数理解析研究所講究録 1245 巻 2002 年 36-41



# 退化 affine Hecke 代数の主系列表現について

東京大学大学院数理科学研究科　本田 龍央
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo,　Tatsuo Honda

昨年のこの集会に引き続き、退化 affine Hecke 代数の主系列表現を扱う. 前回は主系列表現に現れる parameter $\lambda$ が regular な場合に具体的に組成列が構成できることを述べたが、$\lambda$ が一般の場合は、複雑であり、組成列の具体的な構成は困難である. しかし、ある $\lambda$ に対し regular なときに構成した減少列が組成列となる場合がある. 今回はそのことについて述べたい.

## §1. 準備

[2],[3] に従って次のように記号を設定する：

- $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}, (\cdot,\cdot))$ : $n$ 次元 Euclid 空間、 $\mathfrak{h}$ : $\mathfrak{a}$ の複素化 ;
- $R \subset \mathfrak{a}^*$ : $\mathfrak{a}$ 上の被約 crystallographic root system ;
- $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset R_+ \subset R$ : $R$ の 基底、positive system ;
- $\rho = 2^{-1}\sum_{\alpha\subset R} \alpha$;
- $\alpha^\vee$ : $\alpha \in R$ に対応する coroot ;
- $r_\alpha$ : $\alpha \in R$ に関する直交鏡映、特に $r_i = r_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ と記す ;
- $W$ : $R$ の Weyl 群、$S = \{r_1, \ldots, r_n\}$ : $W$ の simple system ;
- $\mathfrak{g}$ : $R$ に対応する複素半単純 Lie 代数.

**Definition 1.** $\mathbf{H}$ を $R_+$、$k \in \mathbb{C}$ に付随する "退化 affine Hecke 代数" $\mathbf{H} = \mathbf{H}(R_+, k)$ を次の条件をみたす $\mathbb{C}$ 代数 として定義する[1]；

1. $\mathbb{C}$ 線形空間として、$\mathbf{H} \cong S(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[W]$、
2. $S(\mathfrak{h})$、$\mathbb{C}[W]$ は $\mathbf{H}$ の単位的部分 $\mathbb{C}$ 代数、
3. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$、$\zeta \in \mathfrak{h}$ に対し、

$$r_i \cdot \zeta \;=\; r_i(\zeta) \cdot r_i - k\alpha_i(\zeta)$$

$\mathfrak{R}(\mathbf{H})$ を有限次元 $\mathbf{H}$ 加群の圏とし、$K_0(\mathfrak{R}(\mathbf{H}))$ を $\mathfrak{R}(\mathbf{H})$ の Grothendieck 群、また対象 $M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{R}(\mathbf{H}))$ に対し、対応する $K_0(\mathfrak{R}(\mathbf{H}))$ の元を $[M]$ とする.

主な対象は次の $\mathbf{H}$ 加群である.

**Definition 2.** $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ に対し、$\chi_\lambda : S(\hat{\mathfrak{h}}) \to \mathbb{C}$ を $\lambda$ より誘導される 1 次元表現とし、それに付随する加群を $\mathbb{C}_\lambda$ とするとき、$\mathbb{C}_\lambda$ により誘導される $\mathbf{H}$ 加群

$$\mathbf{I}_\lambda \;:=\; \mathrm{Ind}_{S(\hat{\mathfrak{h}})}^{\mathbf{H}} \mathbb{C}_\lambda$$

を "主系列加群" と呼ぶ. $1 \in \mathbb{C}_\lambda$ を $1_\lambda$ と記すことにする.

---

[1] $k$ は root の $W$ 軌道毎に異なっていてもよいが、ここではすべて等しいとしておく.

定義より $\mathbf{I}_\lambda$ は $\mathbb{C}[W]$ 加群として左正則表現 $\mathbb{C}[W]$ と同型となる. $\mathbf{I}_\lambda$ について次が成立する:

**Proposition 1** ([6] Proposition 2.3.). $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$, $w \in W$ に対し, $K_0(\mathcal{R}(\mathbf{H}))$ に於いて $[\mathbf{I}_\lambda] = [\mathbf{I}_{w\lambda}]$.

今, $\lambda$, $k$ に対し

$$R_{\lambda,k,+} := \{\alpha \in R_+ : \lambda(\alpha^\vee)^2 = k^2\}$$

とする. このとき次のことが言える.

**Lemma 1.** $\lambda$ に対し $w \in W$ で $R_{w\lambda,k,+} = \{\alpha \in R_+ : w\lambda(\alpha^\vee) = -k\}$ となるものが存在する.

上の Proposition 1 に考慮して, 以下では $\mathbf{I}_{w\lambda}$ について考える. 特に $w\lambda$ を改めて $\lambda$ とおくことにする.

ここで次のように記号を与える:

- $L_x$ : $\mathfrak{g}$ の最高 weight $-x\rho + \rho$ $(x \in W)$ の単純最高 weight 加群;
- $x, y \in W$ に対し

$$w \leq_L y \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Ann} L_y \subset \operatorname{Ann} L_x,$$
$$w \sim_L y \;\Leftrightarrow\; w \leq_L y \text{ and } y \leq_L w;$$

- $c_x$ : $x \in W$ の属する $\sim_L$ による同値類;
- $x, y \in W$ に対し

$$y \leq_L c_x \;\Leftrightarrow\; \exists w \in c_x \text{ s.t. } y \leq_L w;$$

- $\mathcal{H} = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{C}[q^{1/2}, q^{-1/2}]C_w$ : $W$ に対応する Hecke 代数, $C_w$ は Kazhdan-Lusztig 基底;
- $e_w$ : $C_w$ の $q^{1/2} \to 1$ における特殊化;
- $E_{c_w}(\lambda) := \bigoplus_{x \leq_L c_w} \mathbb{C}e_x \otimes 1_\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{h}^*)$;
- $\Theta \subset S$ に対し $W_\Theta$ : 対応する $W$ の標準放物型部分群, $w_\Theta$ : $W_\Theta$ の最長元;
- $c_\Theta$ : $w_\Theta$ を含む $\sim_L$ による同値類.

一般に $E_{c_w}(\lambda)$ は部分 $\mathbf{H}$ 加群にはならないが,

**Proposition 2.** $\Theta \subset S$ とする. 任意の $\alpha \in \Theta$ に対し $\lambda(\alpha^\vee) = -k$ となるとき, $E_{c_\Theta}(\lambda)$ は $\mathbf{I}_\lambda$ の部分 $\mathbf{H}$ 加群となる.

このようにしてできる部分加群を用いて $\mathbf{I}_\lambda$ の正規列を次のように構成していく. まず

$$\{\alpha \in \Pi : \lambda(\alpha^\vee) = -k\} = \{\beta_1, \cdots, \beta_l\}$$

とおき, 更に

$$\Xi := \left\{(i_1, \dots, i_l) \in \{1, \dots, l, \infty\}^l : 1 \leq \exists p \leq l \text{ s.t. } \begin{matrix} 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq l, \\ i_{p+1} = \cdots = i_l = \infty \end{matrix}\right\}$$

とする. $\Xi$ 上には辞書式順序 $\prec$ を定義する, 即ち $(i_1, \cdots, i_l), (j_1, \cdots, j_l) \in \Xi$ に対し

$$(i_1, \cdots, i_l) \prec (j_1, \cdots, j_l) \;\Leftrightarrow\; \exists m \in \{1, \dots, l\} \text{ s.t. } \begin{matrix} i_1 = j_1, \cdots, i_{m-1} = j_{m-1}, \\ \text{and } i_m < j_m \end{matrix}$$

とする．これにより $(\Xi, \prec)$ は $2^l$ 個からなる全順序集合となる．$\Xi = \{\zeta_1, \cdots, \zeta_{2^l}\}$ ($i < j \Leftarrow \zeta_i \prec \zeta_j$) と記すことにし，$\zeta = (i_1, \cdots, i_l) \in \Xi$ に対し $i_p \leq l$ かつ $i_{p+1} = \infty$ のとき，$\Theta(\zeta) := \{\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_p}\}$ とおき，更に

$$E_\xi^\lambda := \sum_{\xi' \prec \xi_i} E_{c_{\Theta(\xi')}}(\lambda),$$

とおく．このとき次が成立する:

**Proposition 3.**

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{I}_{w\lambda} = E_{\xi_1}^{\perp,\lambda} \supsetneq E_{\xi_2}^{\perp,\lambda} \supsetneq \cdots \supsetneq E_{\xi_{2^l}}^{\perp,\lambda} \supsetneq 0.$$

は $\mathbf{I}_\lambda$ の $\mathcal{R}(\mathbf{H})$ に於ける正規列である．

このように構成した正規列はある意味で標準的なものとなる．以上の準備の下で次のような問題を考えることにする：

**問題** 正規列 (1) は，いつ $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列となるか？

一般に，この正規列は組成列ではないのだが，$\lambda$ が regular，即ち $\lambda(\alpha^\vee) \neq 0$ (for any $\alpha \in R$) のときは，前回話したように，これが $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列になる．実は $\lambda$ が regular でないときも組成列になり得る．以下では幾つかの特殊な例を考察することにより，(1) が組成列であるための必要条件を得ることを述べる．また特に $R$ が $A$ 型の場合，必要十分条件が与えられる．

## §2 例

先ず条件を記述するために次のようなものを考える．$D = \overset{1}{\circ} - \overset{2}{\circ} - \cdots$ を $R$ の Dynkin 図形とするとき，各頂点 $\overset{i}{\circ}$ を次のように置き換える:

- $\lambda(\alpha_i^\vee) = -k$ ならば $\overset{i}{\circ}$ を $\overset{i}{\odot}$ にする;
- $\lambda(\alpha_i^\vee) = 0$ ならば $\overset{i}{\circ}$ を $\overset{i}{\blacksquare}$ にする;
- 上記以外はそのまま．

このようにして得られる図形を $D(\lambda)$ と記すことにする．

$A$ 型の退化 Hecke 代数に対し重複度公式:

$$\text{(2)} \qquad [\mathbf{I}_\lambda] = \sum_{i=1}^{m} P_{e,\sigma_i'}(1)[\mathcal{L}_{\sigma_i,\lambda}]$$

が荒川-鈴木 ([1]) により知られている．ここで $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ は $\mathfrak{S}_{n+1,\lambda} \backslash \mathfrak{S}_{n+1} / \mathfrak{S}_{n+1,\lambda}$ ($\mathfrak{S}_{n+1,\lambda}$ は $\lambda$ における $\mathfrak{S}_{n+1}$ の固定部分群) のある条件を満たす完全代表系とし，$\sigma_i'$ は $\mathfrak{S}_{n+1,\lambda}\sigma_i\mathfrak{S}_{n+1,\lambda}$ の最長元とする．また $\mathcal{L}_{\sigma_i\lambda}$ は標準加群と呼ばれる $\mathbf{H}$ 加群の既約商とする．更に $P_{x,y}(q)$ は Kazhdan-Lusztig 多項式とする (詳しくは [1] 参照)．この重複度公式と Kazhdan-Lusztig 多項式を計算することで，$\mathbf{I}_\lambda$ を解析していく．

**Example 1.** $R$ を $A$ 型とし，

$$D(\lambda) = \overset{1}{\odot} - \cdots - \overset{b}{\odot} - \overset{b+1}{\blacksquare} - \cdots - \overset{n}{\blacksquare} \qquad (1 \leq b \leq n)$$

に対応する $\lambda$ を考える．上の公式 (2) を用いて計算すると，対応する Kazhdan-Lusztig 多項式がすべて 1 になることが示され，これにより (1) が $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列になることがわかる．また

$$D(\lambda) = \overset{1}{\blacksquare} - \cdots - \overset{a}{\blacksquare} - \overset{a+1}{\odot} - \cdots - \overset{n}{\odot} \qquad (1 \leq a \leq n)$$

の場合も同様である.

**Example 2.** $R$ を $A$ 型とし,

$$D(\lambda) = \overset{1}{\blacksquare} - \cdots - \overset{a-1}{\blacksquare} - \overset{a}{\odot} - \cdots - \overset{b}{\odot} - \overset{b+1}{\blacksquare} - \cdots - \overset{n}{\blacksquare} \qquad (1 < a < b < n)$$

に対応する $\lambda$ を考える. この場合も上の例と同様にして計算することにより (1) が組成列であることが確かめられる.

**Example 3.** Example 2 では $\odot$ の個数が 2 以上であるが, $A_3$ 型で $D(\lambda) = \overset{1}{\blacksquare} - \overset{2}{\odot} - \overset{3}{\blacksquare}$ という $\lambda$ を考えると, [2] に与えた例のように (1) が組成列にならないことがわかる.

**Example 4.** $R$ を $A$ 型とし,

$$D(\lambda) = \overset{1}{\odot} - \overset{2}{\blacksquare} - \cdots - \overset{n-1}{\blacksquare} - \overset{n}{\odot} \qquad (1 < n).$$

に対応する $\lambda$ を考えると, もし (1) が $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列だとすると, 4 つの組成因子のみを持つことになるのだが, この場合重複度公式を計算すると 5 つ以上の組成因子を持たなくてはいけないことがわかり, 従って (1) は組成列ではない.

ここまでは重複度公式を用いてきたが, これら以外にも次のことがわかる.

**Example 5.** $R$ を $B_2$ 型だとして $D(\lambda) = \odot \Rightarrow \blacksquare$ に対応する $\lambda$ を考える. この場合は上の形の重複度公式が使えないので, Weyl 群の既約表現の個数と比較しながら (1) を調べていくと, この場合は組成列となることがわかる. 一方, $D(\lambda) = \blacksquare \Rightarrow \odot$ に対応する $\lambda$ を考えると (1) に現れる部分加群以外の部分加群を構成することができ, 従ってこの場合 (1) は組成列にならない.

## §3 組成列になるための条件

一般の $R$ の場合に (1) が組成列であるための必要条件が $D(\lambda)$ を用いて次のように与えられる:

**Theorem 1.** $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し (1) が組成列であるならば, $D(\lambda)$ は

$$\blacksquare - \odot - \blacksquare, \qquad \odot - \blacksquare - \cdots - \blacksquare - \odot, \qquad \blacksquare \Rightarrow \odot$$

という部分 graph を含まない.

更に各頂点が $\odot$ または $\blacksquare$ のみからなる $D(\lambda)$ の部分 graph を $D(\lambda)$ の特異成分と呼ぶことにする. 例えば

$$D(\lambda) = \odot - \blacksquare - \circ - \blacksquare - \blacksquare - \odot - \circ - \odot$$

に対し $\odot - \blacksquare$, $\blacksquare - \blacksquare - \odot$, $\odot$ が $D(\lambda)$ の特異成分となる.

$R$ が $A$ 型の場合は, 上よりも更に強い結果を得る:

**Theorem 2.** $R$ を $A$ 型の root 系とする. このとき次の 2 条件は同値:

1. (1) は $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列である;
2. $D(\lambda)$ の特異成分が次の 2 つの型のいずれかになる:

$$1. \quad \odot - \odot - \cdots - \odot - \blacksquare - \cdots - \blacksquare,$$
$$\text{or} \quad \blacksquare - \blacksquare - \cdots - \blacksquare - \odot - \cdots - \odot$$
$$2. \quad \blacksquare - \cdots - \blacksquare - \odot - \cdots - \odot - \blacksquare - \cdots - \blacksquare$$

ただし 2 の場合は $\odot$ の個数は 2 以上であるとする.

Theorem 1 の証明は先ず上の正規列とは別に $\mathbf{I}_\lambda$ の別の正規列を用いて $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列が $D(\lambda)$ の特異成分だけに依存することを示す. これにより $D(\lambda)$ の頂点が ◇, ■ からなるものだけを考えればよくなる. これと上に与えた例の帰結として Theorem 1 を得る.

また Theorem 2 も荒川, 鈴木の公式を用いて Kazhdan-Lusztig 多項式を計算して得られる. さらにこの重複度公式及び Kahzdan-Lusztig 多項式の計算の結果から次のようなこともわかる:

**Theorem 3.** $R$ が $A$ 型の場合, (1) が $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列であることと $\mathbf{I}_\lambda$ の各組成因子の重複度が 1 となることは同値となる.

## §4 最後に

一般の $R$ に対し, Kazhdan-Lusztig 多項式で表されるような標準加群に対する重複度公式が載っている文献を筆者は知らないので, 今のところ, この方法ではこれが限界である. また (1) が組成列でない場合に, どのように部分加群を補って組成列を組織的に構成するか, という問題も考えられるが, これについてはほとんどわからない.

一方, 最近, 対応する半単純 Lie 代数の Verma 加群の sub-quotient の零化 ideal の Harish-Chandra 写像による像と $\mathbf{I}_\lambda$ の部分加群との間に関係があると拓殖大の織田さんに教えていただいた. これは次のようなものである.

任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し

$$M_\lambda := \mathbf{H}/\Big(\sum_{p \subset S(\mathfrak{h})^W} \mathbf{H}(p - p(\lambda)) + \sum_{w \subset W} \mathbf{H}(w - e)\Big)$$

とし, $\mathbf{H}$ から $M_\lambda$ への標準的全射による 1 の像を $\phi_\lambda^+$ と記すことにする. このとき,

**Proposition 4.** 任意の $\alpha \in R_+$ に対し $\lambda(\alpha^\vee) \neq k$ となるならば, $\mathbf{I}_\lambda \overset{\pi}{\simeq} M_\lambda$ となる同型射 $\pi$ が存在する.

$U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{h})(= S(\mathfrak{h}))$ を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ の普遍展開環とし, $\gamma : U(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})$ を $\rho$-shift 付きの Harish-Chandra 写像とする. $M(\lambda)$ を Verma 加群とし, $\Theta \subset \Pi$ に対し $M_\Theta(\lambda)$ を scalor type の一般 Verma 加群とするとき, 上の同型射 $\pi$ を経由して

$$\pi(\gamma(\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})} M_\Theta(\lambda))\phi_\lambda^+) = E_{c_\Theta}(\lambda)$$

となることが予想されている. また $R$ が $A$ 型の場合, [4] により $\mathrm{Ann}\, M_\Theta(\lambda)$ の記述が得られており, generic な $\lambda$ に対し

$$E_{c_\Theta}(\lambda) = \sum_I S(\mathfrak{h})\pi(\gamma(D_{II}^k(*)))$$

と一般 Capelli 作用素 $D_{II}^k(*)$ ($*$ は適当な値) を用いて表されることになる. またこれは Heckman-Opdam の超幾何関数の spectral parameter が退化する場合に現れる微分方程式系に一致する.

上の例で見たように, 一般には $\mathbf{I}_\lambda$ の組成因子で $E_{c_\Theta}(\lambda)$ の商として得られないものが存在するが, Verma 加群, または対応する半単純 Lie 代数の情報から $\mathbf{H}$ の主系列表現の組成因子の情報が得られるのではないか, と期待している.

## References


[1] T. Arakawa, T. Suzuki, *Duality between $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ and the degenerate affine Hecke algebra*, J. Algebra 209 (1998), no. 1, 288–304.

[2] T. Honda, 退化 affine Hecke 代数の主系列加群の組成列について, 数理解析研究所講究録「群と環の表現論及び非可換調和解析」

[3] E. Opdam, *Lectures on Dunkl operators*, preprint 1998.

[4] T. Oshima, *A quantization of conjugacy classes of matrices*, preprint, UTMS 2000-38.

[5] P. Polo, *Construction of arbitrary Kazhdan-Lusztig polynomials in symmetric groups*, Represent. Theory 3 (1999), 90–104 (electronic).
[6] J. D. Rogawski, *On modules over the Hecke algebra of a p-adic group*, Invent. Math. 79 (1985), no. 3, 443–465.