$ である. また, $x \in K^c_{n(p)+1}$ ならば,

$$w(x) \geq (n(p)+1)v(x)$$

だから $\mathcal{H}_1 \subset o(w, \{F_n\})$ である. 各 h_p は $h_p|F_n$ が連続であるように F_n を選んだので, $h_p|F_n$ は連続である. また, 構成の仕方より, (a_2)-(a_4) が成り立つこともわかる. □

4. 正線形汎関数による表現

この節では, X 上の非負ボレル可測関数 w と, X の閉部分集合からなる増大列 $\{F_n\}$ で, 次の性質を持つものを固定する;

$$\cup_n F_n = \{x \in X; w(x) < \infty\} \quad \text{かつ} \quad w = \lim_{p\to\infty} w_p$$

を満たし, $\{w_p\}$ は非負ボレル可測関数からなる増大列で, 各 p, n に対し $w_p|F_n$ は連続である.

この仮定のもとで, 空間 $C_w(\{F_n\})$ というのは, X 上で定義されたボレル可測関数 f で, 有限値をとり, 各 F_n 上で連続であり, $f \in B_w$ を満たす関数 f の全体からなる線形空間を表す. $f \in C_w(\{F_n\})$ に対し, そのセミノルムを

$$\|f\| := \inf\{b \in \mathbf{R}^+; |f| \leq bw \text{ on } X\}$$

と定義する. このとき, $\|f\|_w = 0$ ならば, 各 $x \in \cup_n F_n$ に対して, $f(x) = 0$ であることに注意する.

$\mathcal{H}$ は $C_w(\{F_n\})$ の部分空間とする. $f \in C_w(\{F_n\})$ に対し,

$$\hat{f}^w(x) = \sup_{\epsilon>0} \inf\{h(x); h \in \mathcal{H},\ h + \epsilon w \geq f \text{ on } \cup_n F_n\} \tag{4.1}$$

かつ

$$\check{f}^w(x) = \inf_{\epsilon>0} \sup\{h(x); h \in \mathcal{H},\ h - \epsilon w \leq f \text{ on } \cup_n F_n\} \tag{4.2}$$

と定義する. ただし, (4.1) で $\inf\emptyset = +\infty$, (4.2) で $\sup\emptyset = -\infty$ とみなす.

写像 $f \mapsto \hat{f}^w(x)$ は $C_w(\{F_n\})$ 上の増大な hypolinear functional である. すなわち, $+\infty$ も許す $C_w(\{F_n\})$ 上の汎関数であり, 次の性質を持つ.

$$
\begin{aligned}
&\check{f}^w \leq f \leq \hat{f}^w,\\
&\check{h}^w = h = \hat{h}^w \quad (\forall h \in \mathcal{H}),\\
&f \leq g \Longrightarrow \hat{f}^w \leq \hat{g}^w,\\
&(f+g)\hat{}^w \leq \hat{f}^w + \hat{g}^w,\\
&(\lambda f)\hat{}^w = \lambda \hat{f}^w \quad (\forall \lambda > 0).
\end{aligned}
$$

補題 4.1. $x \in \cup_n F_n$ とする. そのとき, 写像 $f \mapsto \hat{f}^w(x)$ は $C_w(\{F_n\})$ 上の下半連続関数である.

証明. どんな $\epsilon > 0$ に対しても, $h + \epsilon w \geq f$ となる $h \in \mathcal{H}$ が存在するような $f \in C_w(\{F_n\})$ の集合を $\mathcal{H}_w^*$ で表す. $\mathcal{H}_w^*$ は閉集合であることを示す. $f_n, f \in C_w(\{F_n\})$ で $f_n \in \mathcal{H}_w^*$ であり, $\|f_n - f\|_w \to 0$ とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対し,

$$h_n + \frac{\epsilon w}{2} \geq f_n$$

となる $h_n \in \mathcal{H}$ が存在する. $\|f_n - f\|_w < \epsilon/2$ となる f_n に対しては

$$f \leq f_n + \frac{\epsilon w}{2} \leq h_n + \epsilon w.$$

従って, $f \in \mathcal{H}_w^*$ である. すなわち, $\mathcal{H}_w^*$ は閉集合である. だから $C_w(\{F_n\}) \setminus \mathcal{H}_w^*$ は開集合である.

補題を証明するために, $\hat{f}^w(x) > \alpha$ とする. $f \notin \mathcal{H}_w^*$ ならば $\hat{f}^w(x) = +\infty$ であり, $U_f = C_w(\{F_n\}) \setminus \mathcal{H}_w^*$ とおけば, 任意の $g \in U_f$ に対して, $\hat{g}^w(x) = +\infty$ だから, $\hat{g}^w(x) = +\infty > \alpha$.

また, $f \in \mathcal{H}_w^*$ とする. $\hat{f}^w(x)$ の定義により, ある $\epsilon > 0$ に対し.

$$\alpha < \inf\{h(x); h \in \mathcal{H},\ f \leq h + \epsilon w\}.$$

$V_f = \{g \in C_w(\{F_n\}); \|f - g\|_w < \epsilon/2\}$ とおく. $g \in V_f$ に対して

$$
\begin{aligned}
\alpha &< \inf\{h(x); h \in \mathcal{H},\ f \leq h + \epsilon w\}\\
&\leq \inf\{h(x); h \in \mathcal{H},\ g \leq h + \frac{\epsilon w}{2}\} \leq \hat{g}^w(x).
\end{aligned}
$$

従って, いずれにしても, $f \mapsto \hat{f}^w(x)$ は下半連続である. □

命題 4.2. $\mathcal{H}$ は $C_w(\{F_n\})$ の部分空間で, $f \in C_w(\{F_n\})$, $x \in \cup_n F_n$ とする. そのとき, $\hat{f}^w(x) > b > \check{f}^w(x)$ となる任意の b に対して,

$$\phi(f) = b, \quad \phi(h) = h(x) \ (\forall h \in \mathcal{H}) \tag{4.3}$$

を満たす $C_w(\{F_n\})$ 上の正連続な線形汎関数 ϕ が存在する.

証明. 補題 4.1 により, 写像 $g \mapsto \hat{g}^w(x)$ は $C_w(\{F_n\})$ 上の下半連続な hypolinear 汎関数だから, [AL, Proposition 3.2] により,

$$\phi(g) \leq \hat{g}(x) \ (\forall g \in C_w(\{F_n\})), \quad \phi(f) = b \tag{4.4}$$

となる連続な有限値をとる線形汎関数 ϕ が存在する. $g \le 0$ ならば、$\phi(g) \le \hat{g}(x) \le 0$ だから, ϕ は正線形汎関数である.

$h \in \mathcal{H}$ とする. (4.4) により

$$\phi(h) \le \hat{h}^w(x) \le h(x)$$

であり,

$$-\phi(h) = \phi(-h) \le (-h)^{\hat{}w}(x) \le -h(x)$$

なので, (4.3) も成り立つ. □

$$C_w(\{F_n\})_o := C_w(\{F_n\}) \cap o(w, \{F_n\})$$

とおく. このとき, $C_w(\{F_n\})$ 上の正線形連続汎関数は, [D2, 7.20 Theorem] の証明と同様に, $C_w(\{F_n\})_o$ 上では測度と見なせる.

命題 4.3. $\mathcal{K}(X) \subset C_w(\{F_n\})_o$ とする. そのとき, $C_w(\{F_n\})$ 上の任意の正線形連続汎関数 ϕ に対しては

$$\phi(f) = \int f d\mu \qquad (\forall f \in C_w(\{F_n\})_o)$$

が成り立つ.

また, $\mathcal{H}$ の表現測度に関しては次の命題が成り立つ.

命題 4.4. $\mathcal{K}(X) \subset C_w(\{F_n\})_o$ とする. $\mathcal{H}$ は $C_w(\{F_n\})_o$ の部分空間で, $f \in C_w(\{F_n\})_o$ ならば, 次の (a), (b), (c) は同値である.

(a) $\int f d\mu = f(x)$ $(\forall x \in \cup_n F_n,\ \forall \mu \in M_x^w(\mathcal{H}))$,

(b) $\hat{f}^w(x) = f(x) = \check{f}^w(x)$ $(\forall x \in \cup_n F_n)$,

(c) 任意の $\epsilon > 0$ に対し, 有限個の $h'_1, \cdots, h'_m \in \mathcal{H}$ と $h''_1, \cdots, h''_n \in \mathcal{H}$ が存在し, $\overline{h} = \inf\{h'_1, \cdots, h'_m\}$, $\underline{h} = \sup\{h''_1, \cdots, h''_n\}$ とおけば,

$$\underline{h} - \epsilon w \le f \le \overline{h} + \epsilon w \text{ かつ } \quad \|\overline{h} - \underline{h}\|_w \le \epsilon \tag{4.5}$$

が成り立つ.

証明 (a)→ (b). $x \in \cup_n F_n$ とする. $\hat{f}^w(x) > \check{f}^w(x)$ と仮定すれば, 命題 4.2 より $\hat{f}^w(x) > b > \check{f}^w(x)$ となる任意の b に対し,

$$\phi(f) = b, \quad \phi(h) = h(x) \quad (\forall h \in \mathcal{H})$$

となる $C_w(\{F_n\})$ 上の正線形連続汎関数 ϕ が存在する. 命題 4.3 より, ϕ は, $C_w(\{F_n\})_o$ 上では, 正ラドン測度 μ と等しいから, $\mu \in M_x^w(\mathcal{H})$ である. 仮定により, 集合

$\{\int f d\mu; \mu \in M_x^w(\mathcal{H})\}$ は 1 点集合 $\{f(x)\}$ であるから, これは矛盾である. 従って, $\hat{f}^w(x) = f(x) = \check{f}^w(x)$ でなければならない.

(b)→(c) $\epsilon > 0$ に対して, $f \leq h'_o + \epsilon w/2$ となる $h'_o \in \mathcal{H}$ が存在する. $h'_o - f \in o(w, \{F_n\})$ だから, ある l と F_l に含まれるコンパクト集合 K が存在し, K の補集合上では $|h'_o - f| \leq \epsilon w/2$ となる. また, $\hat{f}^w(x) = f(x)$ より K の各点 x に対し,

$$f \leq h_x + \frac{\epsilon w}{2}, \quad h_x(x) < f(x) + \frac{\epsilon w}{2} \tag{4.6}$$

となる $h_x \in \mathcal{H}$ が存在する. h_x, f は K 上で連続で, w は K 上で下半連続だから,

$$h_x(y) < f(y) + \frac{\epsilon w}{2} \quad (\forall y \in U_x)$$

となる x の近傍 U_x がある. K はコンパクトだから, 有限個の近傍 $U_{x_1}, \cdots, U_{x_m}$ で K を覆い,

$$\overline{h} = \inf\{h'_0,\ h_{x_1}, \cdots, h_{x_m}\}$$

とおけば, K 上で $f \leq \overline{h} + \epsilon w/2$ であり, K 上で

$$\overline{h} \leq f + \frac{\epsilon w}{2}$$

である. K の補集合上では $|h'_o - f| \leq \epsilon w/2$ であり, (4.6) が成り立っていることに注意すれば

$$\|\overline{h} - f\|_w \leq \frac{\epsilon}{2}$$

である.

同様に, $x \in \cup_n F_n$ 上では $\check{f}^w = f$ に注意して, f を $-f$ で置き換え, 有限個の $h''_0,\ h''_1, \cdots, h''_n \in \mathcal{H}$ を選び,

$$\underline{h} = \sup\{h''_o,\ h''_1, \cdots, h''_n\}$$

と置き,

$$\underline{h} - \epsilon w < f \text{ かつ } \|f - \underline{h}\|_w \leq \frac{\epsilon}{2}$$

を満たすようにすることができる. $\overline{h}, \underline{h}$ が求める関数である.

(c)→(a). $x \in \cup_n F_n$ とする. $\epsilon > 0$ に対し, (4.5) を満足する $\overline{h}, \underline{h}$ を選ぶ. $\mu \in M_x^w(\mathcal{H})$ とすれば,

$$\int f d\mu \leq \int \overline{h} d\mu + \epsilon \int w d\mu \leq \inf_{1 \leq j \leq m} \int h'_j d\mu + \epsilon \int w d\mu,$$

$$\begin{aligned} \inf_{1 \leq j \leq m} \int h'_j d\mu = \inf_{1 \leq j \leq m} h'_j(x) = \overline{h}(x) &< \underline{h}(x) + \epsilon w(x) \\ &\leq f(x) + 2\epsilon w(x). \end{aligned}$$

$$\int f d\mu \leq f(x) + 2\epsilon w(x) + \epsilon \int w d\mu.$$

$w(x) < +\infty$ だから

$$\int f d\mu \leq f(x).$$

同様に

$$\int f d\mu \geq f(x).$$

□

(a) を満たす関数 f の全体を $\hat{\mathcal{H}}$ で表し, $\hat{\mathcal{H}}$ に属する関数 f は $\mathcal{H}$-affine 関数と呼ばれる.

5. コロフキン型の定理

次の定理は $C_0(X)$ の場合に, $\hat{H} \subset$Kor$(\mathcal{H})$ であることの拡張になっている (cf. [BD, 3.2 Theorem]).

補題 5.1. $\mathcal{H}$ は $\mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ の部分空間で, $\mathcal{H}$ の元は有限値をとる関数からなるとする. $H = \{\overline{h}; h \in \mathcal{H}\}$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \cup \{f\}$ とおけば, $\mathcal{H}_1$ に対して, 補題 3.2 の (a_1)-(a_4) を満たし,

(a_5) $\mathcal{K}(X) \subset C_w(\{F_n\})$

であるような非負関数 w と閉集合の増大列 $\{F_n\}$ が存在すると仮定する. その上,

$$\int f d\mu = f(x) \quad (\forall x \in \cup_n F_n,\ \forall \mu \in M_x^w(\mathcal{H}))$$

ならば, $\overline{f} \in$Kor(H) である.

証明. $x \in \cup_n F_m$ で n は自然数とする. 命題 4.4 の $(a) \to (c)$ より

$$g'_n - \frac{1}{n}w \leq f \leq g_n + \frac{1}{n}w \text{ かつ } |g_n - g'_n| \leq \epsilon w$$

を満たす $g_n = \inf\{h_1, \cdots, h_m\}$ $(h_j \in \mathcal{H})$ と $g'_n = \sup\{h'_1, \cdots, h'_n\}$ $(h'_j \in \mathcal{H})$ が存在する.

$$u_n = \sup\{0,\ f - g_n,\ g'_n - f\}$$

とおけば, $u \in \mathcal{L}(\gamma)$ で,

$$g'_n - u_n \leq f \leq g_n + u_n \quad \text{かつ } |g_n - g'_n| \leq 2u_n$$

が成り立つ. $u_n \downarrow 0$ q.e. としてよい.

$\{T_\alpha\}$ を $L(\gamma)$ から $L(\gamma)$ への正連続線形汎関数からなるネットで,

$$\|T_\alpha\| \leq M, \qquad \lim_\alpha T_\alpha(\overline{h}) = T\overline{h} \ (h \in \mathcal{H})$$

とする. すると

$$\begin{aligned}
T_\alpha\overline{f} - \overline{f} &\leq T_\alpha(\overline{g_n} + \overline{u_n}) - \overline{g'_n} + \overline{u_n} \\
&\leq \inf_\alpha T_\alpha\overline{h_j} + T_\alpha\overline{u_n} - \overline{g_n} + 2\overline{u_n} \\
&\leq \inf_\alpha T_\alpha\overline{h_j} - \inf_j \overline{h_j} + T_\alpha\overline{u_n} + 2\overline{u_n} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} |T_\alpha\overline{h_j} - \overline{h_j}| + |T_\alpha\overline{u_n}| + 2\overline{u_n}
\end{aligned}$$

が得られる. 同様に

$$\overline{f} - T_\alpha\overline{f} \leq \sum_{j=1}^{n} |T_\alpha\overline{h'_j} - \overline{h'_n}| + |T_\alpha\overline{u_n}| + 2\overline{u_n}$$

だから, 合わせて,

$$\begin{aligned}
|T_\alpha\overline{f} - \overline{f}| \leq& \sum_{j=1}^{m} |T_\alpha\overline{h_j} - \overline{h_j}| + \sum_{j=1}^{n} |T_\alpha\overline{h'_j} - \overline{h'_j}| \\
&+ 2|T_\alpha\overline{u_n}| + 4\overline{u_n}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned}
\|T_\alpha\overline{f} - \overline{f}\| \leq& \sum_{j=1}^{m} \|T_\alpha\overline{h_j} - \overline{h_j}\| + \sum_{j=1}^{l} \|T_\alpha\overline{h'_j} - \overline{h'_j}\| \\
&+ 2M\gamma(u_n) + 4\gamma(u_n)
\end{aligned}$$

である.

また, $u_n \downarrow 0$ γ-q.e. だから, **補題 3.1** より, $\gamma(u_n) \downarrow 0$ である.

$$\lim_\alpha \|T_\alpha\overline{h_j} - \overline{h_j}\| = 0 \text{ と } \quad \lim_\alpha \|T_\alpha\overline{h'_j} - \overline{h'_j}\| = 0$$

に注意して, $\lim_\alpha \|T_\alpha\overline{h} - \overline{f}\| = 0$ が得られる. □

ここで, 定理 1 を証明する.

定理 1 の証明. X は局所コンパクトで可算基を持つので, $\mathcal{K}(X)$ に属する可算個からなる非負関数族 $\{g_n\}$ で,

$$\mathcal{K}(X) \subset \cup_{n=1}^{\infty} B_{g_n}$$

を満たすものが存在する．また，$\mathcal{H} = \{h_1, \cdots, h_p, \cdots\}$ とおく．さらに

$$\mathcal{H}_1 := \{g_1, \cdots, g_n, \cdots\} \cup \{f, v\} \cup \{h_1, \cdots, h_p, \cdots\}$$

とおき，この $\mathcal{H}_1$ に補題 3.3 を適用すれば，(a_1)-(a_4) を満たす非負ボレル関数 w と閉集合の増大列 $\{F_n\}$ で，$\gamma(w) < \infty$ となるものがある．この w と $\{F_n\}$ は補題 5.1 のすべての仮定を満足する．従って $\overline{f} \in \mathrm{Kor}(H)$ である． □

6. コロフキン空間

この節では，$L(\gamma)$ に含まれる集合 H から生成された部分空間がコロフキン空間であるための十分条件である定理 2，定理 3 の証明をする．まず，次の補題を示す．

補題 6.1. $B_{w'} \cap \mathcal{L}(\gamma)$ は $\mathcal{L}(\gamma)$ で稠密で，$\gamma(w') < \infty$ となる非負ボレル有限値関数 w' が存在する．

証明. $\{K_n\}$ はコンパクト集合よりなる X の exhaustion とする．このとき，

$$K_n \text{ 上で } \quad v_n = 1, \quad X \text{ 上で } 0 \leq v_n \leq 1$$

となる $\{v_n\} \subset \mathcal{K}(X)$ が存在する．$\gamma(v_n) \neq 0$ としてよい．

$$w' = \sum_n \frac{1}{2^n \gamma(v_n)} v_n$$

とおけば，w' は $\gamma(w') < \infty$ となる非負ボレル関数で，$\mathcal{K}(X) \subset B_{w'}$ だから，$B_{w'} \cap \mathcal{L}(\gamma)$ は $\mathcal{L}(\gamma)$ で稠密である． □

次に，この命題を使って，定理 2 を証明する．

定理 2 の証明 補題 6.1 より、$B_{w'} \cap \mathcal{L}(\gamma)$ が $\mathcal{L}(\gamma)$ で稠密であるような非負ボレル関数 w' が存在するから，

$$w = v + w'$$

とおく．すると，$B_w \cap \mathcal{L}(\gamma)$ は $\mathcal{L}(\gamma)$ で稠密である．また，$M_x^w(\mathcal{H}) \subset M_x^v(\mathcal{H})$ かつ $\{x; w(x) < \infty\} = \{x; v(x) < \infty\}$ であり，$v(x) < \infty$ に対しては，$M_x^v(\mathcal{H}) = \{\epsilon_x\}$ という仮定より，$M_x^w(\mathcal{H}) = \{\epsilon_x\}$ が成り立つ．

$$L_w = \{\overline{g};\, g \in B_w\}$$

とおけば，定理 1 より，$L_w \cap L(\gamma) \subset \mathrm{Kor}(H)$ となる．

$\{T_\alpha\}$ を $L(\gamma)$ 上の一様有界な正線形作用素からなるネットとする．このとき、

$$\mathcal{F} = \{f \in L(\gamma); \lim_\alpha T_\alpha f = f\}$$

とおけば，$\mathcal{F}$ は $L(\gamma)$ の閉集合である．$\mathrm{Kor}(H)$ も閉集合だから，

$$L(\gamma) = \overline{L_w \cap L(\gamma)} \subset \overline{\mathrm{Kor}(H)} = \mathrm{Kor}(H)$$

が成り立つ. 従って, Kor(H)= $L(\gamma)$ である. □

命題 **6.2.** $\mathcal{H}$ は $\mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ の有限次元部分空間ならば, $f \in \mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ に対し, 次の (a), (b) は同値である.

(a) あるボレル可測かつ極集合 N を除いた集合の各点 x で,

$$\phi(f) = f(x) \quad (\forall \phi \in M_x^N(\mathcal{H})),$$

(b) $\mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ の非負単調増加列 $\{w_p\}$ の極限である w が存在し, $w(x) < \infty$ となる x では,

$$\int f d\mu = f(x) \quad (\forall \mu \in M_x^w(\mathcal{H}))$$

を満たす.

証明. (a)→(b).

$$v(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \in X \setminus N \\ +\infty & \text{if } x \in N \end{cases}$$

と定義すれば, $v \in \mathcal{L}(\gamma)_{qc}$ である. $\mathcal{H}$ は $\{h_1, \cdots, h_n\}$ より生成された $\mathcal{L}(\gamma)$ の部分空間とする. また, X の exhaustion $\{K_n\}$ に対し,

$$K_n\text{上では} \quad v_n = 1, \quad X \text{ 上では } 0 \leq v_n \leq 1$$

を満たす $\{v_n\} \subset \mathcal{K}(X)$ をとる.

$$\mathcal{H}_1 = \{h_1, \cdots, h_n\} \cup \{v_1, v_2, \cdots\} \cup \{v\}$$

として, $\mathcal{H}_1$ に対して補題 3.3 を適用し, その補題の (a_1)-(a_4) を満たす非負ボレル関数 w $(\gamma(w) < \infty)$ と, 閉集合の増大列 $\{F_n\}$ が存在する.

$\mu \in M_x^w(\mathcal{H})$ とする. v は N 上 $+\infty$ でだから, w も N 上で $+\infty$ の値をとる. w は μ-可積分なので, $\mu(N) = 0$ である.

$$E = \{g|(X \setminus N); g \in C_w(\{F_n\}) \cap \mathcal{L}(\gamma)\}$$

とおき, $g|(X \setminus N) \in E$ に対し,

$$l(g|(X \setminus N)) := \int \tilde{g} d\mu$$

と定義する. ここで, $\tilde{g}$ は g の X への拡張であり, $\mu(N) = 0$ だから, 正線形汎関数 l は well-defined である.

次に, $\{f_n\} \subset E$ で, $f_n \downarrow 0$ とする.

$$\tilde{f_n}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{if } x \in \cup_l F_l \\ 0 & \text{if } x \notin \cup_l F_l \end{cases}$$

とおけば, $\tilde{f}_n \downarrow 0$ μ-a.e. であり,

$$\lim_{n\to\infty} l(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n d\mu = 0$$

が成り立つ. 従って, [D2, 7.22 Lemma] により, 各 $g \in \mathcal{H} + \mathbf{R}f$ に対して,

$$\sum_{j=1}^{m+1} a_j \epsilon_{x_j}(g) = l(g|(X \setminus N)) = \int \tilde{g} d\mu$$

を満足する点 $x_1, \cdots, x_{m+1} \in X \setminus N$ と, $a_1, \cdots, a_{m+1} \in \mathbf{R}$ が存在する.

$$\sum_{j=1}^{m+1} \epsilon_{x_j} = \phi$$

とおく. $\mu \in M_x^w(\mathcal{H})$ に注意して, $x \in \cup_l F_l$ に対し,

$$\phi(h) = \int \tilde{h} d\mu = \int h d\mu = h(x) \ (\forall h \in \mathcal{H})$$

が成り立つ. 従って, $\phi \in M_x^N(\mathcal{H})$ である. 仮定により, $\phi(f) = f(x)$ なので,

$$\int f d\mu = l(f|(X \setminus N)) = \phi(f) = f(x)$$

である.

(b)→(a). $N = \{x \in X; w(x) = +\infty\}$ とおく. $w \in \mathcal{L}(\gamma)$ だから, N はボレル可測であり, γ-極集合である. $\phi \in M_x^N(\mathcal{H})$ とする. そのとき,

$$\phi(h) = \sum_{j=1}^{m+1} a_j \epsilon_{x_j}(h) = \sum_{j=1}^{m+1} a_j h(x_j) = h(x) \quad (\forall h \in \mathcal{H})$$

である. また, ϕ は $\{x_1, \cdots, x_{m+1}\}$ に台を持つ測度で,

$$\phi(w) = \sum_{j=1}^{m+1} a_j w(x_j) < \infty$$

である. 従って, w は ϕ-可積分である. これより, $\phi \in M_x^w(\mathcal{H})$ がわかる. 仮定 (b) より, $\phi(f) = f(x)$ でもあるから, (a) が成り立つ. □

最後に定理 3 を証明する。

定理 **3** の証明. 命題 6.2 で, (a) と (b) は同値であることと, 定理 2 より成り立つ.
□

参考文献

[AL] B. Anger and J. Lemcke: Ha-n-Banach type theorems for hypolinear functionals, Math. Ann. **209** (1974), 127-151.

[BD] H. Bauer and K. Donner: Approximation in $C_0(X)$, Math. Ann. **236** (1978), 225-237.

[C] L. Carleson: Selected problems on exceptional sets, Van Nostrand, Toronto-London, 1967.

[D1] K. Donner: Korovkin theorems in L^p-spaces, J. Fuctional Analysis **42** (1981), 12-28.

[D2] K. Donner: Extension of positive operators and Korovkin theorems, Lecture Notes in Math. **904**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1982.

[Fe] D. Feyer: Espaces de Banach fonctionnels adaptés, Séminaire de théorie du Potentiel, no. 3, Lecture Notes in Math. **681**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1978.

[Fu] B. Fuglede: Capacity as a sublinear functional generalizing an integral, Mat. Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **38**, no. 7 (1971), 1-44.

[W] H. Watanabe: Korovkin-type theorems for a countably sublinear functional, Expo. Math. **6** (1988),185-191.