数理解析研究所講究録 1246 巻 2002 年 98-109

$\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm の微分可能性

新潟大自然科学 三谷 健一 (Ken-ichi Mitani)
新潟大理 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)
新潟大自然科学 鈴木 智成 (Tomonari Suzuki)

1 序文

Jordan-von Neumann[5] は 1935 年ノルム空間が内積空間であることを中線定理が成立することで特徴づけた。これに関連して、1937 年 Clarkson[4] は von Neumann-Jordan 定数 (略して以後 NJ 定数) の概念を次のように導入した。

Definition 1.1 *X を Banach(或いはノルム) 空間とする。X の NJ 定数 $C_{NJ}(X)$ を*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{||x+y||^2+||x-y||^2}{2(||x||^2+||y||^2)} \leq C \qquad (\forall(x,y) \neq (0,0))$$

満たす C の中の最小値によって定義する。即ち

$$C_{NJ}(X) = \sup_{(x,y)\neq 0} \frac{||x+y||^2+||x-y||^2}{2(||x||^2+||y||^2)}$$

とする。

Proposition 1.2 ([5]) *X を Banach 空間とする。このとき、*
(1) $1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2$
(2) $C_{NJ}(X) = 1 \Longleftrightarrow X$: Hilbert 空間

Clarkson は ℓ_p や L_p 空間の NJ 定数を計算するために、次の Clarkson 不等式を証明した。また、それにより、ℓ_p や L_p 空間が一様凸であることを示した。この概念は、Banach 空間の幾何学的構造を調べる上で重要な概念である。これは、Banach 空間の単位球の丸さ (roundity) を表す概念であり、狭義凸 (strict convex) や滑らかさ (smoothness) 等、今までに多くの結果が多くの研究者によって示され、Banach 空間の構造の中心課題として今までに研究され、応用されてきた。

最近、斎藤ー加藤ー高橋は [11] において、$\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm に対して、具体的に、NJ 定数の計算に成功した。更に、[12] において、$\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm につ

いても、凸関数という言葉で特徴付けを与え、狭義凸性 (strict convexity)、一様凸性 (uniform convexity) などのノルムの幾何学的性質に対して研究した。(cf. [13, 10])。

この研究では、ノルムの幾何学的な性質の一つである absolute norm の微分可能性について調べることを目的とする。その方法は、$\mathbb{C}^n$ における各ベクトルに対して、すべての norming functional を計算することによって行う。分かり易くするために、まず初めに $\mathbb{C}^2$ 上について述べ、更に、その結果を $\mathbb{C}^n$ 上の場合を考察する。

2 $\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm

まず、$\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm について考える。この記述は、Bonsall-Duncan[2] に見られる。

Definition 2.1 $||\cdot||$ を $\mathbb{C}^2$ 上のノルムとする。このとき、
(1) $||\cdot||$ が *absolute* であるとは、$||(|z|,|w|)|| = ||(z,w)||$ $(\forall(z,w) \in \mathbb{C}^2)$ が成立する時を言う。
(2) $||\cdot||$ が *normalized* であるとは、$||(1,0)|| = ||(0,1)|| = 1$ のときを言う。

N_2 を $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized norm の全体とする。

Example 2.2 次の *ℓ_p-norm* は *absolute normalized* ノルムになっている。

$$||(z,w)||_p = \begin{cases} (|z|^p + |w|^p)^{1/p} & \textit{if } 1 \le p < \infty, \\ \\ \max(|z|,|w|) & \textit{if } p = \infty \end{cases}$$

まず、次のことが成立する。

Lemma 2.3 任意の $||\cdot|| \in N_2$ に対して、

$$||\cdot||_\infty \le ||\cdot|| \le ||\cdot||_1$$

実際、任意の $(z,w)\in\mathbb{C}^2$ に対して、

$$\begin{aligned}
\|(z,w)\|_\infty &= \max\{\|(z,0)\|, \|(0,w)\|\} \\
&= \frac{1}{2}\max\{\|(z,w)+(z,-w)\|, \|(z,w)+(-z,w)\|\} \\
&\le \frac{1}{2}\max\{\|(z,w)\|+\|(z,-w)\|, \|(z,w)\|+\|(-z,w)\|\} \\
&= \|(z,w)\| \\
&\le \|(z,0)\|+\|(0,w)\| \\
&= \|(z,w)\|_1.
\end{aligned}$$

今、任意に $\|\cdot\|\in N_2$ に対して、

$$\psi(t)=\|(1-t,t)\| \qquad (0\le t\le 1).$$

とおく。このとき、ψ は $[0,1]$ 上の連続な凸関数で

$$\psi(0)=\psi(1)=1, \qquad \max\{1-t,t\}\le\psi(t)\le 1$$

を満たす。そこで、このような関数の全体を Ψ_2 とおくことにする。

Theorem 2.4 ([11]) N_2 と Ψ_2 は上記の対応で、*1* 対 *1* に対応する。即ち、任意の $\psi\in\Psi_2$ に対して、

$$\|(z,w)\|_\psi=\begin{cases}(|z|+|w|)\psi\left(\frac{|w|}{|z|+|w|}\right) & ((z,w)\neq(0,0)) \\ 0 & ((z,w)=(0,0))\end{cases}$$

によって定義すると、$\|\cdot\|_\psi\in N_2$ でかつ $\psi(t)=\|(1-t,t)\|_\psi$ $(0\le t\le 1)$ を満たす。

例えば、ℓ_p ノルムに対応する凸関数は $\psi_p(t)=\{(1-t)^p+t^p\}^{1/p}$ で与えられる。Theorem2.4 により、ℓ_p ノルム以外に多くの absolute normalized なノルムが沢山あることが分かる。

Definition 2.5 *Banach* 空間 X が狭義凸であるとは、任意の $x,y\in X(\|x\|=\|y\|=1,\ x\neq y)$ に対して、

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1$$

である時を言う。

Theorem 2.6 $\psi\in\Psi_2$ とする。このとき、$\|\cdot\|_\psi$ が狭義凸であることと、ψ が関数として狭義凸であることは同値である。

3 $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm

$\mathbb{C}^n$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が *absolute* であるとは

$$\|(|x_1|,\cdots,|x_n|)\| = \|(x_1,\cdots,x_n)\| \quad \forall (x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n,$$

が成立するときを言う。$\|\cdot\|$ が *normalized* とは

$$\|(1,0,\cdots,0)\| = \|(0,1,0,\cdots,0)\| = \cdots = \|(0,\cdots,0,1)\| = 1.$$

をいう。例えば ℓ_p-norms $\|\cdot\|_p$ は absolute normalized である:

$$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p} & \text{if } 1\le p<\infty, \\ \max(|x_1|,\cdots,|x_n|) & \text{if } p=\infty. \end{cases}$$

N_n を $\mathbb{C}^n$ 上の absolute normalized norms 全体とする。このとき、

Lemma 3.1 $\|\cdot\|\in N_n$ とする。このとき、

$$\begin{array}{lrcl} (B_1) & \|(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)\| & \le & \|(x_1,\cdots,x_n)\|, \\ (B_2) & \|(x_1,0,x_3,\cdots,x_n)\| & \le & \|(x_1,\cdots,x_n)\|, \\ & & \vdots & \\ (B_n) & \|(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},0)\| & \le & \|(x_1,\cdots,x_n)\|. \end{array}$$

特に、

$$\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\| \le \|\cdot\|_1.$$

が成り立つ。

今、

$$\Delta_n = \{(s_1,s_2,\cdots,s_{n-1}) : s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}\le 1,\ s_i\ge 0\ (\forall i)\}.$$

とおく。任意の $\|\cdot\|\in N_n$ に対して、

$$\psi(s) = \|(1-s_1-s_2-\cdots-s_{n-1},s_1,\cdots,s_{n-1})\| \qquad (\forall s=(s_1,\cdots,s_{n-1})\in\Delta_n)$$

とすると、 ψ は Δ_n 上で連続な凸関数であり、Lemma 3.1 より次の条件を満たす。

$$\begin{array}{lrcl}
(A_0) & \psi(0,\cdots,0) & = & \psi(1,0,\cdots,0) = \cdots = \psi(0,\cdots,0,1) = 1, \\
(A_1) & \psi(s_1,\cdots,s_{n-1}) & \geq & (s_1+\cdots+s_{n-1})\psi(\frac{s_1}{s_1+\cdots+s_{n-1}},\cdots,\frac{s_{n-1}}{s_1+\cdots+s_{n-1}}), \\
(A_2) & \psi(s_1,\cdots,s_{n-1}) & \geq & (1-s_1)\psi(0,\frac{s_2}{1-s_1},\cdots,\frac{s_{n-1}}{1-s_1}), \\
 & \cdots\cdots\cdots & & \\
(A_n) & \psi(s_1,\cdots,s_{n-1}) & \geq & (1-s_{n-1})\psi(\frac{s_1}{1-s_{n-1}},\cdots,\frac{s_{n-2}}{1-s_{n-1}},0).
\end{array}$$

Ψ_n を Δ_n 上の凸連続関数で $(A_0),(A_1),\cdots,(A_n)$ を満たすもの全体とする。ℓ_p-norm に対応する関数は次のものになる。

$$\psi_p(s_1,s_2,\cdots,s_{n-1}) = \begin{cases} ((1-\sum_{i=1}^{n-1} s_i)^p + s_1^p + \cdots + s_{n-1}^p)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \\ \max(1-\sum_{i=1}^{n-1} s_i, s_1, \cdots, s_{n-1}) & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

Lemma 3.2 $\psi \in \Psi_n$ に対して,

$$\frac{1}{n} \leq \psi_\infty(s_1,s_2,\cdots,s_{n-1}) \leq \psi(s_1,s_2,\cdots,s_{n-1}) \leq 1 \qquad (\forall(s_1,s_2,\cdots,s_{n-1}) \in \Delta_n)$$

が成立する。

Theorem 3.3 ([12]) 任意の $\|\cdot\| \in N_n$ に対して、

$$\psi(s) = \|(1-s_1-s_2-\cdots-s_{n-1},s_1,\cdots,s_{n-1})\| \qquad (\forall s=(s_1,\cdots,s_{n-1}) \in \Delta_n) \qquad (1)$$

と定義すると、$\psi \in \Psi_n$ である。逆に、任意の $\|\cdot\| \in N_n$ に対して、

$$\|(x_1,\cdots,x_n)\|_\psi = \begin{cases} (|x_1|+\cdots+|x_n|)\psi\left(\frac{|x_2|}{|x_1|+\cdots+|x_n|},\cdots,\frac{|x_n|}{|x_1|+\cdots+|x_n|}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{if } (x_1,\cdots,x_n) \neq (0,\cdots,0), \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{if } (x_1,\cdots,x_n) = (0,\cdots,0). \end{cases}$$

によって定義すると、 $\|\cdot\|_\psi \in N_n$ であり、(1) を満たす。従って、N_n と Ψ_n は、1 対 1 対応に対応する。

Theorem 3.4 ([12]) $\psi \in \Psi_n$ とする。このとき、$\|\cdot\|_\psi$ が狭義凸であることと、ψ が関数として狭義凸であることは同値である。

4 $\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm の smoothness

Definition 4.1 X を *Banach* 空間とする。X^* を X の共役空間とし、$x \in X,\ x \neq 0$ とするとき、$\alpha \in X^*$ が x の *norming functional* であるとは

$$\|\alpha\| = 1, \langle \alpha, x \rangle = \|x\|$$

を満たす時をいう。ここで $D(X, x)$ を x の *norming functional* 全体とする。*Hahn-Banach* の定理よりいつも $D(X, x) \neq \emptyset$ になる。*Banach* 空間 X が *smooth* であるとは、任意の $x \in X,\ x \neq 0$ に対して、x の *norming functional* が一意に存在する時をいう。

Proposition 4.2 X が *smooth* であることと、$\|\cdot\|$ が *Gâteaux* 微分可能であること、即ち任意の $x, y \in X, x \neq 0$ に対して、

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

が存在することとは同値である。

$\psi \in \Psi_2$ とする。各 $t \in (0, 1]$ に対して、$\psi'_L(t)$ を t における ψ の left derivative、また各 $t \in [0, 1)$ に対して、$\psi'_R(t)$ を t における ψ の right derivative とする。また G を

$$G(t) = \begin{cases} [-1, \psi'_R(0)], & \text{if } t = 0, \\ [\psi'_L(t), \psi'_R(t)], & \text{if } 0 < t < 1, \\ [\psi'_L(1), 1], & \text{if } t = 1 \end{cases}$$

とする。

まず、$(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ が smooth であるときの ψ の必要かつ十分条件を考える。任意の $t \in [0, 1]$ に対して

$$x(t) = \frac{1}{\psi(t)}(1 - t, t) \in \mathbb{C}^2$$

とおく。ここで、$\|x(t)\|_\psi = 1$ である。まず $x(t)$ の norming functional を計算する。

Theorem 4.3 ([2]) $\psi \in \Psi_2$ とする。このとき各 $t \in [0,1]$ に対して

$$D(\mathbb{C}^2, x(t)) = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ c(1+a) \end{pmatrix} : a \in G(0), |c| = 1 \right\}, & \textit{if } t = 0, \\ \left\{ \begin{pmatrix} \psi(t) - at \\ \psi(t) + a(1-t) \end{pmatrix} : a \in G(t) \right\}, & \textit{if } 0 < t < 1, \\ \left\{ \begin{pmatrix} c(1-a) \\ 1 \end{pmatrix} : a \in G(1), |c| = 1 \right\}, & \textit{if } t = 1 \end{cases}$$

である。

次に一般の $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2(\|(x_0, x_1)\|_\psi = 1)$ の norming functional を考える。まず、

$$t = \frac{|x_1|}{|x_0| + |x_1|}$$

とおく。また ρ_k を $x_k = e^{i\rho_k}|x_k|$、$\rho_k \in [0, 2\pi)$ を満たすものとする。このとき

$$1 = \|(x_0, x_1)\|_\psi = (|x_0| + |x_1|)\psi(t)$$

より

$$\begin{aligned} x &= (e^{i\rho_0}|x_0|, e^{i\rho_1}|x_1|) \\ &= (|x_0| + |x_1|)\left(e^{i\rho_0}\frac{|x_0|}{|x_0| + |x_1|}, e^{i\rho_1}\frac{|x_1|}{|x_0| + |x_1|}\right) \\ &= \frac{1}{\psi(t)}(e^{i\rho_0}(1-t), e^{i\rho_1}t) \end{aligned}$$

と表される。そこで次が成立つ。

$$(\alpha_0, \alpha_1) \in D(\mathbb{C}^2, x(t)) \Longleftrightarrow (e^{-i\rho_0}\alpha_0, e^{-i\rho_1}\alpha_1) \in D(\mathbb{C}^2, x).$$

実際、$(\alpha_0, \alpha_1) \in D(\mathbb{C}^2, x(t))$ に対して、

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} e^{-i\rho_0}\alpha_0 \\ e^{-i\rho_1}\alpha_1 \end{pmatrix}, x \right\rangle &= \frac{1}{\psi(t)}(e^{-i\rho_0}\alpha_0 e^{i\rho_0}(1-t) + e^{-i\rho_1}\alpha_1 e^{i\rho_1}t) \\ &= \frac{1}{\psi(t)}(\alpha_0(1-t) + \alpha_1 t) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, x(t) \right\rangle = \|x(t)\|_\psi = 1 \end{aligned}$$

$$\|(e^{-i\rho_0}\alpha_0, e^{-i\rho_1}\alpha_1)\| = \|(\alpha_0, \alpha_1)\| = 1.$$

よって、$(e^{-i\rho_0}\alpha_0, e^{-i\rho_1}\alpha_1) \in D\big(\mathbb{C}^2, x\big)$ である。逆も同様である。このことから一般の norming functional 全体を得ることができる。

Theorem 4.4 $\psi \in \Psi_2$ とする。$(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2$ $\left(\big\|(x_0, x_1)\big\|_\psi = 1\right)$ に対して、

$$t = \frac{|x_1|}{|x_0| + |x_1|}$$

とする。また、ρ_k を $x_k = e^{i\rho_k}|x_k|$、$\rho_k \in [0, 2\pi)$ を満たすものとする。このとき、

$$D\big(\mathbb{C}^2, (x_0, x_1)\big) = \begin{cases} \left\{\begin{pmatrix} e^{-i\rho_0} \\ c(1+a) \end{pmatrix} : a \in G(0), |c| = 1\right\}, & \textit{if } x_1 = 0, \\ \left\{\begin{pmatrix} e^{-i\rho_0}\big(\psi(t) - at\big) \\ e^{-i\rho_1}\big(\psi(t) + a(1-t)\big) \end{pmatrix} : a \in G(t)\right\}, & \textit{if } x_0 \cdot x_1 \neq 0, \\ \left\{\begin{pmatrix} c(1-a) \\ e^{-i\rho_1} \end{pmatrix} : a \in G(1), |c| = 1\right\}, & \textit{if } x_0 = 0 \end{cases}$$

である。

上の定理の結果から $\big(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi\big)$ が smooth であるときの $\psi \in \Psi_2$ の必要十分条件が得られる。

Theorem 4.5 $\psi \in \Psi_2$ とする。このとき、$\big(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi\big)$ が *smooth* であるための ψ の必要かつ十分条件は、ψ が $(0,1)$ 上微分可能かつ、$\psi'_R(0) = -1, \psi'_L(1) = 1$ であることである。

Remark 4.6 $\psi \in \Psi_2$ に対して φ を

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - t, & \textit{if } t < 0, \\ \psi(t), & \textit{if } 0 \leq t \leq 1, \\ t, & \textit{if } t > 1 \end{cases}$$

と $\mathbb{R}$ 上に拡張すると、上の定理は次のように表される。

Theorem 4.7 $\big(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi\big)$ が *smooth* であるための必要かつ十分条件は、φ が $[0,1]$ 上微分可能であることである。

5 $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm の smoothness

まず、$\mathbb{C}^n$ 上の norming functionals を考える。但し $n \geq 2$ である。$t = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) \in \Delta_n$ (但し $t_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} t_j$) に対して、

$$x(t) = \frac{(t_0, t_1, \cdots, t_{n-1})}{\psi(t)} \in \mathbb{C}^n$$

とおく。さらに、$p_0 = (0, 0, 0, \cdots, 0)$, $p_j = (0, 0, \cdots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, 0, \cdots, 0) \in \Delta_n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1, I_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ とする。

また X を実 Banach 空間とし、C を X の凸部分集合とする。f を C から $\mathbb{R}$ への連続な凸関数とする。このとき、$x \in C$ に対して

$$\partial f(x) = \{a \in X^* : f(y) \geq f(x) + \langle a, y - x \rangle,\ \forall y \in C\}.$$

で定義される $\partial f(x)$ を $x \in C$ における f の劣微分という。

まず $x(t)$ の norming functional を求める。

Theorem 5.1 ([8]) $\psi \in \Psi_n$ とする。このとき、任意の $t = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) \in \Delta_n$ に対して

$$D(\mathbb{C}^n, x(t)) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_0}(\psi(t) + \langle a, p_0 - t \rangle) \\ e^{i\theta_1}(\psi(t) + \langle a, p_1 - t \rangle) \\ e^{i\theta_2}(\psi(t) + \langle a, p_2 - t \rangle) \\ \vdots \\ e^{i\theta_{n-1}}(\psi(t) + \langle a, p_{n-1} - t \rangle) \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a \in \partial\psi(t), \\ \psi(t) + \langle a, p_j - t \rangle \geq 0 \\ \quad \mathit{for}\ j \in I_n\ \mathit{with}\ t_j = 0, \\ \theta_j \in [0, 2\pi) \\ \quad \mathit{for}\ j \in I_n\ \mathit{with}\ t_j = 0, \\ \theta_j = 0 \\ \quad \mathit{for}\ j \in I_n\ \mathit{with}\ t_j > 0 \end{array} \right\}$$

である。

一般の norming functional は上の定理から、$\mathbb{C}^2$ 上の場合と同様に得られる。

Corollary 5.2 ([8]) $\psi \in \Psi_n$ とする。任意の $x = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$,$\|x\|_\psi = 1$ に対して、

$$t_j = \frac{|x_j|}{\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|} \ , j \in I_n$$

とおく。また $t=(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})\in\Delta_n$ とし、ρ_j を $x_j=e^{\rho_j}|x_j|,\rho_j\in[0,2\pi)$, $j\in I_n$ を満たすものとする。このとき、

$$D(\mathbb{C}^n,x)$$
$$=\left\{\begin{pmatrix} c_0\big(\psi(t)+\langle a,p_0-t\rangle\big)\\ c_1\big(\psi(t)+\langle a,p_1-t\rangle\big)\\ c_2\big(\psi(t)+\langle a,p_2-t\rangle\big)\\ \vdots\\ c_{n-1}\big(\psi(t)+\langle a,p_{n-1}-t\rangle\big)\end{pmatrix} : \begin{array}{l} a\in\partial\psi(t),\\ \psi(t)+\langle a,p_j-t\rangle\geq 0,\\ \quad \textit{for } j\in I_n,\\ |c_j|=1\\ \quad \textit{for } j\in I_n \textit{ with } t_j=0,\\ c_j=e^{-i\rho_j}\\ \quad \textit{for } j\in I_n \textit{ with } t_j>0\end{array}\right\}.$$

である。

次に $(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_\psi)$ の smoothness を考える。$\psi\in\Psi_n$ に対して、関数 φ を $\mathbb{R}^{n-1}$ 上に次のように定義する。

$$\varphi(t)=\sup\left\{\psi(s)+\langle a,t-s\rangle : \begin{array}{l} s=(s_1,s_2,\cdots,s_{n-1})\in\Delta_n,\\ a\in\partial\psi(s),\\ \psi(s)+\langle a,p_j-s\rangle\geq 0, j\in I_n\end{array}\right\}$$

Remark 5.3 $\psi\in\Psi_2$ ならば

$$\varphi(t)=\begin{cases}1-t, & \textit{if } t<0,\\ \psi(t), & \textit{if } 0\leq t\leq 1,\\ t, & \textit{if } t>1,\end{cases}$$

また $\partial\varphi(t)=G(t)$, $\forall t\in[0,1]$ である。

Lemma 5.4 φ は次の性質をもつ。

1. φ は $\mathbb{R}^{n-1}$ 上凸関数で, $\varphi(t)<\infty$ $(\forall t\in\mathbb{R}^{n-1})$;
2. $\varphi(t)=\psi(t)$ $(\forall t\in\Delta_n)$;
3. 各 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})\in\Delta_n$ ($t_\ell=0$ *for some* $\ell\in I_n$) に対して、

$$\varphi\big(\lambda(t-p_\ell)+p_\ell\big)=\lambda\psi(t)\quad(\forall\lambda>1)$$

である。また

$$\varphi'_-(t;p_\ell-t)(=\lim_{\lambda\to-0}\frac{\psi(t+\lambda(p_\ell-t))-\psi(t)}{\lambda})=-\psi(t)$$

が成立つ;

4. $\varphi(\lambda p_j) \leq |\lambda| + 1, \ (\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall j \ (1 \leq j \leq n-1))$.

ψ のかわりに φ を使うと、Theorem 5.1 は次のように書き換えられる。

Corollary 5.5 $\psi \in \Psi_n$ とする。このとき、任意の $t = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) \in \Delta_n$ に対して、

$$D(\mathbb{C}^n, x(t)) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_0}(\psi(t) + \langle a, p_0 - t\rangle) \\ e^{i\theta_1}(\psi(t) + \langle a, p_1 - t\rangle) \\ e^{i\theta_2}(\psi(t) + \langle a, p_2 - t\rangle) \\ \vdots \\ e^{i\theta_{n-1}}(\psi(t) + \langle a, p_{n-1} - t\rangle) \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a \in \partial\varphi(t), \\ \theta_j \in [0, 2\pi) \\ \quad \textit{for } j \in I_n \textit{ with } t_j = 0, \\ \theta_j = 0 \\ \quad \textit{for } j \in I_n \textit{ with } t_j > 0 \end{array} \right\}$$

以上より、$(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$ が smooth であるための必要十分条件が得られる。

Theorem 5.6 ([8]) $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$ が *smooth* であることと、φ が Δ_n 上微分可能であることは同値である。

参考文献

[1] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.

[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges II*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. 10, 1973.

[3] J. A. Clarkson, *Uniformy convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396-414.

[4] J. A. Clarkson, *The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space*, Ann. of Math. **38** (1937), 114-115.

[5] P. Jordan and J. von Neumann, *On inner products in linear metric spaces*, Ann. of Math. **36** (1935), 719-723.

[6] M. Kato and Y. Takahashi, *On the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1055-1062.

[7] M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant for Lebesgue-Bochner spaces*, J. Inequal. Appl. **2** (1998), 89-97.

[8] K. Mitani, K.-S. Saito and T. Suzuki, *Smoothness of absolute norms on* $\mathbb{C}^n$, to appear in J. Convex Analysis.

[9] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[10] K.-S. Saito and M. Kato, *Uniform convexity of* ψ*-direct sums of Banach spaces*, preprint.

[11] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., **244**(2000), 515-532.

[12] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Absolute norms on* $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., **252**(2000), 879-905.

[13] Y. Takahashi, K. Kato and K.-S. Saito, *Strict convexity of absolute norms on* $\mathbb{C}^2$ *and direct sums of Banach spaces*, to appear in J. Inequal. Appl.