数理解析研究所講究録 1250 巻 2002 年 89-92

関数の正定値性と作用素のノルム不等式

九大・数理　幸崎 秀樹 (Hideki Kosaki)
Faculty of Mathematics　Kyushu Univ.

H, K, X は行列 (あるいは、ヒルベルト空間の作用素) とし H, K は正定値とする。また、以下、ユニタリ不変ノルムを $|||\cdot|||$ で表すことにする。

1951 年に Heinz ([3]) は作用素ノルムに対する不等式

$$||H^{\theta}XK^{1-\theta}+H^{1-\theta}XK^{\theta}|| \leq ||HX+XK|| \ (\theta \in [0,1])$$

を示した。McIntosh は有名な未発表 (?) の論文 [9] の中で

$$||H^{1/2}XK^{1/2}|| \leq \frac{1}{2}||HX+XK||$$

を上手に利用した別証明を与えた。これ自身作用素に対する「算術平均・幾何平均」不等式として重要である。Bhatia-Davis ([2]) により示されたように、この不等式は実は一般のユニタリ不変ノルム $|||\cdot|||$ に対し成立する。関連事項として安藤 ([1]) は

$$|H^{1/p}K^{1/q}| \leq U\left(\frac{1}{p}H+\frac{1}{q}K\right)U^*$$

となるユニタリ行列 U が取れることを示した。しかし、

$$|||H^{1/p}XK^{1/q}||| \leq |||\frac{1}{p}HX+\frac{1}{q}XK|||$$

は成立しない。

これらの各種「作用素平均」のノルム比較の研究に触発され、著者及び日合氏は共同研究として数通の論文 ([4, 5, 7]) を発表した。例えば、「対数平均」を導入することにより、以下のような「算術平均・幾何平均」不等式の精密化が証明された。

$$|||H^{1/2}XK^{1/2}||| \leq |||\int_0^1 H^tXK^{1-t}dt||| \leq \frac{1}{2}|||HX+XK||| \tag{1}$$

また [5] で我々は作用素平均を公理的に扱って研究の見通しを良くした。$\mathbf{R}_+$ に値を取る $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ 上の連続関数 $M(\lambda,\mu)$ が次の 4 条件 (本質的なのは最初の 2 条件) を満たす時、symmetric homogeneous mean と呼ぶことにする。

(a) $M(\lambda,\mu)=M(\mu,\lambda)$
(b) $M(\alpha\lambda,\alpha\mu)=\alpha M(\mu,\lambda)$ $(\alpha>0)$
(c) $M(\lambda,\mu)$ は各変数に関して単調増加
(d) $\min(\lambda,\mu) \leq M(\lambda,\mu) \leq \max(\lambda,\mu)$

このような $M(\lambda,\mu)$ が与えられた時、$n\times n$ 正行列 H,K を

$$H = Udiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^* \quad K = Vdiag(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)V^*$$

と対角化して「行列平均」$M(H,K)X$ を

$$M(H,K)X = U\left([M(\lambda_i,\mu_j)]\circ(U^*XV)\right)V^*$$

と定義する。但し、$\circ$ は行列の Hadamard 積を意味する。

定理 ([5, Theorem 3.1]) symmetric homogeneous mean M,L に対し以下の 5 条件は同値である。

(i) symmetric な確率測度 ν が取れ、$H,K\geq 0$ が可逆な時

$$M(H,K)X = \int_{-\infty}^{\infty} H^{is}(L(H,K)X)K^{-is}d\nu(s)$$

と表せる。

(ii)

$$|||M(H,K)X||| \leq |||L(H,K)X|||$$

がすべてのユニタリ不変ノルム $|||\cdot|||$ に対して成立する。

(iii)

$$\|M(H,K)X\| \leq \|L(H,K)X\|$$

が作用素ノルム $\|\cdot\|$ に対して成立する。

(iv) 任意の (自然数 n 及び) 正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ に対して $n\times n$ 行列

$$\left[\frac{M(\lambda_i,\lambda_j)}{L(\lambda_i,\lambda_j)}\right]_{i,j=1,2,\cdots,n}$$

が正行列である。

(v) 関数

$$t\in\mathbf{R} \mapsto \frac{M(e^t,1)}{L(e^t,1)}$$

は正定値である。

この定理の背後にあるものは勿論正定値関数の Fourier 変換に関する Bochner の定理である。また条件 (i),(ii),(iii) は (任意サイズの) 任意行列 (但し、H,K は正) に対する要請であることに注意する。定理の (v) $\Rightarrow$ (ii) は「スカラー値平均」$M(\lambda,\mu)$ の比の正定値性をチェックすることにより、対応する作用素平均のノルムの比較が可能であると主張している。論文 [5] で我々は、$\alpha\in[-\infty,+\infty]$ に対し、

$$M_\alpha(\lambda,\mu) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha}\times\frac{\lambda^\alpha-\mu^\alpha}{\lambda^{\alpha-1}-\mu^{\alpha-1}} & (\lambda\neq\mu \text{ の時}) \\ \lambda & (\lambda=\mu \text{ の時}) \end{cases}$$

を考えた。但し、$\alpha_0 = -\infty, 0, 1, \infty$ の場合には $\lim_{\alpha\to\alpha_0} M_\alpha(\lambda, \mu)$ と理解する。定理をこの一係数平均族に対し適用することによって、$|||M_\alpha(H,K)X|||$ の α に関する単調増加性が分かる。$M_2, M_1, M_{1/2}$ は各々算術・対数・幾何平均であり、(作用素版) 算術・対数・幾何平均不等式 (1) の更なる精密化が得られたことになる。以上の結果のヒルベルト空間上の作用素への拡張はほぼ満足の行く形で可能であり、間もなく発表予定 ([6]) である。

以下このような関数の正定値性を使用するテクニック (またはその variant) を利用して著者が最近得た結果について説明する。最近 ([5]) 著者はある種の作用素の交代和、平均の差等のノルムの振る舞いについて考察した。そこで「Heinz 不等式の示すような単調性が「補正項」$\pm H^{1/2}XK^{1/2}$ 込みで成立するか ?」という問題に遭遇した。答は肯定的であることが分かった。

定理 $\beta \geq 0$ の関数として

$$|||H^{\frac{1}{2}+\beta}XK^{\frac{1}{2}-\beta} + H^{\frac{1}{2}-\beta}XK^{\frac{1}{2}+\beta} \pm H^{1/2}XK^{1/2}|||$$

は共に単調増加である。

この定理を示すには、条件 $0 \leq \alpha \leq \beta$ のもとで

$$\frac{\sinh(3\alpha t)\sinh(\beta t)}{\sinh(\alpha t)\sinh(3\beta t)}, \qquad \frac{\cosh(3\alpha t)\cosh(\beta t)}{\cosh(\alpha t)\cosh(3\beta t)}$$

の正定値性を示さなくてはならない。このような各種双曲線関数の比の正定値性を詳しく調べることに様々な自明でない作用素に対するノルム不等式が得られる。一例として前定理に現われた量と対数平均のノルムの比較に関する結果を紹介しよう。

定理 $\beta \geq 0$ とする。

(i) ノルム不等式

$$|||H^{\frac{1}{2}+\beta}XK^{\frac{1}{2}-\beta} + H^{\frac{1}{2}-\beta}XK^{\frac{1}{2}+\beta} - H^{1/2}XK^{1/2}||| \leq |||\int_0^1 H^t XK^{1-t}dt|||$$

が成立する為の必要十分条件は $\beta \leq \frac{1}{6}$ である。

(ii) ノルム不等式

$$\frac{1}{3}|||H^{\frac{1}{2}+\beta}XK^{\frac{1}{2}-\beta} + H^{\frac{1}{2}-\beta}XK^{\frac{1}{2}+\beta} + H^{1/2}XK^{1/2}||| \leq |||\int_0^1 H^t XK^{1-t}dt|||$$

が成立する為の必要十分条件は $\beta \leq \frac{1}{3}$ である。

(iii) $\beta < \frac{1}{2}$ に対し

$$\begin{aligned}&|||H^{\frac{1}{2}+\beta}XK^{\frac{1}{2}-\beta} + H^{\frac{1}{2}-\beta}XK^{\frac{1}{2}+\beta} \pm H^{1/2}XK^{1/2}|||\\ &\qquad \leq (2\tan(\pi\beta)+1)|||\int_0^1 H^t XK^{1-t}dt|||\end{aligned}$$

が成立する。

(iv) $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\right)$ $(= 0.0202\cdots)$ とする。$\beta \leq \frac{1}{3} + \varepsilon_0$ のとき、(ii) の不等式はヒルベルトシュミットノルムに対しては成立する。

References

1. T. Ando, *Matrix Young inequalities,* Oper. Theory Adv. Appl., **75** (1995), 33–38.
2. R. Bhatia and C. Davis, *More matrix forms of the arithmetic geometric mean inequality,* SIAM J. Matrix Anal. Appl., **14** (1993), 132–136.
3. E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, Math. Ann., **123** (1951), 415–438.
4. F. Hiai and H. Kosaki, *Comparison of various means for operators*, J. Funct. Anal., **163** (1999), 300-323.
5. F. Hiai and H. Kosaki, *Means for matrices and comparison of their norms*, Indiana Univ. Math. J., **48** (1999), 899-936.
6. F. Hiai and H. Kosaki, 準備中
7. H. Kosaki, *Arithmetic-geometric mean and related inequalities for operators*, J. Funct. Anal., **156** (1998), 429-451.
8. H. Kosaki, 準備中
9. A. McIntosh, *Heinz inequalities and perturbation of spectral families*, Macquarie Mathematical Reports, 79-0006, 1979.