数理解析研究所講究録 1245 巻 2002 年 16-24

On determinant-type operators for orthogonal Lie algebras

織田　寛（拓殖大学工学部）

1　主要結果

$\mathfrak{so}_n$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次直行 Lie 環とする．通常どおり $\mathfrak{so}_n$ を n 次の歪対称行列全体として実現したとき，$F_{ij} = E_{ji} - E_{ij}$（$i \neq j$，E_{ij} は n 次正方行列の行列単位）とし，$\mathrm{U}(\mathfrak{so}_n)$ の要素と可換な不定元 x に対して $F_{ij}(x) = F_{ij} - x\,\delta_{ij} \in \mathrm{U}(\mathfrak{so}_n) \otimes \mathbb{C}[x]$ とする．[4] で導入された $\mathrm{U}(\mathfrak{so}_n) \otimes \mathbb{C}[x]$ に値をとる“行列式”:

$$D(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) F_{\sigma(1)1}(x) F_{\sigma(2)2}(x+1) \cdots F_{\sigma(n)n}(x+n-1)$$

は，$\mathrm{U}(\mathfrak{so}_n)$ の中心 $\mathrm{Z}(\mathfrak{so}_n)$ に属する．次に，$k = 0, 1, \ldots, n$ とする．重複のない添字の列 $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, J $\{j_1, \ldots, j_k\}$ に対して $\mathrm{U}(\mathfrak{so}_n) \otimes \mathbb{C}[x]$ の要素：

$$D_{IJ}(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) F_{i_{\sigma(1)} j_1}(x) F_{i_{\sigma(2)} j_2}(x+1) \cdots F_{i_{\sigma(k)} j_k}(x+k-1)$$

（但し $D_{\emptyset\emptyset}(x) = 1$）は，自然に $D(x)$ を小行列式化したものあるが，本稿ではこれら $D_{IJ}(x)$（実際には $D_{IJ}(x)$ を少し変形させたもの）について考察する．

まず，$D(x)$ に対する [5] と同様の手法により次が得られる．

命題 1.1. 任意の $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_k$ に対して

$$D_{\sigma(I)\tau(J)}(x) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau) D_{IJ}(x).$$

この性質は，$D_{IJ}(x)$ のある種の $\mathfrak{so}_n$-（相対）不変性を導くが，それを見る前に Clifford 代数について準備をする．$Cl(n)$ を $e_1, e_2, \ldots, e_n$ を生成元とする Clifford 代数，すなわち，$e_1, e_2, \ldots, e_n$ を生成元とする $\mathbb{C}$ 上の自由代数を関係式：

$$e_i e_i = -1 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j)$$

で割ったものとする．重複のない添字の列 $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$（$k = 0, \ldots, n$）に対して $e_I = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ と置き，

$$Cl^{(k)}(n) = \sum \{ \mathbb{C} e_I \mid \# I = k \}$$

と定める．$n \geq 2$ に対して，$F_{ij} \leftrightarrow \dfrac{e_i e_j}{2}$ により自然に $Cl^{(2)}(n) \cong \mathfrak{so}_n$ である．以下では n を固定して $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n = Cl^{(2)}(n)$ とする．

$$Cl^{(k)}(n) \ni e \mapsto te - et \in Cl^{(k)}(n), \qquad t \in \mathfrak{g} = Cl^{(2)}(n)$$

により，$Cl(n)$ 及び各 $Cl^{(k)}(n)$ は $\mathfrak{g}$-加群となり，$Cl(n) = \bigoplus_{k=0}^{n} Cl^{(k)}(n)$ は $\mathfrak{g}$-加群の分解（一般には既約分解にはならない）を与える．また，$Cl(n) \otimes Cl(n)$ にも自然に $\mathfrak{g}$-加群としての構造が入るが，各

$Cl^{(k,\ell)}(n) := Cl^{(k)}(n) \otimes Cl^{(\ell)}(n)$ がその部分加群であり，$\mathfrak{g}$-加群の分解：$Cl(n) \otimes Cl(n) = \bigoplus_{k,\ell} Cl^{(k,\ell)}(n)$ が成立することは明らかである．

命題 1.1 から比較的容易に，小行列式に対する次の $\mathfrak{g}$-不変性が導かれる．

命題 1.2. 各 $k = 0, 1, \ldots, n$ について，

$$Cl^{(k,k)}(n) \ni e_I \otimes e_J \mapsto D_{IJ}(x) \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[x]$$

により定義される $\mathbb{C}$-線型写像は，$\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ を *adjoint* 作用，$\mathbb{C}[x]$ を自明な作用で $\mathfrak{g}$-加群とみなしたとき，$\mathfrak{g}$-準同型写像となる．

命題の写像による $e \in Cl^{(k,k)}(n)$ の像を $D(e; x)$ と表す．$D(e; x)$ を用いて，考察対象となる我々の小行列式 $\mathfrak{D}(e; x)$ を定義する．$m = \left[\frac{n}{2}\right]$ とする．$k = 0, 1, \ldots, m$ のとき，各 $e \in Cl^{(2k,2k)}(n)$ に対して，

$$\mathfrak{D}(e;\, x) = \frac{D(e; x-k) - D(e; -x-k)}{2}$$

とする．また，$k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$ のとき，各 $e \in Cl^{(2k+1,2k+1)}(n)$ に対して，

$$\mathfrak{D}(e;\, x) = \frac{D(e; x-k-\frac{1}{2}) - D(e; -x-k-\frac{1}{2})}{2x}$$

とする．明らかに $Cl^{(k,k)}(n) \ni e \mapsto \mathfrak{D}(e;\, x) \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[x]$ は $\mathfrak{g}$-写像である．

$\mathfrak{D}(e;\, x)$ に関する主要な結果を述べるために，$\mathfrak{g}$ について少し準備をする．$i = 1, \ldots, m$ に対して $H_i = \sqrt{-1}F_{2i-1,2i} = \sqrt{-1}\,\frac{e_{2i-1}e_{2i}}{2}$ とする．$\{H_i\}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h} = \sum \mathbb{C}H_i$ の実部の基となっているが，この双対基を $\{\Lambda_i\}$ とする．$\mathfrak{h}$ と 2 つの巾零部分環：

$$\mathfrak{n}^{\pm} = \sum \{\, \mathbb{C}(e_{2i-1} \pm \sqrt{-1}e_{2i})e_j \mid 2i < j \,\}$$

は，三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ を与える．この分解により，射影

$$\gamma \;:\; \mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \left(n^-\mathrm{U}(\mathfrak{g}) + \mathrm{U}(\mathfrak{g})n^+\right) \oplus \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{h}) = \mathrm{S}(\mathfrak{h})$$

を定める（Harish-Chandra 準同型）．また，$\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，

$$\chi_\Lambda(D) = \gamma(D)(\Lambda) \in \mathbb{C} \qquad (D \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}))$$

とする．

$e_I \otimes e_I \in Cl^{(k,k)}(n)$ に対応する小行列式 $D(e_I \otimes e_I; x) = D_{II}(x)$ または $\mathfrak{D}(e_I \otimes e_I;\, x)$ は，“主小行列式”と考えられる．そこで，Clifford 代数の方で“主小行列式”に対応する空間 $Cl^{(k,k)}(n)_{\mathrm{pr}} \subset Cl^{(k,k)}(n)$ を $e_I \otimes e_I \in Cl^{(k,k)}(n)$ で生成される $\mathfrak{g}$-部分加群として定義する．実は，$k \neq 0, n$ でない限り $Cl^{(k,k)}(n)_{\mathrm{pr}} \subsetneq Cl^{(k,k)}(n)$ である．

$\Theta = (m_1, m_2, m_3)$ を $m_2 \geq 1$ であるような自然数 m の分割とする．つまり，m_1, m_2, m_3 はいずれも 0 以上の整数で，

$$m_1 + m_2 + m_3 = m, \qquad m_2 \geq 1$$

であるとする．このとき，$(m_1 + 1 + m_3)$ 個の複素数の組：

$$\lambda_\Theta = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m_1},\, \lambda,\, \lambda_{m_1+m_2+1}, \lambda_{m_1+m_2+2}, \ldots, \lambda_{m_1+m_2+m_3}) \in \mathbb{C}^{m_1+1+m_3} \tag{1.1}$$

は $\mathfrak{h}^*$ の要素：

$$\begin{aligned}\Lambda_\Theta &= \lambda_1\Lambda_1 + \cdots + \lambda_{m_1}\Lambda_{m_1} \\ &\quad + \lambda(\Lambda_{m_1+1} + \cdots + \Lambda_{m_1+m_2}) \\ &\qquad + \lambda_{m_1+m_2+1}\Lambda_{m_1+m_2+1} + \cdots + \lambda_m\Lambda_m\end{aligned}$$

を定める．Λ_Θ は $(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{h})$ の $m_2 - 1$ 個の simple root：

$$\Lambda_{m_1+1} - \Lambda_{m_1+2},\ \Lambda_{m_1+2} - \Lambda_{m_1+3},\ \ldots,\ \Lambda_{m_1+m_2-1} - \Lambda_{m_1+m_2} \tag{1.2}$$

に対応する co-root に関して退化している．

次の 2 つの定理が本稿の主要結果である．

定理 1.3. 上のように定めたすべての Λ_Θ について，

$$\chi_{\Lambda_\Theta}\left(\mathfrak{D}\left(e; \lambda + \frac{k}{2} - m_1 - 1 - i\right)\right) = 0 \qquad \textit{for} \qquad \begin{cases} k \in \{n - m_2 + 1, \ldots, n\}, \\ i \in \{0, \ldots, k - (n - m_2 + 1)\}, \\ e \in Cl^{(k,k)}(n)_{\mathrm{pr}} \end{cases}$$

定理 1.4. α を(1.2) の *simple root* の任意の 1 つとする．このとき，$\lambda_\Theta \in \mathbb{C}^{m_1+1+m_3}$ のうち，対応する $\Lambda_\Theta \in \mathfrak{h}^*$ について，ある $e \in Cl^{(n-m_2+1)}(n)_{\mathrm{pr}}$ に対して

$$\chi_{\Lambda_\Theta - \alpha}\left(\mathfrak{D}\left(e; \lambda + \frac{n - m_2 + 1}{2} - m_1 - 1\right)\right) \neq 0$$

となるもの全体 G_α は，$\mathbb{C}^{m_1+1+m_3}$ の *Zariski* 開集合であるが，

$$G_\alpha \neq \emptyset.$$

[8] で考察した一般論を適用すると，これらの定理は，退化主系列表現及びスカラー型の一般 Verma 加群に関係するいくつかの $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ のイデアルについての以下の結果を導く．$\mathcal{F}_\Theta$ を(1.2) の simple root 全体とする．$\mathfrak{g}$ に 2 つの放物型部分環：

$$\begin{aligned}\mathfrak{b} &= \mathfrak{n}^+ + \mathfrak{h}, \\ \mathfrak{p}_\Theta &= \mathfrak{b} + \sum\{\, \mathfrak{g}_\alpha \ (\text{root } \alpha \text{ に対する root space}) \mid \alpha \in \mathbb{Z}\mathcal{F}_\Theta \,\}\end{aligned}$$

を定める．$\Lambda_\Theta : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ は $\mathfrak{p}_\Theta \ni D \mapsto \chi_{\Lambda_\Theta}(D) \in \mathbb{C}$ により $\mathfrak{b}$ または $\mathfrak{p}_\Theta$ の character として延長できる．そこで，

$$\begin{aligned}J(\Lambda_\Theta) &= \sum_{D \in \mathfrak{b}} \mathrm{U}(\mathfrak{g})(D - \chi_{\Lambda_\Theta}(D)) && (\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \text{ の左イデアル}) \\ J_\Theta(\Lambda_\Theta) &= \sum_{D \in \mathfrak{p}_\Theta} \mathrm{U}(\mathfrak{g})(D - \chi_{\Lambda_\Theta}(D)) && (\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \text{ の左イデアル}) \\ M(\Lambda_\Theta) &= \mathrm{U}(\mathfrak{g})/J(\Lambda_\Theta) && (\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \text{ の Verma 加群}) \\ M_\Theta(\Lambda_\Theta) &= \mathrm{U}(\mathfrak{g})/J_\Theta(\Lambda_\Theta) && (\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \text{ の一般 Verma 加群})\end{aligned}$$

とする．また，$\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の有限次 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-部分加群 V_{Λ_Θ} を

$$\mathfrak{D}\left(e; \lambda + \frac{k}{2} - 1 - i\right) \qquad \text{for} \qquad \begin{cases} k \in \{n - m_2 + 1, \ldots, n\}, \\ i \in \{0, \ldots, k - (n - m_2 + 1)\}, \\ e \in Cl^{(k,k)}(n)_{\mathrm{pr}} \end{cases}$$

で $\mathbb{C}$ 上張られるものとする．このとき，

系 1.5. すべての Λ_Θ について

$$V_{\Lambda_\Theta} \subset \mathrm{Ann}\, M_\Theta(\Lambda_\Theta)\,.$$

また，$\lambda_\Theta \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{F}_\Theta} G_\alpha$ に対応する（従って *generic* な）Λ_Θ に対して

$$J_\Theta(\Lambda_\Theta) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})V_{\Lambda_\Theta} + J(\Lambda_\Theta).$$

更に，*generic* な Λ_Θ に対して

$$\mathrm{Ann}\, M_\Theta(\Lambda_\Theta) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})V_{\Lambda_\Theta} + \mathrm{Ann}\, M_\Theta(\Lambda_\Theta)\,.$$

この結果と [8] の“非可換 Pfaffian”を用いた結果を合わせることにより，$\mathfrak{so}_n$ のすべてのスカラー型の一般 Verma 加群について，parameter が generic であるときの annihilator の生成元を明示的に与えることができる．

2 証明の概略

前節の Θ，λ_Θ，Λ_Θ を固定する．定理 1.3 も定理 1.4 も，$\mathfrak{D}(e;x)$ の Harish-Chandra 準同型 γ による像を計算することにより示される．そこで，γ を計算するための漸化式について考察する．$\overline{Cl}(n-2)$ で $e_3, e_4, \dots, e_n$ で生成される $Cl(n)$ の部分代数を表す．これは本質的には $Cl(n-2)$ と同じものなので，記号 $\overline{Cl}^{(k)}(n-2)$ ，$\overline{Cl}^{(k,\ell)}(n-2)$ 等を自由に用いる．$\bar{\mathfrak{g}} := \overline{Cl}^{(2)}(n-2)$ は $\mathfrak{g}$ の部分環で $\mathfrak{so}_{n-2}$ と同型である．$\mathfrak{g}$ に 2 つの巾零部分環：

$$\mathfrak{n}_1^{\pm} = \sum\{\mathbb{C}(e_1 \pm \sqrt{-1}e_2)e_i \mid 2 < i\}$$

を定義すると，分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_1^- \oplus (\mathbb{C}H_1 \oplus \bar{\mathfrak{g}}) \oplus \mathfrak{n}_1^+$ が得られるが，これを用いて $\mathbb{C}H_1 \oplus \bar{\mathfrak{g}}$-加群の準同型 $\gamma_1^{\lambda_1}$ が，射影：

$$\gamma_1^{\lambda_1} \;:\; \mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \left(\mathfrak{n}_1^-\mathrm{U}(\mathfrak{g}) + \mathrm{U}(\mathfrak{g})(H_1 - \lambda_1) + \mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_1^+\right) \oplus \mathrm{U}(\bar{\mathfrak{g}}) \to \mathrm{U}(\bar{\mathfrak{g}})$$

により定義される．このとき，任意の $D \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ に対して

$$\chi_{\Lambda_\Theta}(D) = \chi_{\Lambda_\Theta} \circ \gamma_1^{\lambda_1}(D)$$

が成り立ち，$\gamma_1^{\lambda_1}(D) \in \mathrm{U}(\mathfrak{so}_{n-2})$ であるので，$\mathfrak{so}_{n-2}, \mathfrak{so}_{n-4}, \dots$ について $\gamma_1^{\lambda_1}(D)$ を漸次計算することにより，$\gamma(D)$ が得られる．

ところが厄介なことに，$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$ の“主小行列式”$\mathfrak{D}(e;x)$ の $\gamma_1^{\lambda_1}$ による像を，再び $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}_{n-2}$ の“主小行列式”を用いて簡単に表すことはできない．そこで我々は，考察対象の“主小行列式”を大幅に一般化するのであるが，その前に“非可換 Pfaffian”について準備をする．

定義 2.1. $k = 0, \dots, m$，$I = \{i_1, i_2, \dots, i_{2k}\}$ に対して

$$\mathrm{Pf}(e_I) = \frac{1}{2^k k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2k}} \mathrm{sgn}(\sigma) F_{i_{\sigma(1)}i_{\sigma(2)}} F_{i_{\sigma(3)}i_{\sigma(4)}} \cdots F_{i_{\sigma(2k-1)}i_{\sigma(2k)}}$$

により，$\mathbb{C}$-線型写像 $\mathrm{Pf}(\cdot) \;:\; Cl^{(2k)}(n) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ を定める．ここで，$\mathrm{Pf}(1) = 1$ とする．

この写像 Pf は $Cl(n)_0 := \bigoplus_{k=0}^m Cl^{(2k)}(n)$ から $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ への $\mathfrak{g}$-準同型写像となる ([8])．本稿で主として用いるのは，Pf の“2 乗”

$$\mathrm{Pf}^{\otimes 2} \;:\; Cl(n)_0 \otimes Cl(n)_0 \ni e_I \otimes e_J \mapsto \mathrm{Pf}(e_I)\,\mathrm{Pf}(e_J) \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$$

であるが，こちらも明らかに $\mathfrak{g}$-準同型写像である．“主小行列式”を一般化する手掛かりとなるのは，本質的には [5] で示されたものと同等な，次の Pfaffian による行列式の展開公式である：

命題 2.2. I を重複を持たない $2k$ 個（$k=0,\ldots,m$）の添字の列とすると，

$$\mathfrak{D}(e_I\otimes e_I;x)=\sum_{\nu=0}^{k}\left(\sum_{\substack{J\subset I\\ \#J=2k-2\nu}}\mathrm{Pf}^{\otimes 2}(e_J\otimes e_J)\right)(x-\nu+1)\cdots(x-1)x\cdot x(x+1)\cdots(x+\nu-1)$$

I を重複を持たない $2k+1$ 個（$k=0,\ldots,[\frac{n-1}{2}]$）の添字の列とすると，

$$\mathfrak{D}(e_I\otimes e_I;x)=\sum_{\nu=0}^{k}\left(\sum_{\substack{J\subset I\\ \#J=2k-2\nu}}\mathrm{Pf}^{\otimes 2}(e_J\otimes e_J)\right)(x-\nu+\frac{1}{2})\cdots(x-\frac{1}{2})\cdot(x+\frac{1}{2})\cdots(x+\nu-\frac{1}{2})$$

これらの式の右辺を $\mathfrak{g}$-加群 $Cl(n)\otimes Cl(n)=\bigoplus Cl^{(k,\ell)}(n)$ の言葉で書き直す．まず $k,\ell\in\{0,1,\ldots,n\}$ でないとき，$Cl^{(k,\ell)}(n)=0$ とおく．$\theta=\sum_{\nu=1}^{n}e_\nu\otimes e_\nu\in Cl^{(1,1)}(n)$ とすると，$\mathfrak{g}$ は θ に自明に作用するので，

$$\theta\cdot *:Cl^{(k,\ell)}(n)\ni e\mapsto\theta\cdot e\in\bigoplus_{\substack{\epsilon_1=\pm1\\ \epsilon_2=\pm1}}Cl^{(k+\epsilon_1,\ell+\epsilon_2)}(n)$$

は $\mathfrak{g}$-準同型となる．この $\theta\cdot *$ と $\bigoplus_{\substack{\epsilon_1=\pm1\\ \epsilon_2=\pm1}}Cl^{(k+\epsilon_1,\ell+\epsilon_2)}(n)$ から $Cl^{(k+1,\ell+1)}(n)$, $Cl^{(k-1,\ell+1)}(n)$, $Cl^{(k-1,\ell-1)}(n)$, $Cl^{(k+1,\ell-1)}(n)$ への射影をそれぞれ合成することにより，4 つの $\mathfrak{g}$-準同型：

$$\begin{aligned}
s_{\mathrm{up}}:Cl^{(k,\ell)}(n)&\longrightarrow Cl^{(k+1,\ell+1)}(n),\\
s_{\mathrm{right}}:Cl^{(k,\ell)}(n)&\longrightarrow Cl^{(k-1,\ell+1)}(n),\\
s_{\mathrm{down}}:Cl^{(k,\ell)}(n)&\longrightarrow Cl^{(k-1,\ell-1)}(n),\\
s_{\mathrm{left}}:Cl^{(k,\ell)}(n)&\longrightarrow Cl^{(k+1,\ell-1)}(n)
\end{aligned}$$

を得る．これらの $\mathfrak{g}$-準同型は $Cl(n)\otimes Cl(n)$ の自己準同型とみなすことができるが，

$$\begin{aligned}
s_{\mathrm{up}}\circ s_{\mathrm{right}}&=s_{\mathrm{right}}\circ s_{\mathrm{up}}\\
s_{\mathrm{up}}\circ s_{\mathrm{left}}&=s_{\mathrm{left}}\circ s_{\mathrm{up}}\\
s_{\mathrm{down}}\circ s_{\mathrm{right}}&=s_{\mathrm{right}}\circ s_{\mathrm{down}}\\
s_{\mathrm{down}}\circ s_{\mathrm{left}}&=s_{\mathrm{left}}\circ s_{\mathrm{down}}
\end{aligned}$$

という交換関係を持っている．また，各 $Cl^{(k,\ell)}(n)$ 上で，

$$\begin{aligned}
s_{\mathrm{down}}\circ s_{\mathrm{up}}-s_{\mathrm{up}}\circ s_{\mathrm{down}}&=(n-k-\ell)\,\mathrm{id}_{Cl^{(k,\ell)}(n)}\\
s_{\mathrm{left}}\circ s_{\mathrm{right}}-s_{\mathrm{right}}\circ s_{\mathrm{left}}&=(k-\ell)\,\mathrm{id}_{Cl^{(k,\ell)}(n)}
\end{aligned}$$

という交換関係を持っている．重複を持たない k 個の添字の列 I に対して，

$$s_{\mathrm{down}}^{\nu}(e_I\otimes e_I)=\nu!\sum_{\substack{J\subset I\\ \#J=k-\nu}}e_J\otimes e_J$$

が成り立つこと，s_{down}，$\mathrm{Pf}^{\otimes 2}$，$\mathfrak{D}(\cdot;x)$ がすべて $\mathfrak{g}$-準同型であることから，命題 2.2 は，次の形に書き

命題 2.3. 各 $e \in Cl^{(2k,2k)}(n)_{\mathrm{pr}}$ $(k=0,\dots,m)$ に対して

$$\mathfrak{D}(e;\, x) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\mathrm{Pf}^{\otimes 2}(s_{\mathrm{down}}^{2\nu}(e))}{(2\nu)!}(x-\nu+1)\cdots(x-1)x\cdot x(x+1)\cdots(x+\nu-1)$$

各 $e \in Cl^{(2k+1,2k+1)}(n)_{\mathrm{pr}}$ $(k=0,\dots,[\frac{n-1}{2}])$ に対して

$$\mathfrak{D}(e;\, x) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\mathrm{Pf}^{\otimes 2}(s_{\mathrm{down}}^{2\nu+1}(e))}{(2\nu+1)!}(x-\nu+1)(x-\nu+\frac{1}{2})\cdots(x-\frac{1}{2})\cdot(x+\frac{1}{2})\cdots(x+\nu-\frac{1}{2})$$

一方，$s_{\mathrm{up}}, s_{\mathrm{right}}, s_{\mathrm{down}}, s_{\mathrm{left}}$ とこれらの交換関係を用いて各 $Cl^{(k,k)}(n)$ の $\mathfrak{g}$-加群としての構造を調べると，

$$\begin{aligned} Cl^{(k,k)}(n)_{\mathrm{pr}} &= \mathrm{Ker}\left(s_{\mathrm{left}} \ :\ Cl^{(k,k)}(n) \to Cl^{(k+1,k-1)}(n)\right) \\ &= \mathrm{Ker}\left(s_{\mathrm{right}} \ :\ Cl^{(k,k)}(n) \to Cl^{(k-1,k+1)}(n)\right) \end{aligned}$$

が示される．そこで一般の $Cl^{(k,\ell)}(n)$ に対しても，“主小行列式”に対応する部分空間 $Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}}$ を

$$Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}} = \mathrm{Ker}\left(s_{\mathrm{left}} \ :\ Cl^{(k,\ell)}(n) \to Cl^{(k+1,\ell-1)}(n)\right)$$

と定義する．交換関係から容易に示されるのであるが，$k<\ell$ のとき $Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}} = 0$ である．我々が用いる“主小行列式”の一般化は次である．

定義 2.4. $a \in \mathbb{C}, \nu \in \mathbb{N}$ に対し，x を変数とする 2ν 次の多項式：

$$\Phi(a,\nu;x) = \prod_{\mu=0}^{\nu-1}\left(x^2-(a+\mu)^2\right)$$

を定義する．$0 \le \ell \le k \le n$ で $k+\ell$ が偶であるような自然数の組 (k,ℓ) に対して，

$$\epsilon = \begin{cases} 0 & k\text{が偶のとき} \\ 1 & k\text{が奇のとき} \end{cases} \tag{2.1}$$

とする．このとき，$\mathfrak{g}$-準同型 $\mathfrak{D}(\cdot;\, x) : Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[x]$ を

$$\mathfrak{D}(e;\, x) = \sum_{\nu=0}^{\frac{\ell-\epsilon}{2}} \frac{\mathrm{Pf}^{\otimes 2}(s_{\mathrm{down}}^{2\nu+\epsilon}(e))}{(2\nu+\epsilon)!}\,\Phi\left(\frac{\ell-k+2\epsilon}{4},\nu;x\right), \qquad e \in Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}}$$

で定める．

命題 2.3 により，この定義が“主小行列式”の一般化になっていることが容易に分かる．ここまで $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$ の“主小行列式”$\mathfrak{D}(e;\, x)$ を一般化しておくと，それらの $\gamma_1^{\lambda_1}$ による像を，再び $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}_{n-2}$ の一般化された“主小行列式”を用いて表すことができる．我々は定理 1.3 を示す代わりに，一般化された“主小行列式”に対する次の定理を証明する．

定理 2.5. すべての Λ_Θ について，

$$\chi_{\Lambda_\Theta}\left(\mathfrak{D}\left(e;\, \lambda+\frac{j}{2}-m_1-1-i\right)\right) = 0 \qquad \textit{for} \qquad \begin{cases} j \in \{n-m_2+1,\dots,n\}, \\ i \in \{0,\dots,j-(n-m_2+1)\}, \\ k \ge \ell, \quad \frac{k+\ell}{2} = j, \\ e \in Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}} \end{cases}$$

$0 \le \ell \le k \le n$ で $k+\ell$ が偶であるような自然数の組 (k,ℓ) を固定し，それに応じて ϵ を(2.1) で定める．以下では，$e \in Cl^{(k,\ell)}(n)_{\rm pr}$ に対して $\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e;x))$ を計算する．まず，$Cl^{(k,\ell)}(n)_{\rm pr}^{H_1} = \{e \in Cl^{(k,\ell)}(n)_{\rm pr} \mid [H_1, e] = 0\}$ と置くと，$\gamma_1^{\lambda_1}$ が $\mathbb{C}H_1 \oplus \overline{\mathfrak{g}}$-加群の準同型であることから，

$$\gamma_1^{\lambda_1}\left(\mathfrak{D}\left(Cl^{(k,\ell)}(n)_{\rm pr};x\right)\right) = \gamma_1^{\lambda_1}\left(\mathfrak{D}\left(Cl^{(k,\ell)}(n)_{\rm pr}^{H_1};x\right)\right)$$

が得られる．ここで，

補題 2.6. $Cl^{(k,\ell)}(n)_{\rm pr}^{H_1}$ は，以下の 6 タイプの要素で $\mathbb{C}$ 上生成される：

(type I) $\quad e_1e_2 \otimes e_1e_2 \cdot A, \qquad A \in \overline{Cl}^{(k-2,\ell-2)}(n-2)_{\rm pr}$

(type II) $\quad (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \cdot B, \qquad B \in \overline{Cl}^{(k-1,\ell-1)}(n-2)_{\rm pr}$

(type III) $\quad C, \qquad C \in \overline{Cl}^{(k,\ell)}(n-2)_{\rm pr}$

(type IV) $\quad (k-\ell+2)(k-\ell+1)\cdot 1 \otimes e_1e_2 \cdot D \;+\; (k-\ell+1)\cdot(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)\cdot s_{\rm right}(D)$
$\quad - \; e_1e_2 \otimes 1 \cdot s_{\rm right}^2(D), \qquad D \in \overline{Cl}^{(k,\ell-2)}(n-2)_{\rm pr}$

(type V) $\quad (k-\ell)\cdot(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)\cdot E \;-\; 2e_1e_2 \otimes 1 \cdot s_{\rm right}(E), \qquad E \in \overline{Cl}^{(k-1,\ell-1)}(n-2)_{\rm pr}$

(type VI) $\quad e_1e_2 \otimes 1 \cdot F, \qquad F \in \overline{Cl}^{(k-2,\ell)}(n-2)_{\rm pr}$

が成り立つのであるが，これら 6 つのタイプ毎に $\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(\cdot;x))$ を計算する．詳細は省略するが，

補題 2.7. (a) $\gamma_1^{\lambda_e}$ の $U(\mathfrak{g})^{H_1}$ への制限は環準同型

(b) $e \in Cl^{(2k'+1,2\ell'+1)}(n)$ に対して

$$\mathrm{Pf}^{\otimes 2}(s_{\rm left}(e)) + \mathrm{Pf}^{\otimes 2}(s_{\rm right}(e)) = (k'-\ell')\,\mathrm{Pf}^{\otimes 2}(s_{\rm down}(e))$$

(c) $0 \le k' \le m-1$，$A \in \overline{Cl}^{(2k')}(n-2)$ に対して

$$\gamma_1^{\lambda_1}(\mathrm{Pf}(e_1e_2 \cdot A)) = \frac{\lambda_1 + k'}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{Pf}(A)$$

(d) $0 \le k', \ell' \le m-1$，$A \in \overline{Cl}^{(2k',2\ell')}(n-2)$ に対して

$$\gamma_1^{\lambda_1}(\mathrm{Pf}^{\otimes 2}(e_1e_2 \otimes e_1e_2 \cdot A)) = -(\lambda_1+k')(\lambda_1+\ell')\,\mathrm{Pf}^{\otimes 2}(A)$$

(e) $1 \le k', \ell' \le m$，$A \in \overline{Cl}^{(2k'-1,2\ell'-1)}(n-2)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\gamma_1^{\lambda_1}(\mathrm{Pf}^{\otimes 2}((e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)\cdot A)) \\
&\quad = -\sqrt{-1}\gamma_1^{\lambda_1}(\mathrm{Pf}^{\otimes 2}((e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)\cdot A)) \\
&\quad = \mathrm{Pf}^{\otimes 2}(s_{\rm left}(A)) - (\lambda_1 + k' - 1)\,\mathrm{Pf}^{\otimes 2}(s_{\rm down}(A))
\end{aligned}$$

等を用いると，次の結果が得られる．

命題 2.8. $e \in Cl^{(k,\ell)}(n)_{\rm pr}^{H_1}$ は補題 2.6 の 6 タイプのいずれかであるとする．このとき，$\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e;x))$ について以下の漸化式が成立する：

(type I) $\quad \gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e;x)) = \left\{x^2 - \left(\lambda_1 + \dfrac{k+\ell}{4} - 1\right)^2\right\}\mathfrak{D}(A;x).$

(type II) $\epsilon = 0$ のとき

$$\begin{aligned}\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e;\, x)) &= \left(x - \frac{\ell - k}{4}\right)\left(2x + \frac{\ell - k}{2} - 1\right)\mathfrak{D}\left(B;\, x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k+\ell}{4} - 1\right)\right\}\mathfrak{D}(s_{\mathrm{down}}(B);\, x)\,.\end{aligned}$$

$\epsilon = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e;\, x)) &= 2\,\mathfrak{D}\left(B;\, x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k+\ell}{4} - 1\right)\right\}\mathfrak{D}(s_{\mathrm{down}}(B);\, x)\,.\end{aligned}$$

(type III) $\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e;\, x)) = C.$

(type IV) $\epsilon = 0$ のとき

$$\begin{aligned}&\frac{4\sqrt{-1}}{(k - \ell + 2)^2}\,\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e;\, x)) \\ &\quad = 2\,(2\lambda_1 + \ell - 3)\,\mathfrak{D}\left(D;\, x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k+\ell}{4} - 1\right)\right\}\left(2x + \frac{k - \ell}{2} + 1\right)\mathfrak{D}(s_{\mathrm{down}}(D);\, x)\,.\end{aligned}$$

$\epsilon = 1$ のとき

$$\begin{aligned}&\frac{2\sqrt{-1}}{(k - \ell + 2)^2}\left(x + \frac{k - \ell + 2}{4}\right)\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e;\, x)) \\ &\quad = \left(\lambda_1 + \frac{\ell - 1}{2} - 1\right)\left(2x + \frac{\ell - k}{2} - 2\right)\mathfrak{D}\left(D;\, x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k+\ell}{4} - 1\right)\right\}\mathfrak{D}(s_{\mathrm{down}}(D);\, x)\,.\end{aligned}$$

(type V) $\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e;\, x)) = 0.$

(type VI) $\epsilon = 0$ のとき

$$\begin{aligned}&\sqrt{-1}\,\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e;\, x)) \\ &\quad = \left(\lambda_1 + \frac{k}{2} - 1\right)\mathfrak{D}\left(F;\, x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k+\ell}{4} - 1\right)\right\}\left(x + \frac{\ell - k}{4}\right)\mathfrak{D}(s_{\mathrm{down}}(F);\, x)\,.\end{aligned}$$

$\epsilon = 1$ のとき

$$\begin{aligned}&\sqrt{-1}\left(2x + \frac{\ell - k}{2}\right)\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e;\, x)) \\ &\quad = (2\lambda_1 + k - 2)\left(x - \frac{\ell - k + 2}{4}\right)\mathfrak{D}\left(F;\, x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k+\ell}{4} - 1\right)\right\}\mathfrak{D}(s_{\mathrm{down}}(F);\, x)\,.\end{aligned}$$

これらの漸化式から定理 2.5 を導くのは容易である.

定理 1.4 の方も，命題 2.8 から得られる.

証明. $i = 1, 2, \dots, m_2 - 1$ に対して,

$$
\begin{aligned}
D_1 &= e_{\{1,2,\dots,2m_1\}} \otimes e_{\{1,2,\dots,2m_1\}}, \\
D_2 &= (e_{2m_1+1} \otimes e_{2m_1+1} + e_{2m_1+2} \otimes e_{2m_1+2}) \cdots \\
&\qquad \cdots (e_{2m_1+2i-3} \otimes e_{2m_1+2i-3} + e_{2m_1+2i-2} \otimes e_{2m_1+2i-2}), \\
D_3 &= (e_{2m_1+2i-1} e_{2m_1+2i} \otimes e_{2m_1+2i-1} e_{2m_1+2i})(e_{2m_1+2i+1} \otimes e_{2m_1+2i+1} + e_{2m_1+2i+2} \otimes e_{2m_1+2i+2}) \\
&- (e_{2m_1+2i-1} \otimes e_{2m_1+2i-1} + e_{2m_1+2i} \otimes e_{2m_1+2i})(e_{2m_1+2i+1} e_{2m_1+2i+2} \otimes e_{2m_1+2i+1} e_{2m_1+2i+2}), \\
D_4 &= (e_{2m_1+3} \otimes e_{2m_1+3} + e_{2m_1+4} \otimes e_{2m_1+4}) \cdots \\
&\qquad \cdots (e_{2m_1+2m_2-1} \otimes e_{2m_1+2m_2-1} + e_{2m_1+2m_2} \otimes e_{2m_1+2m_2}), \\
D_5 &= e_{\{2m_1+2m_2+1,\dots,n\}} \otimes e_{\{2m_1+2m_2+1,\dots,n\}}, \\
e &= D_1 D_2 D_3 D_4 D_5
\end{aligned}
$$

と置くと，$e \in Cl^{(m-m_2+1)}(n)_{\mathrm{pr}}$ となる.

$$
\chi_{\Lambda_{\Theta} - \Lambda_{m_1+i} + \Lambda_{m_1+i+1}} \left(\mathfrak{D}\left(e; \lambda + \frac{n - m_2 + 1}{2} - m_1 - 1 \right) \right)
$$

を命題 2.8 により計算すると，0 でない多項式が得られる. □

参考文献

[1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.

[2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.

[3] J. Dixmier, *Algèbres Enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[4] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[5] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, preprint, Department of Mathematics, Faculty of Science, Univ. Kyoto, 1999.

[6] A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples*, Princeton University Press, 1986.

[7] H. Oda, *On Pfaffian-type operators of orthogonal Lie algebras*, preprint, 2000, UTMS 2000-47.

[8] ———, *On annihilator operators of the degenerate principal series for orthogonal lie groups*, RIMS Kôkyûroku, Kyoto Univ. **1183** (2001), 74–93.

[9] T. Oshima, *Generalized Capelli identities and boundary value problems for $GL(n)$*, Structure of Solutions of Differential Equations, World Scientific, 1996, pp. 307–335.

[10] ———, *A quantization of conjugacy classes of matrices*, preprint, Department of Mathematical Science, University of Tokyo, 2000, UTMS 2000-38.