数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 8-15

対称群の既約加群の rank variety

大阪大学大学院理学研究科　宇野　勝博 (Katsuhiro UNO)
Department of Mathematics, Osaka University

G を有限群, k を標数 p の代数的閉体とする. (p は素数.) また, $E=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ を $x_1,\cdots,x_n$ を生成元とする G の elementary abelian p-subgroup とする. k^n の要素 $\mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ に対し, kE の要素 $u_{\mathbf{a}}$ を $u_{\mathbf{a}}=1+\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i-1)$ と定義すると, $u_{\mathbf{a}}$ は可逆元であり, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ のとき, 位数 p である.

kG-加群 M に対し, $V_E(M)$ を

$$V_E(M)=\{\mathbf{a}\in k^n\setminus\{0\}\mid M\downarrow_{\langle u_{\mathbf{a}}\rangle}\ \text{is not projective}\ \}\cup\{0\}$$

により定義すると, $V_E(M)$ は homogeneous affine variety となり, M の (E に関する) rank variety と呼ばれる. ここで, $c(M)=\max_E\dim V_E(M)$ とおく. 但し, max における E は, G の elementary abelian p-subgroups を動く. $c(M)$ は, M の complexity と呼ばれ, M の minimal projective resolution に現われる projective modules がどの程度複雑であるかを表わす. また, $c(M)=1$ は, M が non-projective かつ periodic であることと同値である. ここで, M が periodic であるとは, M の minimal projective resolution を $\cdots\to P_n\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$ とするとき, 自然数 s が存在して $P_{n+s}\cong P_n$ がすべての n ($n\geq 0$) について成立することをいう. ([2] 参照.)

ここでは, G が n 次対称群で, M が, いわゆる two row partition (成分 2 個からなる分割) に対応しているものについて, $V_E(M)$ の考察を行う. 本来, このようなすべての M について $V_E(M)$ あるいは $c(M)$ を決定するのが問題であるが, このような M については具体的にあまり何もわかっていない. そこで, ここでは, 現在得られている結果のうち,

(1) $c(M)=1$ である M を決定すること,
(2) $p=2$ の場合に $c(M)$ が小さい M を決定すること,
(3) いわゆる spin 加群という特殊な M について $V_E(M)$ を求めること,

の 3 点について述べる. 有限群のモジュラー表現についての基本的な事項については [8], 対称群のモジュラー表現については [5], 加群の rank variety の基本性質については [2] を参照のこと.

1. 対称群の periodic な既約加群

ここでは, (1) の $c(M)=1$ である M を決定することについて考える. S_n を n 次対称群とする. 既約 kS_n 加群の同型類は, n の p-regular な分割 λ に対応しているが, 一般には, その次元さえ分かっていない. (n の分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)$ に対し, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)$ が p-regular とは, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell$ のうち, 同じものが高々 $p-1$ 個であることをいう.) しかし, λ が two row partition $(m+s,m)$ の場合には, λ に対応する既約加群 D^λ の次元を与える方法はある. 例えば, 次元についての漸化式, 分解定数を求め, それから次元を求める方法などがある. ([3])

一般に n の分割 λ と 自然数 r が与えられたとき, λ からいわゆる r-hook（長さ r の hook）を順次取り除き、これ以上 r-hook が取れなくなった状態を λ の r-core, また, r-core へ至るまでに取り除いた r-hook の数を λ の r-weight, 略して weight という. r-core, r-wight は, r-hook の取り除き方によらず, λ と r のみから定まる. ふたつの既約加群 D^{λ}, D^{μ} が同じ p-block に属するための必要十分条件は, λ と μ が同じ p-core をもつことである. (中山予想, Robinson, Brauer の定理) 従って, p-block は p-core で parametrize される. また, p-block が与えられたとき, それに属する既約 kS_n-加群 D^{λ} の p-weight w は λ の取り方に依らないので, w をその p-block の weight ということもある. r-core, r-hook 等の一般論については [5] 参照.

p-weight が w である p-block の不足群は, S_{pw} の Sylow p-部分群であることが知られている. 従って, Higman の定理から, この p-block 多元環が有限表現型になるための必要十分条件は $w \leq 1$ であり, $w = 0$ であることは, p-block 多元環が半単純になることの必要十分条件である. 特に, weight 1 である既約 kS_n-加群 D^{λ} は, 射影的ではなく, かつ, 有限表現型のブロックに属するので $c(D^{\lambda}) = 1$ となることは明らかである. 従って, $c(D^{\lambda}) = 1$ となる λ を決定する問題は, weight が 2 以上であるλ について考えればよい. λ が two row partition $(m+s, m)$ の場合, $c(D^{\lambda}) = 1$ となる λ が決定できた.

定理 1 (Narumoto, Temma, U.). $\lambda = (m+s, m)$, $s > 0$ とする.

(1) $p \neq 2$ のとき, $c(D^{\lambda}) = 1$ となる λ は weight 1 であるものに限る.

(2) $p = 2$ のとき, $c(D^{\lambda}) = 1$ となる λ は, weight 1 であるものと $\lambda = (3,2), (4,3)$ に限る.

証明は, [3] の他, [6], [10] の結果と, n による帰納法を用いる. 具体的には, 一般に, 小さい n については $c(D^{\lambda}) = 1$ となり, n が大きくなるに従って $c(D^{\lambda})$ も大きくなるので, $c(D^{\lambda}) = 2$ となる境目を決定しなければならない. このとき, 有効となるは, 次の補題である. ([2] 参照)

補題 1. M を kG-加群, $c = c(M)$, G の位数が最大の elementary abelian p-subgroup の位数を p^r とする. このとき, p^{r-c} は $\dim_k M$ を割り切る.

$G = S_n$ のとき, 上の r は $[n/p]$ である. ($[m]$ は m を越えない最大の整数) p-weight が 2 である D^{λ} の次元を [3] 等の方法で調べるとほとんどの場合, $p^{[n/p]-1}$ では割り切れない. 従って, $c(D^{\lambda}) \geq 2$, 即ち, D^{λ} は periodic でないことがわかる. しかし, いくつかの場合, 例えば, $\lambda = (3,2)$ 等については, 実際に $V_E(D^{\lambda})$ を計算する必要がある. これについては, 3 節で述べる.

2. 次元の 2-部分 ($p = 2$ の場合)

この節以降, $p = 2$ とし, 前節の補題に関連して, $\lambda = (m+s, m)$ のとき, $\dim_k D^{\lambda}$ の 2-部分について述べる. $n = 2m + s$ としておく.

一般に, 自然数 d に対して, $d = 2^u v$, 但し, u は非負整数, v は奇数, であるとき, $\nu_2(d) = u$ と書く. また, n の分割 $\lambda = (m+s, m)$ に対し, $d_s(n) = \dim_k D^{(m+s,m)}$ とおく.

まず, n が偶数であるとき, $\lambda = (m+s, m)$, (但し, $s \geq 2$) について,

$$D^{(m+s,m)} \downarrow_{S_{n-1}} \cong D^{(m+s-1,m)}$$

であることが知られているので, $d_s(n) = d_{s-1}(n-1)$ が成り立つ. 従って, $d_s(n)$ を求める問題は, n が奇数, 即ち, s が奇数であるとして考えてよい.

前節で述べたように, $d_s(n)$ を求める漸化式が知られている ([3]) ので, それに基づいて計算すればよいのであるが, 漸化式では, $d_s(n)$ は $d_t(n-2)$, $t = s-2, s-4, \cdots$, によって表されている. 一般に, このような漸化式を解くのは容易ではない. しかし, 小さい s については, $\nu_2(d_s(n))$ を求めることができる. (注. 下の補題 (v) で, $n \equiv 13 \mod 64$ の場合は, 予想はあるが, 証明は完成していない.)

補題 2. (i) $\dim_k D^{(m+1,m)} = 2^m$.

(ii) $n \geq 5$ のとき,

$$\nu_2(d_3(n)) = \begin{cases} (n-5)/4 + \nu_2(n-1) & if\ n \equiv 1 \mod 4, \\ (n-3)/4 & if\ n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

(iii) $n \geq 7$ のとき,

$$\nu_2(d_5(n)) = \begin{cases} (n-5)/4 & if\ n \equiv 1 \mod 4, \\ (n-3)/4 & if\ n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

(iv) $n \geq 9$ のとき,

$$\nu_2(d_7(n)) = \begin{cases} (n-9)/8 + \nu_2(n-1) & if\ n \equiv 1 \mod 8, \\ (n-19)/8 + \nu_2(n-3) & if\ n \equiv 3 \mod 8, \\ (n-5)/8 + \nu_2(n-5) & if\ n \equiv 5 \mod 8, \\ (n-7)/8 & if\ n \equiv 7 \mod 8. \end{cases}$$

(v) $n \geq 11$ のとき,

$$\nu_2(d_9(n)) = \begin{cases} (n-9)/8 & if\ n \equiv 1 \mod 8, \\ (n-3)/8 & if\ n \equiv 3 \mod 8, \\ (n-21)/8 + \nu_2(n-13) & if\ n \equiv 5 \mod 8, \not\equiv 13 \mod 64 \\ (n-15)/8 + \nu_2(n+1) & if\ n \equiv 7 \mod 8. \end{cases}$$

(vi) $n \geq 13$ のとき,

$$\nu_2(d_{11}(n)) = \begin{cases} (n-9)/8 + \nu_2(n-1) & if\ n \equiv 1 \mod 8, \\ (n-11)/8 & if\ n \equiv 3 \mod 8, \\ (n+3)/8 & if\ n \equiv 5 \mod 8, \\ (n-7)/8 & if\ n \equiv 7 \mod 8. \end{cases}$$

(vii) $n \geq 15$ のとき,

$$\nu_2(d_{13}(n)) = \begin{cases} (n-9)/8 & if\ n \equiv 1 \mod 8, \\ (n-3)/8 & if\ n \equiv 3 \mod 8, \\ (n-13)/8 & if\ n \equiv 5 \mod 8, \\ (n-7)/8 & if\ n \equiv 7 \mod 8. \end{cases}$$

上の結果, 補題 1 および [10] を用いて $c(D^\lambda)$ が小さい $\lambda = (m+s, m)$ を決定することができるが, ここでは詳細は省略する.

3. Rank variety の具体的な計算

以下, $p=2$, $\lambda=(m+1,m)$ とする. ($n=2m+1$) ここでは, 既約加群 $D^{(m+1,m)}$ を spin module と呼ぶ. (S_n の covering group の表現も spin 表現と呼ばれるが, ここでは, それとは異なり, 次の理由によりそう呼ぶ. $m \geq 2$ のとき, S_n の symplectic 群 $Sp_{2m}(k)$ への自然な埋め込みがあり, $D^{(m+1,m)}$ は, fundamental weight ω_m に対応する既約 $Sp_{2m}(k)$ 加群 $L(\omega_m)$ に拡張できることが知られている. この$L(\omega_m)$ が, 通常 $Sp_{2m}(k)$ の spin 加群と呼ばれている. 詳しくは [4] 参照.) さて, 前節で見たように, $\dim D^\lambda = 2^m$ である. しかし, この場合は, D^λ の基底を具体的に与えることができ, これを用い, $V_E(M)$ を計算することができる.

$1 \leq i \leq n-1$ なる i について, $\sigma_i = (i, i+1)$ とおく. (σ_i は, i と $i+1$ を入れ替える互換.) さらに,

$$E = \langle \sigma_1, \sigma_3, \cdots, \sigma_{2m-1} \rangle.$$

とおく. E は, S_n の位数 2^m のelementary abelian 2-subgroup であり, M を右正則 kE-加群とすると, $\dim_k M = 2^m$ となり, M の基底として E の要素の全体,

$$\{1\} \cup \{\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_t} \mid i_1, i_2, \cdots, i_t \in \{1, 3, \cdots, 2m-1\}, 1 \leq t \leq m\ \}$$

がとれる. さて, j を $1 \leq i \leq m-1$ なる整数とし, $e_{2j} = \sigma_{2j} - 1$ の M への作用を以下のように定める. ここで, $i_1, i_2, \cdots, i_t$ は $\{1, 3, \cdots, 2m-1\}$ の異なる要素であるとする.

$$(\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_t})e_{2j} = \begin{cases} 0 & if\ 2j-1, 2j+1 \in \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}, \\ \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_t}\sigma_{2j+1} & if\ 2j-1 \in \{i_1, i_2, \cdots, i_t\} \text{ and} \\ & \quad 2j+1 \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}, \\ \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_t}\sigma_{2j-1} & if\ 2j-1 \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_t\} \text{ and} \\ & \quad 2j+1 \in \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}, \\ \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_t}(\sigma_{2j+1}+\sigma_{2j-1}) & if\ 2j-1, 2j+1 \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}. \end{cases}$$

また, $e_{2m} = \sigma_{2m} - 1$ の作用を次で定める.

$$(\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_t})e_{2m} = \begin{cases} 0 & if\ 2m-1 \in \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}, \\ \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_t}\sigma_{2m-1} & if\ 2m-1 \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}. \end{cases}$$

以上により, 互換 σ_i ($1 \leq i \leq 2m = n-1$) の M への作用が定義できたが, これは well defined でしかも次が成り立つ.

定理 2 (Nagai, U.). 上の作用により M は, $D^{(m+1,m)}$ に同型な既約 kS_n-加群となる.

上の定理から、右正則 kE-加群 M の基, とくに, E の要素を$D^{(m+1,m)}$ の基として取れる. この基を用いて $D^{(m+1,m)}$ を行列表示し, $D^{(m+1,m)}$ の rank variety を計算することが

例 1. $\lambda = (3,2)$, $E_1 = \langle (1,2),(3,4) \rangle \leq S_5$, E_2 を位数 4 である S_5 の regular elementary abelian 2-subgroup, 即ち, $E_2 = \langle (1,2)(3,4),(1,3)(2,4) \rangle$ とする. このとき, $D^\lambda \downarrow_{E_1}$ は, 正則 kE_1-加群, 特に, 射影的 kE_1-加群であるから $V_{E_1}(D^\lambda) = \{0\}$. また, M の基底 $\{1, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_1\sigma_3\}$ に関する $(12)(34) = \sigma_1\sigma_3$ および $(13)(24) = \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$ の行列表示は, それぞれ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから, k^2 の要素 (a_1, a_2) に対し, $a_1(\sigma_1\sigma_3 - 1) + a_2(\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2 - 1)$ の行列表示は,

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & a_2 & a_2 & a_1 + a_2 \\ a_2 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_1 + a_2 & a_2 & a_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

となる. ここで, $u = 1 + a_1(\sigma_1\sigma_3 - 1) + a_2(\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2 - 1)$ について, $M \downarrow_{\langle u \rangle}$ が射影的であることと上の行列の階数が 2 であることが同値であるから, (階数が高々 2 であることは一般論からも従う) 次を得る.

$$V_{E_2}(D^\lambda) = \{ \ (a_1, a_2) \in k^2 \mid a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2 = 0 \ \}.$$

従って, $\dim V_{E_2}(D^\lambda) = 1$ となり, $c(D^\lambda) = 1$ を得る.

例 2. $\lambda = (5,4)$, $E_1 = \langle (1,2),(3,4),(5,6),(7,8) \rangle \leq S_9$,

$$E_2 = \langle (1,2)(3,4),(1,3)(2,4) \rangle \times \langle (5,6)(7,8),(5,7)(6,8) \rangle,$$
$$E_3 = \langle (1,2)(3,4),(1,3)(2,4) \rangle \times \langle (5,6) \rangle \times \langle (7,8) \rangle,$$

E_4 を位数 2^3 である S_9 の regular elementary abelian 2-subgroup, 即ち,

$$E_4 = \langle (1,2)(3,4)(5,6)(7,8),(1,3)(2,4)(5,7)(6,8),(1,5)(2,6)(3,7)(4,8) \rangle$$

とする. S_9 の極大な elementary abelian 2-subgroup は E_1, E_2, E_3, E_4 のいずれかに共役である. このとき, 例 1 と同様に, $V_{E_1}(D^\lambda) = \{0\}$, また,

$$E_2^{(1)} = \langle (1,2)(3,4),(1,3)(2,4) \rangle, \quad E_2^{(2)} = \langle (5,6)(7,8),(5,7)(6,8) \rangle$$

とおくと, $E_2 = E_2^{(1)} \times E_2^{(2)}$ であり,

$$D^\lambda \downarrow_{E_2} = D^\lambda \downarrow_{E_2^{(1)} \times E_2^{(2)}} \cong D^{(3,2)} \downarrow_{E_2^{(1)}} \otimes D^{(3,2)} \downarrow_{E_2^{(2)}}$$

となる. 但し, $\otimes$ の右側の加群は, $D^{(3,2)}$ を $\{5,6,7,8,9\}$ 上に働く S_5 上の加群とみなし, それを $E_2^{(2)}$ へ制限したものであり, 同型写像は, 右 $E_2 = E_2^{(1)} \times E_2^{(2)}$-加群の同型 $kE_2 \cong kE_2^{(1)} \otimes_k kE_2^{(2)}$ から自然に誘導されるものである. このことから, 次を得る.

$$\begin{aligned} & V_{E_2}(D^\lambda) \\ & = \{ \ (a_1, a_2) \in k^2 \mid a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2 = 0 \} \times \{ \ (a_3, a_4) \in k^2 \mid a_3^2 + a_3a_4 + a_4^2 = 0 \ \}. \\ & = \{ \ (a_1, a_2, a_3, a_4) \in k^4 \mid a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2 = a_3^2 + a_3a_4 + a_4^2 = 0 \ \} \end{aligned}$$

E_3 についても同様の考察から,

$$
\begin{aligned}
&V_{E_3}(D^\lambda)\\
&= \{\ (a_1,a_2)\in k^2 \mid a_1^2+a_1a_2+a_2^2=0\}\times\{\ a_3\in k \mid a_3=0\}\times\{\ a_4\in k \mid a_4=0\ \}.\\
&\cong \{\ (a_1,a_2)\in k^2 \mid a_1^2+a_1a_2+a_2^2=0\ \}
\end{aligned}
$$

を得る. また, E_4 についても D^λ の行列表示を求めることにより,

$$
\begin{aligned}
V_{E_4}(D^\lambda)\ &= \{\ (a_1,a_2,a_3)\in k^3 \mid a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+a_3^2a_1^2\\
&\qquad +a_1^2a_2a_3+a_2^2a_3a_1+a_3^2a_1a_2=0\ \}.
\end{aligned}
$$

を得る. 従って, $\dim V_{E_3}(D^\lambda)=1$, $\dim V_{E_2}(D^\lambda)=\dim V_{E_4}(D^\lambda)=2$ となり, $c(D^\lambda)=2$ を得る.

さて, S_n の極大 elementary abelian 2-subgroup は, 共役を度外視すると regular elementary abelian 2-subgroup の直積に限る. 従って, 例 2 の考察からもわかるように、ここで与えた $D^{(m+1,m)}$ の基底を用いると, $V_E(D^{(m+1,m)})$ の計算は, $m=2^s$ で, E が位数 2^{s+1} の $S_{2^{s+1}+1}$ の regular elementary abelian 2-subgroup の場合に行えばよい. $D^{(2^s+1,2^s)}$ の次元は 2^{2^s} であるから $D^{(2^s+1,2^s)}$ の行列表示の計算は容易ではないが, Dickson invariants を考えることにより計算できる可能性がある. (Dickson invariants が重要であろうということは, 北海道教育大学の奥山哲郎氏の示唆である.)

4. Dickson invariants

q を p のべき, $X=\mathbb{F}_q^n$ を体 $\mathbb{F}_q$ 上 n 次元のベクトル空間とする. [1] に従って, $\mathbb{F}_q$ 上の n 変数多項式 $c_m^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ を以下のように定義する. ($0\le m\le n-1$.)

まず, 余次元 m の X の部分空間 Y に対し, Y 上恒等的にはゼロにならない $x_1,x_2,\cdots,x_n$ の 1 次式の全体の積を $c_Y(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ とする. そこで,

$$c_m^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_Y c_Y(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

と定義する. 但し, 和で Y は, 余次元 m の X の部分空間全体を渡る.

例. $p=q=2$, $n=2$, $m=1$ のとき. X の基底を $\{v_1,v_2\}$ とすると, 余次元 1 の部分空間は, $\langle v_1\rangle$, $\langle v_2\rangle$, $\langle v_1+v_2\rangle$ の 3 個である. $\langle v_1\rangle$ 上恒等的にはゼロにならない x_1,x_2 の 1 次式は, x_1, x_1+x_2 であるから $c_{\langle v_1\rangle}=x_1(x_1+x_2)$. 同様に, $c_{\langle v_2\rangle}=x_2(x_1+x_2)$, $c_{\langle v_1+v_2\rangle}=x_1x_2$ となるので,

$$c_1^{(2)}(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2.$$

例. $p=q=2$, $n=3$ のとき. ([1], p.105 参照)

$$
\begin{aligned}
c_2^{(3)}(x_1,x_2,x_3)\ &= x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2+x_1^2x_2x_3+x_2^2x_3x_1+x_3^2x_1x_2,\\
c_1^{(3)}(x_1,x_2,x_3)\ &= x_1^4x_2x_3+x_1x_2^4x_3+x_1x_2x_3^4+x_1^2x_2^2x_3^2\\
&\quad +x_1^4x_2^2+x_1^2x_2^4+x_1^4x_3^2+x_1^2x_3^4+x_2^4x_3^2+x_2^2x_3^4,\\
c_0^{(3)}(x_1,x_2,x_3)\ &= x_1^4x_2^2x_3+x_1^4x_2x_3^2+x_1^2x_2^4x_3+x_1^2x_2x_3^4+x_1x_2^4x_3^2+x_1x_2^2x_3^4.
\end{aligned}
$$

一般に, $c_m^{(n)}$ は次数 $q^n - q^m$ の斉次多項式である. 特に, $p = q = 2$ のとき, $c_{n-1}^{(n)}$ は次数 2^{n-1} の斉次多項式である. Dickson invariants は, $GL_n(q)$ の不変式であることが知られている. 即ち, 次が成り立つ. ([1] の Theorem 8.1.1 参照.)

定理. $GL_n(q)$ の $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ への自然な作用を考える. このとき, この作用による不変式環 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{GL_n(q)}$ は, 次のようになる.

$$k[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{GL_n(q)} = k[c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, \cdots, c_{n-1}^{(n)}]$$

前節の例は, Dickson invariant を用いて記述できる. このことは, 一般に成り立つのではないかと予想される.

予想. $\lambda = (2^s + 1, 2^s)$, E を S_n の位数 2^{s+1} である regular elementary abelian 2-subgroup とする. このとき,

$$V_E(D^\lambda) = \{\ (a_1, a_2, \cdots, a_s, a_{s+1}) \in k^{s+1} \mid c_s^{(s+1)}(a_1, a_2, \cdots, a_s, a_{s+1}) = 0\ \}.$$

注意. (1) E の正規化群の構造を見ることにより, $V_E(D^\lambda)$ が, $GL_{s+1}(2)$ の不変式で記述できることは示せる.

(2) $(1, 0, \cdots, 0) \in k^{s+1}$ が $V_E(D^\lambda)$ に含まれないことも容易に示せる.

(3) 予想が正しければ, $\dim V_E(D^\lambda) = s$.

最後に, 予想が正しいと仮定して $c(D^{(m+1,m)})$ を求める.

一般に, E を S_n の極大 elementary abelian 2-subgroup とする. このとき, $\{1, 2, \cdots, n\}$ の E-orbits 分解を $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_t$, Ω_j の要素の数を 2^{m_j} とすると, E は,

$$E_{m_1} \times E_{m_2} \times \cdots \times E_{m_t},$$

但し, E_{m_j} は, 位数 2^{m_j} の regular elementary abelian 2-subgroup, に S_n-共役である. 前節で与えた $D^{(m+1,m)}$ の基を用いると例 2 のように,

$$\begin{aligned} D^{(m+1,m)} \downarrow_E &\cong D^{(m+1,m)} \downarrow_{E_{m_1} \times \cdots \times E_{m_t}} \\ &\cong D^{(2^{m_1-1}+1, 2^{m_1-1})} \downarrow_{E_{m_1}} \otimes_k \cdots \otimes_k D^{(2^{m_t-1}+1, 2^{m_t-1})} \downarrow_{E_{m_t}}, \end{aligned}$$

を得る. 但し, $m_j = 0$ のときは, $(2^{m_j-1} + 1, 2^{m_j-1}) = (1)$ とする. これから,

$$V_E(D^{(m+1,m)}) \cong V_{E_{m_1}}(D^{(2^{m_1-1}+1, 2^{m_1-1})}) \times \cdots \times V_{E_{m_t}}(D^{(2^{m_t-1}+1, 2^{m_t-1})})$$

が従うので, 上の注意 (3) から

$$\dim V_E(D^{(m+1,m)}) = m_1 + m_2 + \cdots + m_t - t$$

を得る. $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_t}$ であるから, n を固定したとき $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_t}$ を満たす m_1, m_2, $\cdots$, m_t の組で, $m_1 + m_2 + \cdots + m_t - t$ が最大となるものを求めることにより, 次が得られる.

定理 3. $\lambda = (m + 1, m)$, $n = 2m + 1$ とする. このとき, 予想が正しければ, $c(D^\lambda) = [n/4] = [m/2]$.

References

[1] D. Benson, Polynomial invariants of finite groups, London Math. Soc. Lecture Note Series **190** (1993), Cambridge Univ. Press.

[2] J. Carlson, Nodule varieties and cohomology rings of finite grops, Vorlesungen aus dem FB Mathematik der Uni. Essen, **13** (1985).

[3] K. Erdmann, Tensor products and dimensions of simple modules for symmetric groups, Manuscripta math. **88** (1995) 357–386.

[4] R. Gow, A. Kleshchev, Connection between the representations of the symmetric group and the symplectic group in characteristic 2, J. of Algebra, **221** (1999) 60–89.

[5] G. James, A. Kerber, The representation theory of the symmetric group, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **16** (1981), Addison-Wesley.

[6] A. Kleshchev, J. Sheth, On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups, J. of Algebra, **221** (1999) 705–722.

[7] T. Nagai, The rank variety of the spin module of a symmetric group over a field of characteristic 2, 大阪大学修士論文, (2002).

[8] H. Nagao, Y. Tsushima, "Representations of Finite Groups", Academic Press, New York, 1987.

[9] T. Narumoto, On the periodicity of simple modules of symmetric groups over a field of characteristic 2, 大阪大学修士論文, (2000).

[10] J. Sheth, Branching rules for two row partitions and applications to the inductive systems for symmetric groups, Comm. in Algebra, **27** (1999) 3303–3316.

[11] H. Temma, On the periodicity of simple modules of symmetric groups over a field of odd characteristic, 大阪大学修士論文, (2002).