

Cuntz 環のセクターの 組み合わせ的構成とその分類

京大・数理研 川村 勝紀 (Katsunori Kawamura)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto Univ.

C*-環 \mathcal{A} から \mathcal{B} への準同型の同値類の集合 $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の代数構造の一般論と $\text{Sect}\mathcal{O}_d$, $d \geq 2$, の具体的な計算を行う。最後に物理への応用を紹介する。2つの単位的 C*-環 \mathcal{A}, \mathcal{B} に対して、 $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ を \mathcal{A} から \mathcal{B} への単位的 *-準同型の全体の集合とする。 \mathcal{A} に対して、以下で記号 $H_d\mathcal{A}$ を定義する。

$$H_d\mathcal{A} \equiv \{(\phi(s_i))_{i=1}^d \in \mathcal{A}^d : \phi \in \text{Hom}(\mathcal{O}_d, \mathcal{A})\} \quad (d \geq 2).$$

ここで $\mathcal{O}_d = C^* \langle \{s_i : i = 1, \dots, d\} \rangle$ を Cuntz 環とする。 $\rho, \rho' \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ にたいして、あるユニタリ $u \in \mathcal{B}$ が存在して $\rho' = u\rho(\cdot)u^*$ のとき $\rho \sim \rho'$ とかく。 \sim は $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の同値関係を定める。

1 セクター半群、セクター環とその表現⁰

1.1 $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と $\text{Sect}\mathcal{A}$ の代数構造

一般に $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ などと比べて、代数的構造を考えにくい (付録 A.1)。しかし、以下の条件のもとでうまく $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の同値類に加法群に似た構造を考えることができる。

$d \geq 2$ を固定して、 $H_d\mathcal{B} \neq \emptyset$ を仮定する。 $\xi = (t_i)_{i=1}^d \in H_d\mathcal{B}$ と $\rho = (\rho_i)_{i=1}^d \in (\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^d$ に対して、次のカップリング $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を定義する:

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : H_d\mathcal{A} \times (\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^d \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}),$$

$$\langle \xi | \rho \rangle \equiv \sum_{i=1}^d \text{Ad}t_i \circ \rho_i.$$

ここで

$$\text{Ad}t_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}; \quad \text{Ad}t_i(x) \equiv t_i x t_i^* \quad (x \in \mathcal{B})$$

命題 1.1 (i) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は well-defined.

(ii) 勝手な $\xi, \eta \in H_d B$ と $\rho = (\rho_i)_{i=1}^d \in (\text{Hom}(\mathcal{A}, B))^d$ に対して

$$\langle \xi | \rho \rangle \sim \langle \eta | \rho \rangle .$$

(iii) $\rho^{(1)} = (\rho_i^{(1)})$, $\rho^{(2)} = (\rho_i^{(2)})$ に対して、もし $\rho_i^{(1)} \sim \rho_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, d$, ならば、

$$\langle \xi | \rho^{(1)} \rangle \sim \langle \xi | \rho^{(2)} \rangle .$$

(iv) 勝手な $\rho_1, \dots, \rho_{2d-1}$ と $\xi^{(i)} \in H_d B$, $i = 1, 2, 3$, に対して、

$$\rho^{(1)} = (\rho_1, \dots, \rho_d),$$

$$\rho^{(2)} = (\rho_d, \dots, \rho_{2d-1}),$$

$$\rho^{(3)} = (\rho_1, \dots, \rho_{d-1}, \langle \xi^{(1)} | \rho^{(2)} \rangle),$$

$$\rho^{(4)} = (\langle \xi^{(2)} | \rho^{(1)} \rangle, \rho_{d+1}, \dots, \rho_{2d-1}).$$

と置くと、

$$\langle \xi^{(3)} | \rho^{(3)} \rangle \sim \langle \xi^{(3)} | \rho^{(4)} \rangle .$$

証明. A.2. ■

カップリング $\langle \cdot | \cdot \rangle$ の性質より、本質的なのは $\text{Hom}(\mathcal{A}, B)$ ではなく、その同値類であることがわかる。これより、自然に以下の定義がなされる。

定義 1.1 (i)

$$\text{Sect}(\mathcal{A}, B) \equiv \text{Inn} B \setminus \text{Hom}(\mathcal{A}, B)$$

を \mathcal{A} から B へのセクターと呼ぶ。¹ここで $\text{Inn} B$ は B の内部自己同型群で $\text{Hom}(\mathcal{A}, B)$ に左から作用しているものとする:

$$\phi \mapsto \alpha \circ \phi \quad (\alpha \in \text{Inn} B, \phi \in \text{Hom}(\mathcal{A}, B)).$$

(ii) $\text{Sect}(\mathcal{A}, B)$ 上の d -項演算 p を以下で定義する:

$$p : (\text{Sect}(\mathcal{A}, B))^d \rightarrow \text{Sect}(\mathcal{A}, B),$$

$$p([\rho_1], \dots, [\rho_d]) \equiv [\langle \xi | \rho \rangle]$$

ここで $\xi \in H_d B$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d) \in (\text{Hom}(\mathcal{A}, B))^d$.

¹[5] とは \mathcal{A} と B の位置が逆で、かつ集合としても [5] の $\text{Sect}(\mathcal{A}, B)$ 定義には我々の定義にさらに条件がついたものを扱っていることに注意する。

(iii) $[\rho] \in \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が既約とは

$$\rho(\mathcal{A})' \cap \mathcal{B} = \text{CI}$$

のときをいう。

(iv) $[\rho] \in \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が固有 (*proper*) とは ρ が全射でないときをいう。

$\alpha : \mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$ の場合は $\text{Sect}(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}) \cong \text{Sect}(\mathcal{A}_2, \mathcal{B})$, $\text{Sect}(\mathcal{B}, \mathcal{A}_1) \cong \text{Sect}(\mathcal{B}, \mathcal{A}_2)$ が

$$f_\alpha \equiv \text{Ad}\alpha$$

で与えられる。

命題 1.2 $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 上の d -項演算

$$p : (\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^d \rightarrow \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

は以下の性質を満たす：

(i) (可換性) p は完全対称、つまり

$$p(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(d)}) = p(z_1, \dots, z_d) \quad (z_1, \dots, z_d \in \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \sigma \in \mathfrak{S}_d).$$

(ii) (結合律) $(\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^{2d-1}$ 上で以下写像の合成の式が成り立つ：

$$p \circ (id^{d-1} \times p) = p \circ (p \times id^{d-1}).$$

特に $H_2\mathcal{B} \neq \emptyset$ のとき p は通常の 2 項演算になり、 $(\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), p)$ は可換な半群になることがわかる。これより、 $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ での演算 p を和、又は複和 (multi sum) と呼ぶことにする。 $(\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), p)$ を \mathcal{A} から \mathcal{B} へのセクター半群または、単にセクター群と呼ぶ。

$\mathcal{A} = \mathcal{B}$ のときに

$$\text{Sect}\mathcal{A} \equiv \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \text{Inn}\mathcal{A} \setminus \text{End}\mathcal{A}.$$

とする。

命題 1.3 (i) $\text{Sect}\mathcal{A}$ は写像の合成を積としてモノイドになる。(一般に $\text{Sect}\mathcal{A}$ を \mathcal{A} のセクターモノイドと呼ぶ。)

(ii) $H_d\mathcal{A} \neq \emptyset$ と仮定する。このとき、 $\text{Sect}\mathcal{A}$ の和と積は分配法則を満たす。

(Sect \mathcal{A} は外部自己準同型モノイドともいえる。) Sect \mathcal{A} に上記の意味で和と積を考えたものを \mathcal{A} のセクター環 (sector algebra) と便宜的に呼ぶことにする。勿論、Sect \mathcal{A} は通常の環の公理を満たしてはいない。従って、正確には半環 (semi algebra, semi ring) とでも呼ぶべきものである。外部自己同型群 Out \mathcal{A} は Sect \mathcal{A} の部分群である為、Out \mathcal{A} が非可換ならば、Sect \mathcal{A} も非可換である。

$H_d\mathcal{A} \neq \emptyset$ となる C^* -環 \mathcal{A} に対してそのセクター Sect \mathcal{A} は一般に非可換環の (ような) 構造をもつことがわかった。 p を通常の和のようにあえて書くと、以下のように表すことができる:

$$x_{\sigma(1)} + \cdots + x_{\sigma(d)} = x_1 + \cdots + x_d \quad (x_1, \dots, x_d \in \text{Sect}\mathcal{A}, \sigma \in \mathfrak{S}_d),$$

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_{d-1} + (x_d + \cdots + x_{2d-1}) \\ = (x_1 + \cdots + x_d) + x_{d+1} + \cdots + x_{2d-1} \end{aligned} \quad (x_1, \dots, x_{2d-1} \in \text{Sect}\mathcal{A}),$$

$$x(yz) = (xy)z \quad (x, y, z \in \text{Sect}\mathcal{A}),$$

$$1x = x = x1 \quad (1 = [i], x \in \text{Sect}\mathcal{A}),$$

$$x(y_1 + \cdots + y_d) = xy_1 + \cdots + xy_d \quad (x, y_1, \dots, y_d \in \text{Sect}\mathcal{A})$$

ここで i は \mathcal{A} 上の恒等写像とする。0 元がなく、 $H_d\mathcal{A} \neq \emptyset$, $H_k\mathcal{A} = \emptyset$, $2 \leq k \leq d-1$ のときは d 個づつしか和を定義できないことに注意する。

例 1.1 K -理論より、 $H_2\mathcal{O}_3 = \emptyset$ かつ $H_3\mathcal{O}_3 \neq \emptyset$ 。従って Sect \mathcal{O}_3 の和は 3 つづしか定義できない。

1.2 スペクトル加群¹

同じく $d \geq 2$ を固定して $H_d\mathcal{B} \neq \emptyset$ を仮定する。セクター半群 Sect $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ のある表現 (正確には右加群) を考える。具体的にはある 2 つのベクトル空間のあいだの線形作用素として表す。Spec \mathcal{A} , BSpec \mathcal{A} をそれぞれ \mathcal{A} の単位的既約表現, 単位的表現のユニタリー同値類の集合とする。 \mathcal{B} についても同様である。 BSpec \mathcal{A} 上に

$$[\pi_1] \oplus [\pi_2] \equiv [\pi_1 \oplus \pi_2] \quad ([\pi_1], [\pi_2] \in \text{BSpec}\mathcal{A})$$

で和を定義する。今 BSpec \mathcal{A} には 0 表現は入っていないので、BSpec \mathcal{A} はこの和で (単位元のない) 半群になる。 $[\rho] \in \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の BSpec \mathcal{B} から BSpec \mathcal{A} への作用素としての表現 $R_{[\rho]}$ を以下で定義する:

$$R_{[\rho]} : \text{BSpec}\mathcal{B} \rightarrow \text{BSpec}\mathcal{A},$$

$$[\pi]R_{[\rho]} \equiv [\pi \circ \rho] \quad ([\pi] \in \text{BSpec}A).$$

すると、 $R_{[\rho]}$ は well-defined, $\text{Sect}(A, B)$ の作用は $\text{BSpec}A$ と $\text{BSpec}B$ の演算に分配的になる。つまり、 $R_{[\rho]}$ は加法半群 $\text{BSpec}B$ から $\text{BSpec}A$ への準同型になる。さらに写像

$$R : \text{Sect}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(\text{BSpec}B, \text{BSpec}A)$$

は以下の式をみたす: 任意の $z_1, \dots, z_d \in \text{Sect}(A, B)$ に対して

$$xR_{p(z_1, \dots, z_d)} = xR_{z_1} \oplus \dots \oplus xR_{z_d} \quad (x \in \text{BSpec}B)$$

となる。これより、 R は $\text{Sect}(A, B)$ の d -項演算半群の作用素としての表現を与えていることがわかる。(正確には可換半群 $\text{Sect}(A, B)$ の $V = \text{BSpec}A \oplus \text{BSpec}B$ を考えていることになる。 R は V への右からの作用素としての実現である。) $(\text{BSpec}A, \text{BSpec}B, R)$ を $\text{Sect}(A, B)$ の右スペクトル表現と呼ぶ。特に $A = B$ のとき、 $(\text{BSpec}A, R)$ を $\text{Sect}A$ の右スペクトル加群と呼ぶ。

ここでこの作用からわかる $\text{Sect}A$ の性質をまとめておく。

定理 1.1 (i) 外部自己同型群 $\text{Out}A \subset \text{Sect}A$ の元はすべて既約。

(ii) (既約判定条件) B は単純とする。 $z \in \text{Sect}(A, B)$ に対してある $x \in \text{Spec}B$ が存在して $xR_z \in \text{Spec}A$ ならば z は既約。

(iii) A は単純とする。 $z \in \text{Sect}A$ に対してある $x \in \text{Spec}A$ が存在して $xR_z = x$ ならば $z^n, n \geq 1$ は既約。

(iv) (非同値性の判定条件) $\phi_1, \phi_2 \in \text{End}(A, B)$ に対してある $\pi \in \text{IrrRep}B$ が存在して以下の条件を満たすとする:

$$\pi \circ \phi_1 \not\sim \pi \circ \phi_2.$$

このとき、 $\phi_1 \not\sim \phi_2$ 。

(v) (固有性の判定条件) $z \in \text{Sect}A$ に対して、ある $x \in \text{Spec}A$ が存在して $xR_z \notin \text{Spec}A$ ならば、 $z \notin \text{Out}A$, つまり、 z は固有セクター。

証明. (i) 明らか。(ii) 単純な C^* -環の単位的表現、単位的自己準同型はすべて単射であることに注意する。仮定より、ある $\pi_1 \in \text{IrrRep}B$ が存在して

$$\pi_2 \equiv \pi_1 \circ \rho$$

とおくと $\pi_2 \in \text{IrrRep}A$. すると、

$$CI = \pi_2(A)' = \pi_1(\rho(A))' \supset \pi_1(\rho(A))' \cap \pi_1(B) \supset CI.$$

$$CI = \pi_1(\rho(\mathcal{A}))' \cap \pi_1(\mathcal{B}) = \pi_1(\rho(\mathcal{A})' \cap \mathcal{B}).$$

\mathcal{B} が単純なので π_1 は単射だから、

$$CI = \rho(\mathcal{A})' \cap \mathcal{B}.$$

よって $z = [\rho] \in \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は既約。

(iii)-(v) 省略。

次に上の条件が満たされるような $\text{Sect}\mathcal{A}$ のクラスに対してグラフを定義する。 \mathcal{E} を $\text{Spec}\mathcal{A}$ の部分集合とする。

定義 1.2 $\xi \in \text{Sect}\mathcal{A}$ が (有限) \mathcal{E} -class とは

$$\mathcal{E}R_\xi \subset \mathbb{N} \langle \mathcal{E} \rangle \equiv \left\{ \sum_{i=1}^N n_i \cdot x_i : x_i \in \mathcal{E}, n_i \in \mathbb{N}, N \geq 1 \right\},$$

$$n \cdot x \equiv \underbrace{x + \cdots + x}_n \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{E})$$

のときをいう。

C_ξ を $\text{Sect}\mathcal{A}$ の \mathcal{E} -class の全体とする。 $z \in C_\xi$ に対して、有向グラフ $\text{bg}_z \equiv (E_z, V_z)$ を以下で定義する：

$$V_z = \mathcal{E},$$

$$E_z \equiv \{(x, y) \in V_z \times V_z : y' \in \mathbb{N} \langle \mathcal{E} \rangle \text{ が存在して } xR_z = y + y'\}.$$

ここで (x, y) は頂点 x から y への向きづけられた辺とする。 bg_z をセクター z の \mathcal{E} 上での分岐グラフ (branching graph) と呼ぶ。また、分岐グラフの分岐の仕方をセクター z の分岐則と呼ぶ。²

命題 1.4 (i) (外線条件) $H_d\mathcal{A} \neq \emptyset$ と仮定する。勝手な $\mathcal{E} \subset \text{Spec}\mathcal{A}$ と $\xi \in C_\xi$ に対して、 bg_z の頂点からでていく辺の本数は $n(d-1)+1$, $n \geq 0$ の値をとる。つまり、

$$1, d, 2d-1, 3d-2, \dots$$

$$N_-(\text{bg}_z) \equiv \min\{n_x \in \mathbb{N} : x \in V_z \text{ から出てゆく辺の数}\}.$$

(ii) (非分岐条件) $z \in \text{Sect}\mathcal{A}$ に対して、

$$N_-(\text{bg}_z) = 1$$

ならば、 z は既約。

²群論で部分群へ表現を制限したとき既約分解の規則を分規則と呼ぶことに由来する。

- (iii) (1ループ条件) $z \in \text{Sect}A$ に対して、 bg_z が1ループをもてば z^n , $n \geq 1$ は既約。
- (iv) (分岐条件) bg_z のある頂点が存在して、そこからでてゆく辺が2本以上ならば z は固有セクター。

分岐グラフはセクターを視覚的に捉えることで分類を容易にし、セクターの分岐則を効果的に表現するのに役に立つ。一般に C^* -環の表現の既約分解は一意性がないため、上記のような分岐則は意味を持たないが、ある性質のよいらスの表現へ制限して考えることで分岐則や分岐グラフは意味を持つ。

2 Cuntz 環の置換セクターとその分類²

以下の自然な包含関係を考える：

$$\mathfrak{S}_{d^k} \subset U(d^k) \subset M_{d^k}(\mathbb{C}) \subset UHF_d = \mathcal{O}_d^{U(1)} \subset \mathcal{O}_d.$$

定義 2.1 $\sigma \in \mathfrak{S}_{d^k}$ に対して $\psi_\sigma \in \text{End}\mathcal{O}_d$ を

$$\psi_\sigma(s_i) \equiv u_\sigma s_i \quad (i = 1, \dots, d)$$

で定義する。 ψ_σ を σ により定まる \mathcal{O}_d の置換自己準同型と呼ぶ。ここで u_σ は上の包含関係で σ に対応する \mathcal{O}_d のユニタリーである。

$$E_{d,k} \equiv \{\psi_\sigma \in \text{End}\mathcal{O}_d : \sigma \in \mathfrak{S}_{d^k}\},$$

$$SE_{d,k} \equiv \{[\rho] \in \text{Sect}\mathcal{O}_d : \rho \in E_{d,k}\},$$

$$PSE_{d,k} \equiv SE_{d,k} \setminus \text{Out}\mathcal{O}_d,$$

$$IPSE_{d,k} \equiv \{\xi \in PSE_{d,k} : \xi \text{ は既約}\} \quad (k \geq 1).$$

$E_{d,k}$ の元を k 次の \mathcal{O}_d の置換準同型, $SE_{d,k}$ の元を k 次の \mathcal{O}_d の置換セクターと呼ぶ。置換自己準同型はゲージ変換 γ_z , $z \in U(1)$ で共変な為、 $\mathcal{O}_d^{U(1)}$ への制限もまた $\mathcal{O}_d^{U(1)}$ の自己準同型になる。この制限はいろいろと新しい構造を $\mathcal{O}_d^{U(1)}$ 、特に $CAR \cong \mathcal{O}_2^{U(1)}$ に与えることが分かっている興味深い対象である。

命題 2.1 ($SE_{2,2}$ の分類) $\#SE_{2,2} = 16$,

$$\text{Aut}\mathcal{O}_2 \cap E_{2,2} \cong V_4$$

ここで V_4 は Klein 4 元群, $\#PSE_{2,2} = 14$, $\#IPSE_{2,2} = 5$,

$$PSE_{2,2} \setminus IPSE_{2,2} \subset \{\xi + \zeta : \xi, \zeta \in \text{Out}\mathcal{O}_2\}.$$

$M \equiv IPSE_{2,2}/\alpha$ とおくと、 $\#M = 3$ 。ここで $\alpha \in \text{Aut}\mathcal{O}_2$ は $s_1 \leftrightarrow s_2$ で定められるものとする。

この証明は具体的に $E_{2,2}$ の元をスペクトル表現した時の行列要素 (= スペクトル行列) を計算することで得られる。分岐グラフで表すことにより、視覚的に違いを認識することもできる。原理的に $E_{d,k}$ の元はスペクトル行列の計算により、上記のような分類が可能であろうと思われる。

M の元 (の代表元) $\rho, \bar{\rho}, \eta$ を以下で紹介する³ :

$$\rho(s_1) \equiv s_{12,1} + s_{11,2}, \quad \rho(s_2) \equiv s_2,$$

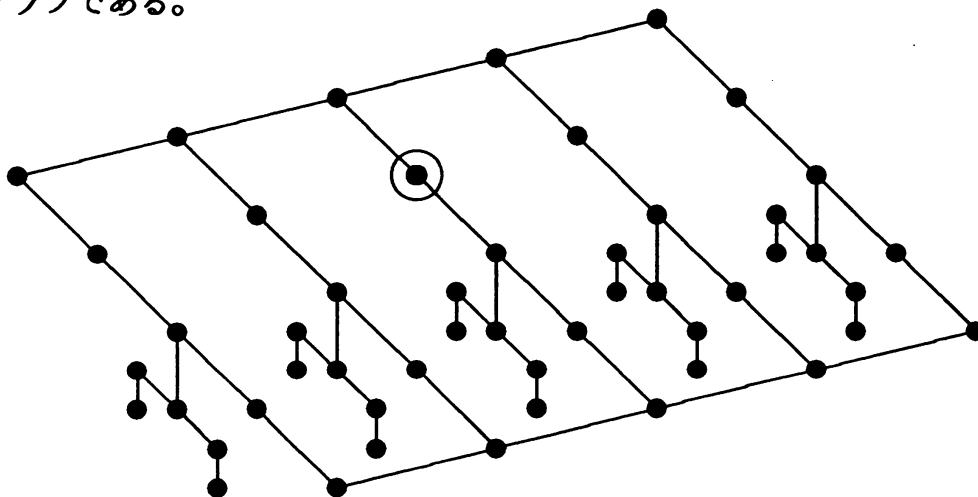
$$\bar{\rho}(s_1) \equiv s_{21,1} + s_{12,2}, \quad \bar{\rho}(s_2) \equiv s_{11,1} + s_{22,2},$$

$$\eta(s_1) \equiv s_{22,1} + s_{11,2}, \quad \eta(s_2) \equiv s_{21,1} + s_{12,2}$$

ただしここで

$$s_{ij,k} \equiv s_i s_j s_k^* \quad (i, j, k = 1, 2).$$

以下、 $[\rho]$ を ρ 等と略記する。以下のグラフは $\rho \circ \gamma_z$, $z = e^{2\pi\theta\sqrt{-1}}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, の分岐グラフである。



³ $\bar{\rho}$ は ρ の conjugate sector [5] を真似た記号だが、正確には関係はよくわからない。

定理 4.1

$$\bar{\rho}\rho = \iota + \alpha,$$

$$\rho\bar{\rho} = \iota + \beta \neq \bar{\rho}\rho,$$

$$\bar{\rho}^2\rho^2 = \iota + \alpha + \eta.$$

ここで上の演算や等号はすべて $\text{Sect}\mathcal{O}_2$ のセクター環としての意味とする。 $\beta \in \text{Aut}\mathcal{O}_2$ は $s_1 \leftrightarrow -s_1$ で定義されているとする。証明は単なる計算である。特に \mathcal{O}_2 の canonical endomorphism (のセクター) $\sigma \in \text{PSE}_{2,2}$ は $\sigma = \iota + \iota = 2\iota$ である。

命題 2.2 つぎの集合の元は \mathcal{O}_2 の既約な互いに相異なる固有セクターである：

$$\{\bar{\rho}^n\eta\rho, \eta, \bar{\rho}^n, \rho, \rho^2 : n \geq 1\}.$$

現時点で ρ^n , $n \geq 3$ の既約性、そして $\text{Sect}A$ の非可換な部分セクター環 $\text{Alg} \langle \{\rho, \bar{\rho}\} \rangle$ の構造は分かっていない。

今後の問題として $SE_{3,2}$ ($\#E_{3,2} = 9!$) の分類や以下のような非置換自己準同型の解析がある。

$\xi_1 = (w_1, w_2, w_3), \xi_2 = (v_1, v_2, v_3) \in H_3\mathcal{O}_2, g \in U(3)$ に対して

$$u \equiv \langle \xi_1 | g | \xi_2 \rangle = \sum_{i,j=1}^3 w_i g_{ij} v_j^*$$

と置く。

$$\rho(s_i) \equiv u s_i \quad (i = 1, 2)$$

により、 \mathcal{O}_2 の自己準同型 ρ が決まる。

例 2.1 (非ゲージ共変自己準同型)

(i) (有限分岐系) $A_{2,1}$:

$$\xi_1 = (s_{11}, s_{12}, s_2), \quad \xi_2 = (s_1, s_{22}, s_{21}),$$

$$g = I$$

とすると以下を得る:

$$t_1 = s_{11}, \quad t_2 = s_{12,2} + s_{2,1}.$$

すると以下の代数同型がある

$$\langle \iota, \rho \rangle \cong \mathbf{Z}_{n \geq 0}[\rho] \cong \mathbf{Z}_{n \geq 0}[x] \setminus \{0\}.$$

さらに $\{\rho^n\}_{n \geq 1}$ はすべて固有かつ既約で互いにセクターとして異なる。

$$\xi_1 = (s_1, s_{22}, s_{21}) = \xi_2,$$

$$g = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$t_1 = as_1 + bs_{22},$$

$$t_2 = bs_{1,2} - as_{22,2} + s_{21,1}.$$

特に $a = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$, $b = \sqrt{a}$ とすると、[5], p 21 の自己準同型の例になる:

$$[\mathcal{O}_2, \rho(\mathcal{O}_2)] = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

(iii) (無限分岐系) $A_{2,2}$:

$$\xi_1 = (s_{11}, s_{12}, s_2), \quad \xi_2 = (s_1, s_{21}, s_{22}),$$

$$g = I$$

とすると以下を得る:

$$t_1 = s_{11}, \quad t_2 = s_{12,1} + s_{2,2}.$$

ρ はある既約表現を可算無限の既約表現の直和に移すことがわかっている。

3 応用³

3.1 Polyakov の弦の BRS 量子化における FP ゴーストの表現の構成

物理のいわゆる弦理論のプロトタイプとして知られる Polyakov の弦の BRS 量子化の際に以下のような $*$ -環 $\mathcal{FP} = *Alg \langle \{c_n, \bar{c}_n : n \geq 0\} \rangle$ が用いられる:

$$c_0^* = c_0, \quad \bar{c}_0^* = \bar{c}_0,$$

$$\{c_n, \bar{c}_m^*\} = -\delta_{nm} I \quad (n, m \geq 0)$$

これ以外の反交換子はすべて 0 とする。 \mathcal{FP} を (弦模型の) FP ゴースト環とよぶ。これまで加藤-小川、阿部-中西による Polyakov の弦の BRS 量子化が

知られていて、2つの理論の主な違いは \mathcal{FP} の Fock 表現の真空の期待値が前者は0になり、後者は1となることである。

具体的な構成 ([2]) を簡略化して結果を述べると、

(第1段階) $\mathcal{O}_{2,2}$ という、 \mathcal{O}_4 の関係式の符号を一部分かえた $*$ -環の Krein 空間 \mathcal{V} への表現 (\mathcal{V}, π) を構成する。

(第2段階) \mathcal{FP} の $\mathcal{O}_{2,2}$ への埋め込みを2つ

$$\phi_1, \phi_2 : \mathcal{FP} \rightarrow \mathcal{O}_{2,2}$$

構成する。

(第3段階) (\mathcal{V}, π) を部分環 $\phi_i(\mathcal{FP})$, $i = 1, 2$ へ制限して得られる \mathcal{FP} の \mathcal{V} への表現

$$\pi_i \equiv \pi \circ \phi_i \quad (i = 1, 2)$$

を考える。すると、 (\mathcal{V}, π_1) (\mathcal{V}, π_2) はそれぞれ加藤-小川, 阿部-中西の FP ゴーストの表現と一致する。

3.2 CAR の非線形変換

[1] により、具体的な埋め込み $CAR \hookrightarrow \mathcal{O}_{2^n}$, $n \geq 1$, を構成して、[3] で \mathcal{O}_{2^n} の自己同型を CAR 制限することで、非線形な CAR の変換を得た。今後、この変換の性質を詳しく調べてゆくつもりである。

付録

A 注意すべきことがら³

A.1 A

$\phi, \psi \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ に対して

$$\phi + \psi \notin \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

であることに注意する。実際

$$(\phi + \psi)(I) = \phi(I) + \psi(I) = 2I.$$

なので単位元を保たないし、

$$\begin{aligned} (\phi + \psi)(x)(\phi + \psi)(y) &= \phi(xy) + \phi(x)\psi(y) + \psi(y)\phi(x) + \psi(xy) \\ &\neq (\phi + \psi)(xy). \end{aligned}$$

A.2 B

(i)

$$\rho' \equiv \langle \xi | \rho \rangle$$

とすると、

$$\begin{aligned} \rho'(x)\rho'(y) &= \left(\sum_{i=1}^d (\text{Ad}t_i \circ \rho_i)(x) \right) \left(\sum_{i=1}^d (\text{Ad}t_i \circ \rho_i)(y) \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \text{Ad}t_i(\rho_i(x)\rho_i(y)) \\ &= \sum_{i=1}^d (\text{Ad}t_i \circ \rho_i)(xy) \\ &= \rho'(xy) \quad (x, y \in \mathcal{A}), \end{aligned}$$

$$(\rho'(x))^* = \rho'(x^*) \quad (x \in \mathcal{A}),$$

$$\rho'(I) = I.$$

よって $\rho' \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. 従って、 $\langle \cdot | \cdot \rangle: H_d \mathcal{A} \times (\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^d \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は写像として well-defined となっている。

(ii)

$$T \equiv \sum_{i=1}^d t_i v_i^*$$

とおく。すると T は \mathcal{B} のユニタリーになる。

$$\begin{aligned} \text{Ad}T \circ \langle \eta | \rho \rangle &= \text{Ad}T \circ \left(\sum_{i=1}^d \text{Ad}v_i \circ \rho_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \text{Ad}t_i \circ \rho_i \\ &= \langle \xi | \rho \rangle. \end{aligned}$$

従って、

$$\langle \eta | \rho \rangle \sim \langle \xi | \rho \rangle.$$

(iii) $\xi = (v_i)_{i=1}^d$ とする。 $\text{Ad}u_i \circ \rho_i^{(1)} = \rho_i^{(2)}$ となるように $u_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \dots, d$ をとり、

$$T \equiv \sum_{i=1}^d \text{Ad}(v_i u_i v_i^*)$$

と置く。すると T は \mathcal{B} のユニタリーで、

$$\begin{aligned} \text{Ad}T \circ \langle \xi | \rho^{(1)} \rangle &= \text{Ad}T \left(\sum_{i=1}^n \text{Ad}v_i \circ \rho_i^{(1)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Ad}(v_i u_i) \circ \rho_i^{(1)} \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Ad}v_i \circ \rho_i^{(2)} \\ &= \langle \xi | \rho^{(2)} \rangle . \end{aligned}$$

よって、 $\text{Ad}T \circ \langle \xi | \rho^{(1)} \rangle = \langle \xi | \rho^{(2)} \rangle$.

(iv) 同様に適当に \mathcal{B} のユニタリーを構成して証明する。 ■

References

- [1] Mitsuo Abe and Katsunori Kawamura, *Recursive Fermion System in Cuntz Algebra. I - Embeddings of Fermion Algebra into Cuntz Algebra*, preprint, RIMS-1332(2001).
- [2] Mitsuo Abe and Katsunori Kawamura, *Pseudo Cuntz Algebra and Recursive FP Ghost System in String Theory*, preprint, RIMS-1333(2001).
- [3] Mitsuo Abe and Katsunori Kawamura, *Non Linear Transformation of CAR Algebra*, preprint, RIMS-1334(2001).
- [4] Ola Bratteli and Palle E.T. Jorgensen, *Iterated function Systems and Permutation Representations of the Cuntz algebra*, Memories of the American Mathematical Society, number 663, American Mathematical Society (1999).
- [5] M. Izumi, *Inclusions of simple C*-algebras*, arXiv:math.OA/0106117 v1 13 Jun 2001.