数理解析研究所講究録 1246 巻 2002 年 1-5

An Equilibrium Point of the Fractional Metagame

秋田県立大学　経営システム工学科　木村　　寛 (YUTAKA KIMURA)*
秋田県立大学　経営システム工学科　星野　満博 (MITSUHIRO HOSHINO)†
秋田県立大学　経営システム工学科　矢戸　弓雄 (YUMIO YATO)‡

1. Introduction

制約付き分数形非協力 n 人ゲームを次の集合

$$(MGP) \qquad (N, X, f_i, g_i, G^i, S^i) \tag{1.1}$$

で与える. ここで,

(i) $N := \{1, 2, \cdots, n\}$ をプレイヤーの集合とし, i 番目のプレイヤーを $i = 1, 2, \cdots, n$ で表す.

(ii) E をバナッハ空間とし, 各々のプレイヤー $i \in N$ は戦略集合 $X_i \subset E$ から戦略 x_i を選び, また $X := \prod_{i=1}^n X_i$ とおき, $X \ni x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で n 人の戦略を表し, これを多価戦略 (multistrategies) と呼ぶ.

(iii) 任意の i に対して, 関数 f_i, g_i を $f_i : X \to \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$, $g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$ で与える. ただし, $\boldsymbol{R}_+ = (0, +\infty)$.

(iv) 各 $i \in N$ に対して, X から $\boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$ への関数 G^i を $G^i := \frac{f_i}{g_i}$ と定義し, 関数 G^i をプレイヤー $i \in N$ の損失関数とする.

(v) 各 $i \in N$ に対して, 集合値写像 $S^i : X^{\hat{i}} \to 2^{X_i}$ をプレイヤー $i \in N$ の decision rule とし, $S := \prod_{i=1}^n S^i$ とおく.

Definition 1. $\overline{x} \in X$ がゲーム (MGP) において **consistent** であるとは, すべての $i \in N$ に対して,

$$\overline{x}_i \in S^i(\overline{x}^{\hat{i}}) \tag{1.2}$$

が成り立つことをいう. ただし, 記号 $\overline{x}^{\hat{i}}$ は $\overline{x}^{\hat{i}} = (\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_{i-1}, \overline{x}_{i+1}, \cdots, \overline{x}_n)$ を表し, 集合 $X^{\hat{i}}$ は $\prod_{j \neq i} X_j$ を表すものとする. つまり, consistent multistrategies の集合は集合値写像 $S : X \to 2^X$ の不動点の集合である.

* 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4 E-mail: yutaka@akita-pu.ac.jp
† 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4 E-mail: hoshino@akita-pu.ac.jp
‡ 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4 E-mail: yato@akita-pu.ac.jp

次に均衡点 (social equilibrium point) の定義を与える.

Definition 2. $\overline{x} = (\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n) \in X$ がゲーム (MGP) の **social equilibrium point** (for short, **s.e.p.**) であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$\overline{x}_i \in S^i(\overline{x}^{\hat{i}}) \qquad \text{and} \qquad G^i(\overline{x}) = \inf_{y_i \in S^i(\overline{x}^{\hat{i}})} G^i(y_i, \overline{x}^{\hat{i}}) \tag{1.3}$$

が成り立つことをいう.

2. Main Results

Proposition 1. 次の (1)(2) は同値である.

(1) $\overline{x} \in X$ がゲーム (MGP) の **s.e.p.** である.

(2) 任意の $i \in N$ において, すべての $y_i \in S^i(\overline{x}^{\hat{i}})$ に対して, 次が成り立つ.

$$G^i(\overline{x}) \leq G^i(y_i, \overline{x}^{\hat{i}}) \tag{2.1}$$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) であることは inf の定義より明らか.
次に, (2) $\Rightarrow$ (1) について (1.3) であることをいう. ($\geq$) は $\overline{x} \in X$ より inf の定義より成立する. また, ($\leq$) であることは, 仮定 (2.1) はすべての $y_i \in S^i(\overline{x}^{\hat{i}})$ で成立しているので,

$$G^i(\overline{x}) \leq \inf_{y_i \in S^i(\overline{x}^{\hat{i}})} G^i(y_i, \overline{x}^{\hat{i}})$$

が得られる. よって, 以上より (1.3) であることがいえ, (1) であることが示された. □

各 $i \in N$ において, 関数 $\varphi_i : X \times X \to \boldsymbol{R}$ をつぎで定義する.

$$\varphi_i(x, y) := f_i(x) g_i(y_i, x^{\hat{i}}) - g_i(x) f_i(y_i, x^{\hat{i}}) \qquad \forall (x, y) \in X \times X. \tag{2.2}$$

更に, $\varphi : X \times X \to \boldsymbol{R}$ をつぎで定義する.

$$\varphi(x, y) := \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x, y) \qquad \forall (x, y) \in X \times X. \tag{2.3}$$

Proposition 2. 次の (1)(2) は同値である.

(1) $\overline{x} \in X$ がゲーム (MGP) の **s.e.p.** である.

(2) 任意の $y \in X$ に対して, $\varphi(\overline{x}, y) \leq 0$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) であることは, $\overline{x} \in X$ がゲーム (MGP) の **s.e.p.** であることより, Proposition 1. から, $\forall i \in N, y_i \in S^i(\overline{x}^{\hat{i}})$ で

$$G^i(\overline{x}) \leq G^i(y_i, \overline{x}^{\hat{i}})$$

が成り立つ．よって，

$$\varphi_i(\overline{x}, y) = f_i(\overline{x})g_i(y_i, \overline{x}^{\hat{i}}) - g_i(\overline{x})f_i(y_i, \overline{x}^{\hat{i}}) \leq 0. \tag{2.4}$$

この (2.4) はすべての $i \in N$ で成立するので，

$$\varphi(\overline{x}, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\overline{x}, y) \leq 0 \tag{2.5}$$

である．

次に，(2) $\Rightarrow$ (1) であることは，任意の $i \in N$ を固定し，$y = (y_i, \overline{x}^{\hat{i}})$ をとる．今，$\varphi(\overline{x}, y) \leq 0$ であることより，

$$\varphi_i(\overline{x}, y) + \sum_{j \neq i} \varphi_j(\overline{x}, y) \leq 0 \tag{2.6}$$

を得る．ここで，

$$\begin{aligned}
\sum_{j \neq i} \varphi_j(\overline{x}, y) &= \sum_{j \neq i} (f_j(\overline{x})g_j(y_j, \overline{x}^{\hat{j}}) - g_j(\overline{x})f_j(y_j, \overline{x}^{\hat{j}})) \\
&= \sum_{j \neq i} (f_j(\overline{x})g_j(\overline{x_j}, \overline{x}^{\hat{j}}) - g_j(\overline{x})f_j(\overline{x_j}, \overline{x}^{\hat{j}})) \\
&\quad (\text{今 } j \neq i \text{ より}, \overline{x} = (\overline{x_j}, \overline{x}^{\hat{j}}) = (y_j, \overline{x}^{\hat{j}})) \\
&= \sum_{j \neq i} (f_j(\overline{x})g_j(\overline{x}) - g_j(\overline{x})f_j(\overline{x})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって，以上より $\varphi_i(\overline{x}, y) \leq 0$ である． □

Definition 1. X, Y をバナッハ空間とする．このとき集合値写像 $S : X \to 2^Y$ が upper hemicontinuous (for short, *u.h.c.*) であるとは，任意の $y^* \in Y^*$ に対して，関数

$$x \longmapsto \sup_{y \in S(x)} \langle y^*, y \rangle \tag{2.7}$$

が 上半連続関数になることである．ただし，Y^* は Y の共役空間を表す．

Lemma 1. X をバナッハ空間, K を X のコンパクトな凸部分集合とし, K から X への集合値写像 S は *u.h.c.* かつ任意の $x \in K$ に対して，$S(x)$ は閉凸集合かつ $S(x) \neq \emptyset$ と仮定する．また，実数値関数 $\varphi : X \times X \to \boldsymbol{R}$ は次の条件 (1)(2)(3) を満たすものとする．

(1) $\forall y \in K, \quad x \mapsto \varphi(x, y)$; 下半連続関数.

(2) $\forall x \in K, \quad y \mapsto \varphi(x, y)$; 凹関数.

(3) $\sup_{y \in K} \varphi(y, y) \leq 0.$

更に，集合 M を次で定義し，M は閉集合であるとする．

$$M := \{x \in K | \sup_{y \in S(x)} \varphi(x, y) \leq 0\}$$

このとき, 次を満たす $\overline{x} \in K$ が存在する．

$$\overline{x} \in S(\overline{x}) \qquad \text{かつ} \qquad \sup_{y \in S(\overline{x})} \varphi(\overline{x}, y) \leq 0. \tag{2.8}$$

この Lemma 1. の証明は, 参考論文 [5] を参考せよ．

Lemma 2. X, Y をバナッハ空間とし，S は X から Y への集合値写像であり，下半連続関数であるとする．また f は $X \times Y$ から $\boldsymbol{R}$ への関数であるとし，下半連続関数であるとする．このとき関数

$$x \longmapsto \sup_{y \in S(x)} f(x, y)$$

は下半連続関数である．

この Lemma 2. の証明は, 参考論文 [4] を参考せよ．

Theorem 1. 各 $i \in N$ において, $X_i \subset E$ はコンパクトな凸部分集合とし，$X^{\hat{i}}$ から 2^{X_i} への集合値写像 S^i は $u.h.c.$ かつ 下半連続であり，任意の $x^{\hat{i}} \in X^{\hat{i}}$ に対して，$S^i(x^{\hat{i}})$ は閉凸集合かつ $S^i(x^{\hat{i}}) \neq \emptyset$ と仮定する．また，関数 f_i, g_i は次の条件 (1)(2) を満たすものとする．

(1) 各 $i \in N$ に対して，f_i は X 上で連続関数であり，X_i 上で凸関数である．

(2) 各 $i \in N$ に対して，g_i は X 上で連続関数であり，X_i 上で凹関数である．

このとき,$\overline{x} \in X$ が存在し，次が成り立つ．

$$\overline{x} \in S(\overline{x}) \qquad \text{かつ} \qquad \sup_{y \in S(\overline{x})} \varphi(\overline{x}, y) \leq 0. \tag{2.9}$$

従って，$\overline{x} \in X$ はゲーム (MGP) の **s.e.p.** である．

Proof. 各 $i \in N$ で X_i はコンパクト, 凸より $X = \prod_{i=1}^n X_i$ もコンパクト, 凸である．ここで, $\varphi : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を (2.3) として定義する． このとき, $\forall y \in X, x \mapsto \varphi(x, y)$ は連続である．また, $\forall x \in X, y \mapsto \varphi(x, y)$ は凹関数となる．なぜなら, 任意の $y, z \in X$, $\alpha \in (0,1)$ に対して,

$$\begin{aligned}
\varphi_i(x, \alpha y + (1-\alpha)z) &= f_i(x) g_i(\alpha y_i + (1-\alpha) z_i, x^{\hat{i}}) - g_i(x) f_i(\alpha y_i + (1-\alpha) z_i, x^{\hat{i}}) \\
&\geq f_i(x)[\alpha g_i(y_i, x^{\hat{i}}) + (1-\alpha) g_i(z_i, x^{\hat{i}})] \\
&\quad + g_i(x)[-f_i(\alpha y_i + (1-\alpha) z_i, x^{\hat{i}})] \\
&\quad (g_i : X_i \to \boldsymbol{R}_+, \text{凹}) \\
&\geq \alpha f_i(x) g_i(y_i, x^{\hat{i}}) + (1-\alpha) f_i(x) g_i(z_i, x^{\hat{i}}) \\
&\quad + g_i(x)[-\alpha f_i(y_i, x^{\hat{i}}) - (1-\alpha) f_i(z_i, x^{\hat{i}})] \\
&\quad (f_i : X_i \to \boldsymbol{R}_+, \text{凸}) \\
&= \alpha[f_i(x) g_i(y_i, x^{\hat{i}}) - g_i(x) f_i(y_i, x^{\hat{i}})] \\
&\quad + (1-\alpha)[f_i(x) g_i(z_i, x^{\hat{i}}) - g_i(x) f_i(z_i, x^{\hat{i}})] \\
&= \alpha \varphi_i(x, y_i) + (1-\alpha) \varphi_i(x, z_i).
\end{aligned}$$

よって, $\varphi_i(x,\cdot)$ は凹関数. したがって, $\varphi(x,\cdot)=\sum_{i=1}^n \varphi_i(x.\cdot)$ も凹関数である. 更に, 各 $i\in N$ で任意の $y\in X$ に対して,

$$\begin{aligned}\varphi_i(y,y) &= f_i(y)g_i(y_i,y^{\hat{i}})-g_i(y)f_i(y_i,y^{\hat{i}})\\ &= f_i(y)g_i(y)-g_i(y)f_i(y)\\ &= 0\end{aligned}$$

より, 任意の $y\in X$ に対して,

$$\varphi(y,y)=\sum_{i=1}^n \varphi_i(y,y)=0.$$

また, 集合 M を

$$M:=\{x\in X|\sup_{y\in S(x)}\varphi(x,y)\leq 0\}$$

で定義すると, $S,\varphi(\cdot,y)$ が $x\in X$ について下半連続関数であることより Lemma 2. から, M は閉集合である. よって, 以上より Lemma 1. から, $\overline{x}\in X$ が存在し, 次が成り立つ.

$$\overline{x}\in S(\overline{x}) \qquad \text{かつ} \qquad \sup_{y\in S(\overline{x})}\varphi(\overline{x},y)\leq 0. \tag{2.10}$$

従って, Proposition 2. から, この $\overline{x}\in X$ はゲーム (MGP) の **s.e.p.** であることがいえ示された. □

References

[1] J.P.Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, Revised Edition (North-Holland, Amsterdam 1982).

[2] J.-P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusion, Springer-Verlag, Grundlehren der math, (1984).

[3] J.-P. Aubin and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis, A Wiley-Interscience Publication, (1984).

[4] J.P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser Boston, (1990).

[5] J.P.Aubin, Optima and Equilibria (Springer-Verlag, New York, 1993).

[6] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucharest, Romania, (1986).

[7] R.E.Bruck, A Simple Proof of The Mean Ergodic Theorem for Nonlinear Contractions in Banach Spaces, Israel J. Math. 32 (1979) 107-116.

[8] D.G.Luenberger, Optimization by Vector Space Methods (John Wiley & Sons, inc., 1969).

[9] K. Tanaka and K. Yokoyama, On ε-Equilibrium Point in a Noncooperative n-person Game, J. Math. Anal. Appl., 160 (1991) 413-423.

[10] R.T.Rockafellar, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J. 33 (1966) 81-89.