数理解析研究所講究録 1246 巻 2002 年 210-213



# 非線形無限回連続微分可能多変数関数の重ね合わせ表現問題

新潟大学理学部数学科　明石　重男 (Shigeo Akashi)
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Niigata University

新潟大学大学院自然科学研究科　坂井　一貴 (Kazutaka Sakai)
Department of Mathematics and Information Science,
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

## 1　序文

Hilbert の第 13 問題に端を発する非線形多変数関数の重ね合わせ表現問題は，情報処理分野におけるデータ圧縮問題，計算の高速化と関連した重要な研究題目である．更にこの問題は構成的であるため (即ち，選択公理や Zorn の補題などを用いてないため)，証明の一部をプログラム化することによりデータ処理技術の向上が期待されるという意味でも重要である．しかし，Hilbert の第 13 問題解決に際して Kolmgorov と Arnold が用いた証明法は，重ね合わせ表現に用いられる関数が「連続性を満足するが，微分可能性を満足しない」という性質を持つため，プログラミングという実用的観点から眺めた場合，発展性に乏しいものであった．このような停滞状況を引き起こした原因の 1 つとして，Kolmogorov 達が用いた重ね合わせ表現に用いる関数が Cantor の階級関数のようなものであったことが挙げられる．しかしこれは，Hilbert が第 13 問題を呈示するに際して示した「重ね合わせ表現に用いられる多変数関数も連続性を満たす」という条件から考えると止むを得ないことであった．しかしここで，もし「重ね合わせ表現に用いられる多変数関数が無限回連続微分可能性を満たす」と新しく条件設定を変更した場合はどのようになるであろうか．被表現関数の集合が小さくなったことにより，重ね合わせ表現に用いる多変数関数族も「連続であるが，到るところ微分不可能である」という特殊な性質から，例えば「連続微分可能である」という性質を満たすものに取り直すことはできないだろうか．本稿では，被表現関数の集合を例え「多変数多項式の集合」に限定したとしても「無限回連続微分可能多変数関数の集合」の要素を用いた場合，広義表現不可能なものが存在するという結果を紹介する．

## 2　広義重ね合わせ表現不可能性

$\mathcal{P}_3$ を 3 変数多項式の集合，$\mathcal{P}_2$ を 2 変数多項式の集合とする．このとき次の命題が成立する．

**命題 1.** 任意の自然数 $n$ に対して，$\mathcal{P}_3$ の要素の中に $\mathcal{P}_2$ の要素の $n$ 階の重ね合わせ表現で記述不可能なものが存在する．即ち，3 変数多項式の集合は 2 変数多項式の集合を用いた場合，広義の意

味で表現不可能である．

**証明．** 2 変数 $k$ 次多項式は一般的に

$$\sum_{\substack{p,q\geq 0\\ p+q\leq k}} c(p,q)x^p y^q$$

として表現される．同様にして，3 変数 $k$ 次多項式は一般的に

$$\sum_{\substack{p,q,r\geq 0\\ p+q+r\leq k}} c(p,q,r)x^p y^q z^r$$

として表現される．一方，任意に選んだ自然数 $k$ に対して，3 変数 $k$ 次多項式を 2 変数多項式の $n$ 階の重ね合わせ表現で記述しようとするとき，必要となる 2 変数多項式の最高次数は高々$k$ 次でなければならない．またその際に必要となる 2 変数多項式は高々$2^{n+1}-1$ 個でなければならない．明らかに多変数多項式は最高次数 $k$ および係数項の値を決めることで完全に決定される．即ち $k$ 次の 2 変数多項式を正確に決定する係数項は全部で $\sum_{i=0}^{k} {}_{i+1}C_1$ 個必要となるため，その総数は，

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} {}_{i+1}C_1 &= \sum_{i=0}^{k}(i+1)\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

で与えられる．同様に 3 変数 $k$ 次多項式を決定する係数項の総数は，

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} {}_{i+2}C_2 &= \sum_{i=0}^{k}\frac{(i+2)(i+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}(i^2+3i+2)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{k} i^2 + 3\sum_{i=0}^{k} i + 2\sum_{i=0}^{k} 1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{3k(k+1)}{2} + 2(k+1)\right)\end{aligned}$$

となる．したがって，$k$ 次の 3 変数多項式が全て $k$ 次の 2 変数多項式の $n$ 階の重ね合わせ表現で記述できると仮定した場合，高々$2^{n+1}-1$ 個の 2 変数多項式が用いられることになるため，「$k$ 次の 3 変数多項式を決定する係数の総数」は「$k$ 次の 2 変数多項式を決定する係数の総数」の $2^{n+1}-1$ 倍よりも小さくなくてはならない．これより，全ての自然数 $k$ に対して，

$$\sum_{i=0}^{k} {}_{i+2}C_2 \leq (2^{n+1}-1)\sum_{i=0}^{k} {}_{i+1}C_1$$

が成り立つことになる．しかし左辺は $k$ の 3 次式であり，右辺は $k$ の 2 次式になるため矛盾を生じる． □

$\mathcal{ICD}_2$ を $\mathbb{R}^2$ 上で定義された無限回連続微分可能関数の集合とし，$\mathcal{ICD}_3$ を $\mathbb{R}^3$ 上で定義された無限回連続微分可能関数の集合とする．このとき次の命題が成立する．

**命題 2.** $\mathcal{ICD}_3$ が $\mathcal{ICD}_2$ の要素を用いて広義の意味で表現不可能である．即ち任意の自然数 $n$ に対して，ある $\mathcal{ICD}_3$ の要素 $f_n(\cdot,\cdot,\cdot)$ を選ぶと，どのような $g_1(\cdot,\cdot),\ldots,g_{2^{n+1}-1}(\cdot,\cdot)$ を $\mathcal{ICD}_2$ から選んでも，$f_n$ を $n$ 階の重ね合わせで表現できない．

**証明．** 先に述べた命題 1 より，任意の自然数 $n$ に対して，ある適当な $\mathcal{P}_3$ の要素 $f_n(\cdot,\cdot,\cdot)$ を選ぶと，どのような $\mathcal{P}_2$ の要素 $p_1(\cdot,\cdot),\ldots,p_{2^{n+1}-1}(\cdot,\cdot)$ をうまく選んでも $f_n$ を $p_1$ から $p_{2^{n+1}-1}$ の $n$ 階の重ね合わせで表現することができないことが保証されている．今，この $f_n$ が $\mathcal{ICD}_2$ の要素 $g_1(\cdot,\cdot),\ldots,g_{2^{n+1}-1}(\cdot,\cdot)$ をうまく選ぶことにより，$n$ 階の重ね合わせで表現されたと仮定し，更に $g_1(\cdot,\cdot),\ldots,g_{2^{n+1}-1}(\cdot,\cdot)$ の Taylor 展開表示が原点近傍で

$$g_i(x,y) = \sum_{p,q\geq 0}^{\infty} c_{g_i}(p,q)x^p y^q \ , \ 1 \leq i \leq 2^{n+1}-1$$

で与えられているものと仮定する．同様に，3 変数多項式 $f_n(\cdot,\cdot,\cdot)$ の最高次数が $M$ であったとして，この Taylor 展開表示が原点の近傍で

$$f_n(x,y,z) = \sum_{p,q,r\geq 0}^{\infty} c_{f_n}(p,q,r)x^p y^q z^r$$

で与えられているものと仮定したとき，

$$h_i(x,y) = \sum_{\substack{p,q\geq 0\\ p+q\leq M}} c_{g_i}(p,q)x^p y^q \ , \ 1 \leq i \leq 2^{n+1}-1$$

で定義される 2 変数多項式 $h_1,\ldots,h_{2^{n+1}-1}$ を考える．今，$g_1$ から $g_{2^{n+1}-1}$ を用いて $f_n$ を重ね合わせ表現した場合の多項式を $\Phi(g_1,\ldots,g_{2^{n+1}-1})$ としたとき，明らかに $f_n = \Phi(g_1,\ldots,g_{2^{n+1}-1})$ が成立する．ここで $\Phi(g_1,\ldots,g_{2^{n+1}-1})$ の $g_i$ を $h_i$ に置き換えることにより得られる多項式を $\Phi(h_1,\ldots,h_{2^{n+1}-1})$ と書くことにすれば，Taylor 展開の係数項比較に基づく一致性定理より $\Phi(h_1,\ldots,h_{2^{n+1}-1})$ もまた $f_n$ と一致しなければならないことになる．したがって，3 変数多項式が $2^{n+1}-1$ 個の 2 変数多項式を用いて $n$ 階の重ね合わせで表現されたことになり矛盾を生ずる． □

**註 1.** 本証明は，単に「任意の自然数 $n$ に対してある $\mathcal{ICD}_3$ の要素 $f_n$ をうまく選ぶと，$\mathcal{ICD}_2$ に属する $2^{n+1}-1$ 個のどのような要素を用いても $n$ 階の重ね合わせ表現では記述できない」ことを示しているだけではなく，特に $f_n$ を $\mathcal{P}_3$ の要素から選べることまで示している．

## 3 Kolmogorov-Arnold 表現とその関係

Kolmogorov-Arnold の表現定理を 3 変数連続関数に適用した場合，ある 21 個の関数族 $\{\Phi_{pq}\ ;\ 0 \leq p \leq 6\ ,\ 1 \leq q \leq 3\}$ が存在して，任意の 3 変数連続関数 $f$ に対して，$f$ に依存して定まる 7 個の連続関数 $\{g_p^f\ ;\ 0 \leq p \leq 6\}$ をうまく選ぶと，

$$f(x_1,x_2,x_3) = \sum_{p=0}^{6} g_p^f\left(\sum_{q=1}^{3}\Phi_{pq}(x_p)\right)$$

と表現されることになる．ここでもし，重ね合わせ表現される 3 変数関数を 3 変数無限回連続微分可能関数に置き換えた場合，重ね合わせ表現に用いられた関数を微分可能なものに選び直すことができるかという疑問が生じる．しかし，上式は 1 変数関数と有限回の加算および乗算から構成され

ているため，Kolmogorov-Arnold 表現を加算と乗算という基本的 2 変数関数を用いて書き直した場合，任意の連続関数が 2 変数関数による 8 階の重ね合わせ表現で記述されることになる．ところがこの結果は命題 2 に矛盾する．したがって，Kolmogorov-Arnold 表現に用いられる関数族を無限回連続微分可能関数にまで拡張適用した場合でさえ，3 変数多項式の集合の中に，重ね合わせ表現で記述できないものが存在することになる．

## 参考文献


[1] S.Akashi, Quantum entropy theoretic aspects of the 13th problem formulated by Hilbert, *Journal of the Ramanujan Mathematical Society,* 12(1997), 135-146.

[2] R.V.Cherchill and J.W.Brown, Complex Variables and applications, *McGraw-Hill International Book Company,* Auckland, 1984.

[3] G.G.Lorentz, Approximation of Functions, *Holt, Rinehart and Winston Inc.,* New York, 1966.

[4] A.N.Kolmogorov, On the representation of continuous functions of several variables by superposition of continuous functions of one variable and addition, *Doklady Akad. Nauk SSSR,* 144(1957), 679-681.

[5] A.G.Vitushukin, Proof of existence of analytic function of several variables, not representable by linear superpositions of continuously differentiable functions of fewer variables, *Doklady Akad. Nauk SSSR,* 156(1964), 1258-1261.