数理解析研究所講究録 1246 巻 2002 年 186-194

CONVERGENCE THEOREMS FOR FINITE MAPPINGS
(有限個の quasi-nonexpansive 写像の共通不動点への強収束について)

芝浦工業大学　工学部　厚芝幸子 (SACHIKO ATSUSHIBA)

1. 序

T を Banach 空間 E の閉凸部分集合 C 上の写像とし、この写像 T の不動点集合を $F(T)$ で表す。写像 T が nonexpansive(非拡大) であるとはすべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成立することである。写像 T が *quasi-nonexpansive* であるとは、すべての $x \in C$ と $q \in F(T)$ に対して

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

が成立することである。nonexpansive 写像であれば quasi-nonexpansive である。また、E の部分集合 A と点 z に対して $d(z, A) = \inf_{y \in A} \|z - y\|$ と定義し、I は恒等写像をあらわすものとする。

Mann [9] によって次の iteration が導入された。

$$x_0 = x \in C,\ x_{n+1} = (1 - \mu_n)x_n + \mu_n T x_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

ここで T は Hilbert 空間の閉凸部分集合 C 上の写像で、$\{\mu_n\}$ は $0 \leq \mu_n \leq 1$ をみたす実数列である。なお、

$$T_{\mu_n} = (1 - \mu_n)I + \mu_n T \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

とすると (1) は

$$x_0 = x \in C, x_{n+1} = T_{\mu_n} T_{\mu_{n-1}} \cdots T_{\mu_0} x,\ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

と表現できる。Mann iteration (2) は Hilbert 空間において強収束しない例があげられている。Browder and Petryshyn [3] は Banach 空間において quasi-nonexpansive 写像による Mann iteration の強収束のための必要十分条件を与えた。また、quasi-nonexpanisive 写像に対してではないが、写像の仮定を付加することで、nonexpansive 写像による Mann iteration の強収束定理も一様凸な Banach 空間において示した。

Key words and phrases. Fixed point, iteration, nonexpansive mapping, quasi-nonexpansive mapping, strong convergence.

一方、Ishikawa [4] は次の iteration を導入し、Hilbert 空間における不動点近似に関して考察した。

$$x_0 = x \in C, x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n T[(1-\mu_n)x_n + \mu_n T x_n]x_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad (3)$$

ここで T は Hilbert 空間の閉凸部分集合 C 上の写像で $\{\lambda_n\}, \{\mu_n\}$ は $0 \le \lambda_n \le 1, 0 \le \mu_n \le 1$ をみたす実数列である。なお、

$$T_{\lambda_n,\mu_n} = (1-\lambda_n)I + \lambda_n T[(1-\mu_n)I + \mu_n T] \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

とすると (3) は

$$x_0 = x \in C, \ x_{n+1} = T_{\lambda_n,\mu_n} T_{\lambda_{n-1},\mu_{n-1}} \cdots T_{\lambda_0,\mu_0} x \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad (4)$$

と表現できる。Ghosh and Debnath [8] は、Browder and Petryshyn [3] の結果をうけて、quasi-nonexpansive 写像による Ishikawa iteration の強収束のための必要十分条件を与えた。

Theorem 1.1 ([8]). C を Banach 空間 E の閉凸部分集合とし、T は C 上の連続な quasi-nonexpansive 写像で $F(T)$ は空でないと仮定する。$\{x_n\}$ を

$$x_0 = x \in C, x_n = T^n_{\lambda,\mu} x \ (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列とする。ただし、λ, μ は $0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1$ をみたす実数である。このとき、$\{x_n\}$ が T の不動点に強収束するための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$$

である。

quasi-nonexpanisive 写像に対してではないが、Ghosh and Debnath [8] は Browder and Petryshyn [3] の結果をうけ、一様凸な Banach 空間において、nonexpansive 写像による Ishikawa iteration の強収束定理を示した。

Das and Debata [5] は次の iteration を導入した。

$$x_0 = x \in C, x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T[(1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n]x_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad (5)$$

ここで T, S は C 上の写像とする。

そのような流れの中で、(5) で定義される iteration の強収束について考え、本稿ではさらに一般化し、任意有限個の quasi-nonexpansive 写像による iteration を考え、共通不動点への強収束のための必要十分条件について考察する。また、一様凸な Banach 空間においてその Iteration の強収束定理を示す。

2. 準備

この論文では E は実 Banach 空間を表し、E^* は E の共役空間を表すものとする。$x_n \to x$ または $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ で点列 $\{x_n\}$ が x に強収束収束することを表すものとする。また、E の部分集合 A と点 z に対して $d(z, A) = \inf_{y\in A} \|z - y\|$ と定義し、I は恒等写像をあらわすものとする。

Banach 空間 E は $\|x\| = \|y\| = 1$ かつ $x \neq y$ となる $x, y \in E$ に対して、つねに $\|x + y\|/2 < 1$ であるとき、狭義凸 (strictly convex) であるとよばれる。狭義凸な Banach 空間では、$\lambda \in (0, 1)$ をみたす λ に対して $\|x\| = \|y\| = \|(1-\lambda)x + \lambda y\|$ が成立するならば $x = y$ が成立する。Banach 空間 E に対して、E 上の凸性の modulus δ は任意の $\varepsilon(0 \le \varepsilon \le 2)$ に対して

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} \mid \|x\| \le 1, \|y\| \le 1, \|x - y\| \ge \varepsilon\right\}$$

で定義する。Banach 空間 E は任意の $\varepsilon > 0$ に対してその modulus が $\delta(\delta) > 0$ であるとき、一様凸 (uniformly convex) であるといわれる。E^* を E の共役空間とするとき、E が $E = (E^*)^*$ をみたすなら、E は回帰的であるといわれる。一様凸な Banach 空間は狭義凸であり、回帰的であることが知られている。

T を Banach 空間 E の閉凸部分集合 C 上の写像とし、この写像 T の不動点集合を $F(T)$ で表す。写像 T が nonexpansive(非拡大) であるとはすべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$$

が成立することである。写像 T が quasi-nonexpansive であるとは、すべての $x \in C$ と $q \in F(T)$ に対して

$$\|Tx - p\| \le \|x - p\|$$

が成立することである。nonexpansive であれば quasi-nonexpansive である。次の例は quasi-nonexpansive であるが、nonexpansive 写像ではない写像の例である。([10, 11] を参照せよ。)

Example 2.1. $E = C = \mathbb{R}$ とする。T は C 上の写像で次のように定義されているものとする。

$$T(0) = 0$$
$$Tx = \frac{x}{2}\sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

このとき $F(T) = \{0\}$. T は nonexpansive 写像ではないが、連続で quasi-nonexpansive

Example 2.2. $E = C = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$ とし、ノルムは $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ で定義する。T は C 上の写像で次のように定義されているものとする。

$$\begin{cases} T(x_1, x_2) = (0, 0), \quad (x_1, x_2) \neq (1, 1)(1, 0), (1, -1) \\ \quad T(1, 1) = (1, 0) \\ \quad T(1, 0) = (1, -1) \\ T(1, -1) = (1, 1) \end{cases}$$

このとき T は nonexpansive 写像ではないが、quasi-nonexpansive である。また、T の唯一の不動点は $\{(0, 0)\}$ である。

3. Iterative process for a finite family of mappings

この節では、任意有限個の quasi-nonexpansive 写像による iteration について考察する。C を Banach 空間 E の閉凸部分集合とする。$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の写像とし、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 \leq \alpha_i \leq 1 (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす実数とする。C 上の写像 W を次のように定義する。([12, 13]):

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1 T_1 + (1 - \alpha_1) I, \\ U_2 &= \alpha_2 T_2 U_1 + (1 - \alpha_2) I, \\ &\vdots \\ U_{r-1} &= \alpha_{r-1} T_{r-1} U_{r-2} + (1 - \alpha_{r-1}) I, \\ W = U_r &= \alpha_r T_r U_{r-1} + (1 - \alpha_r) I. \end{aligned} \tag{6}$$

この写像 W は $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成された W-mapping とよばれる。

この W-mapping を用いて次の iteration を考え、それの共通不動点への強収束について考察する。

$$x_0 = x \in C, \quad x_n = W^n x \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

nonexpansive 写像だけでなく、有限個の quasi-nonexpansive 写像の共通不動点近似も議論するため、次の Lemmas を証明した。

Lemma 3.1 ([2]). C を Banach 空間 E の閉凸部分集合とする。$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の quasi-nonexpansive 写像で $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でないとし、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は $0 \leq \alpha_i \leq 1 (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす実数とする。$U_1, U_2, \ldots, U_{r-1}$ と W を (6) で定義される写像とする。任意の $p \in \cap_{i=1}^r F(T_i)$ と $x \in C$ をとると、

$$\|U_i x - p\| \leq \|x - p\| \quad (i = 1, 2, \ldots, r - 1) \tag{8}$$

および

$$\|Wx - p\| \leq \|x - p\|$$

が成立する。

Lemma 3.2 ([2]). C を狭義凸な Banach 空間 E の閉凸部分集合とする。$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の quasi-nonexpansive 写像で $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でないとし、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は $0 < \alpha_i \leq 1 (i = 1, 2, \ldots, r-1), 0 < \alpha_r < 1$ をみたす実数とする。W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成された W-mapping とする。このとき $F(W) = \bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ が成立する。

Lemma 3.3 ([2]). C を Banach 空間 E の閉凸部分集合とする。$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の quasi-nonexpansive 写像で $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でないとし、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は $0 \leq \alpha_i \leq 1 (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす実数とする。$U_1, U_2, \ldots, U_{r-1}$ と W を (6) で定義される写像とする。$\{x_n\}$ を

$$x_0 = x \in C, \quad x_n = W^n x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列とする。任意の $p \in \cap_{i=1}^r F(T_i)$ をとる。このとき $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ が存在する。

4. Asymptotically regularity

C を Banach 空間 E の閉凸部分集合とし、$x \in C$ とする。もし、C 上の写像 T が

$$T^n x - T^{n+1} x \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty, \tag{9}$$

をみたすならば x で *asymptotically regular* であるとよばれる。(9) が任意の $x \in C$ に対して成立するならば、T は C で *asymptotically regular* であるとよばれる。

有限個の nonexpansive 写像によって生成された W-mapping に対しては、次の結果が [7] から直ちに導かれるが、有限個の quasi-nonexpansive 写像によって生成された W-mapping の asymptotically regularity に関する結果も得られたので報告する。

Theorem 4.1. C を Banach 空間 E の有界閉凸部分集合とする。$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の nonexpansive 写像とし、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす実数とする。W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成された W-mapping とする。このとき W は C で asymptotically regular である。

[6] の Lemma などを用いて次の定理を証明できる。有限個の quasi-nonexpansive 写像に対する強収束定理の証明に際し、この定理は重要な役割を担う。

Theorem 4.2 ([2]). C を一様凸な Banach 空間 E の有界閉凸部分集合とし、$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の quasi-nonexpansive 写像とする。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす実数とする。W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成された W-mapping とする。このとき W は C で asymptotically regular である。

5. 有限個の写像に対する ITERATION の強収束

この節では、(7) で定義された iteration の強収束について考察する。Ghosh and Debnath [8] の定理 (Theorem 1.1) を拡張し、有限個の quasi-nonexpansive 写像による iteration の強収束のための必要十分条件を与える。

Theorem 5.1 ([2]). C を Banach 空間 E の閉凸部分集合とする。$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の連続な quasi-nonexpansive 写像で $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ は空でないものと仮定する。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は $0 \leq \alpha_i \leq 1 (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす実数とし、W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成された W-mapping とする。$\{x_n\}$ を

$$x_0 = x \in C, \quad x_n = W^n x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列とする。このとき $\{x_n\}$ が $T_1, T_2, \ldots, T_r$ の共通不動点に強収束するための必要十分条件は $\lim_{n \to \infty} d(x_n, \cap_{i=1}^r F(T_i)) = 0$ が成立することである。

C を Banach 空間 E の閉凸部分集合とし、$x \in C$ をとる。C 上の写像 T が *compact* であるとは T が連続であり、かつ有界な集合を相対コンパクト集合に写すときであると定義される。C 上の写像 T が $\xi \in C$ で *demicompact* であるとは、$y_n - Ty_n \to \xi$ をみたす C の任意の有界な点列 $\{y_n\}$ に対して、そのある部分点列 $\{y_{n_k}\}$ と $y \in C$ がとれて $y_{n_k} \to y$ かつ $y - Ty = \xi$ が成立することである。写像 T が C で *demicompact* であるとは、C 上の任意の点 ξ において *demicompact* になっていることであると定義される。T が C で compact であれば T は C で demicompact になることが知られている。Hilbert 空間における demicompact 写像の例をあげる。([10, 11] を参照せよ。)

Example 5.2. C を Hilbert 空間 H の閉凸部分集合とし、$\langle \cdot, \cdot \rangle$ で内積をあらわす。次の C 上の写像はいずれも demicompact である。

(i) $\langle Px - Py, x - y \rangle \leq a\|x - y\|^2, \quad (1 - 2a) > 0$ をみたす連続な写像 P;
(ii) $\langle Px - Py, x - y \rangle \leq a\|Px - Py\|, \quad (1 - 2a) > 0$ をみたす連続な写像 P

Banach 空間における demicompact 写像の例をあげる。([10, 11] を参照せよ。)

Example 5.3. C を Banach 空間 E の閉凸部分集合とする。$(I - T)^{-1}$ が存在してこれが $I - T$ の値域 $R(I - T)$ で連続となる写像 T は C で demicompact である。

Example 5.4. C を Banach 空間 E の閉凸部分集合とし、T と S は C 上の写像とする。このとき、(a)(b) いずれかをみたすならば、$T + S$ は C で demicompact である。

(i) T は compact であり、$I - S$ は単射でその値域が閉集合となり、かつ $(I - S)^{-1}$ は連続である;
(ii) T は C 上の縮小写像で S は C で compact であるとする。

quasi-nonexpansive 写像に対してではないが、Ghosh and Debnath [8] は Browder and Petryshyn [3] の結果をうけて、次の nonexpansive 写像による Ishikawa iteration の強収束定理を示した。

Theorem 5.5 ([8]). C を一様凸な Banach 空間 E の閉凸部分集合とし、T を nonexpansive 写像で $F(T)$ は空でないものとする。さらに、(a),(b) いずれかをみたしているものとする。

(a) $I - T_{\lambda,\mu}$ は C の閉部分集合を閉集合に写す;

(b) $T_{\lambda,\mu}$ は 0 で demicompact である。

$\{x_n\}$ を

$$x_0 = x \in C,\ x_n = T^n_{\lambda,\mu}x\ (n = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

で定義される点列とする。ただし、λ, μ は $0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1$ をみたす実数である。このとき、$\{x_n\}$ は T の不動点に強収束する。

この定理のアイディアをもとに、W-mapping を用いて任意有限個の写像の共通不動点への強収束定理について考察する。次の lemma は主定理 (Theorem 5.7) の証明で本質的である。

Lemma 5.6. C を一様凸な Banach 空間 E の閉凸部分集合とする。$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の連続な quasi-nonexpansive 写像で $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でないとし、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす実数とする。写像 W は $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成された W-mapping とし、$\|(I - W)y_n\| \to 0$ をみたす C の任意の点列 $\{y_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, \cap_{i=1}^r F(T_i)) = 0$$

が成立すると仮定する。$\{x_n\}$ を

$$x_0 = x \in C, \quad x_n = W^n x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列とする。このとき $\{x_n\}$ は $\bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ の元に強収束する。

Lemma 5.6 を用いて次の有限個の quasi-nonexpansive 写像に対する強収束定理を示せる。

Theorem 5.7 ([2]). C を一様凸な Banach 空間 E の閉凸部分集合とする。$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の連続な quasi-nonexpansive 写像で $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でないと仮定する。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす実数とする。写像 W は $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成された W-mapping とし、(a)(b) のうちいずれかをみたすものとする。

(a) $(I - W)$ は C の閉集合を閉集合に写すものとする;

(b) W は 0 で demicompact である。

$\{x_n\}$ を

$$x_0 = x \in C, \quad x_n = W^n x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列とする。このとき $\{x_n\}$ は $\bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ の元に強収束する。

Theorem 5.7 と同様のアイディアを用いて次の定理を示すことができる。

Theorem 5.8 ([2]). C を回帰的で狭義凸な Banach 空間 E の閉凸部分集合とする。$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の nonexpansive 写像で $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でないと仮定する。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす実数とする。写像 W は $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成された W-mapping とし、(a)(b) のうちいずれかをみたすものとする。

(a) $(I - W)$ は C の閉集合を閉集合に写すものとする;

(b) W は 0 で demicompact

$\{x_n\}$ を

$$x_0 = x \in C, \quad x_n = W^n x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列とする。このとき $\{x_n\}$ は $\bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ の元に強収束する。

次の定理も得られる。

Theorem 5.9 ([2]). C を一様凸な Banach 空間 E の閉凸部分集合とする。$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の連続な quasi-nonexpansive 写像で $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でないと仮定する。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす実数とする。写像 W は $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成された W-mapping とし、ある $k > 0$ に対して

$$\|(I - W)z\| \geq kd(z, F(W)) \quad (z \in C) \tag{11}$$

が成立すると仮定する。$\{x_n\}$ を

$$x_0 = x \in C, \quad x_n = W^n x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列とする。このとき $\{x_n\}$ は $\bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ の元に強収束する。

Theorem 5.9 と同様のアイディアを用いて次の定理を証明できる。

Theorem 5.10 ([2]). C を回帰的で狭義凸な Banach 空間 E の閉凸部分集合とする。$T_1, T_2, \ldots, T_r$ はすべて C 上の nonexpansive 写像で $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でないと仮定する。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \ldots, r)$ をみたす実数とする。写像 W は $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成された W-mapping とし、ある $k > 0$ に対して

$$\|(I - W)z\| \geq kd(z, F(W)) \quad (z \in C)$$

が成立すると仮定する。$\{x_n\}$ を

$$x_0 = x \in C, \quad x_n = W^n x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列とする。このとき $\{x_n\}$ は $\bigcap_{i=1}^r F(T_i)$ の元に強収束する。

References

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong Convergence theorems for finite family nonexpansive mappings and applications*, Indian J. Math. **41** (1999), 435–451.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong Convergence theorems for finite quasi-nonexpansive mappings*, submitted.

[3] F.E. Browder and W.V. Petryshyan, *The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 571–575.
[4] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 147–150.
[5] G. Das and J.P.Debata, *Fixed points of quasinonexpansive mappings*, Indian J. Pure Appl. Math., **17** (1986), 1263–1269.
[6] W.G. Dotson, *On the Mann iterative process*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 65–73.
[7] M. Edelstein and R.C.O'Brien, *Nonexpansive mappings, asymptotic regularity and successive approximations*, J. London Math. Soc., **17** (1978), 547–554.
[8] M. K. Ghosh and L. Debnath, *Convergence of Ishikawa iterates of quasi-nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **207** (1997), 96–103.
[9] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.
[10] W.V. Petryshyan *Construction of fixed points of Demicompact Mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **14** (1966), 276–284.
[11] W.V. Petryshyan and T.E. Williamson, *Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **43** (1973), 459–497.
[12] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications*, Ann., Univ. Mariae Curie-Sklodowskka, **51** (1997), 277–292.
[13] W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, Mathematical and Computer Modeling **32** (2000), 1463–1471.

Department of Mathematics, Shibaura Institute of Technology, Fukasaku, Saitama-City, Saitama 330–8570, Japan
E-mail address: atusiba@sic.shibaura-it.ac.jp