数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 31-36

The Steenrod algebra and modular representations of finite general linear groups

亀子　正喜 (Masaki Kameko)

富山国際大学 (Toyama University of International Studies)

1 Introduction

elementary abelian 2-group V_n の mod 2 cohomology は多項式環 $\mathbf{F}_2[X_1,\ldots,X_n]$ になる。これは空間の cohomology であるので、Steenrod square Sq^i が自然に作用し、 Steenrod algebra $\mathcal{A}$ 上の module とみなすことができる。この module の構造は Steenrod algebra の作用を記述するのは簡単であるという点では完全にわかっているのであるが、その生成元の極小な集合をもとめよという単純な問いに答えることはきわめて難しい。一方で、 V を $X_1,\ldots,$ X_n を basis とする $\mathbf{F}_2$ 上のベクトル空間とすると、多項式環 $\mathbf{F}_2[X_1,\ldots,X_n]$ は次数つきのベクトル空間として

$$S^*(V)=\bigoplus_{d\geq 0}S^d(V),\quad (S^d(V)=V^{\otimes d}/\Sigma_d)$$

と同一視できるので、 V への $GL(V)$ の自然な作用により、 $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module として構造が入る。この作用は上の Steenrod square の作用と可換である。この $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module 構造を同時に考えることにより上の問いについて考えてみようというのが今回の話の出発点である。

任意の simple $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module M にたいして、ある d が存在して、 $S^d(V)$ は M を composition factor として含む。この意味で、 $S^d(V)$ は simple $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module を考えるうえで興味深いものであるが、与えられた simple $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module にたいしてどのようにこの d を見つければよいかはわかっていない。simple $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module については、その分類が終わっている（全部で 2^{n-1} 個あることがわかっている）という意味ではわれわれはそれを理解しているということもできる。また simple $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module の構成方法についても Weyl module を用いた方法などがある。しか

し simple $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module の次元などの基本的な不変量についてすらわかっていないという意味ではわれわれの simple $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module についての理解は不十分である。これらの simple $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module の次元について上の Steenrod algebra 上の module としての生成元の話と関係があるかもしれないということを示唆するのが今回の話の目標である。

2 The Steenrod algebra and $QS^d(V)$

まず、 Steenrod algebra について復習する。 Steenrod algebra は $\mathbf{F}_2$ 上の graded algebra で $Sq^1, Sq^2, Sq^3, \ldots$ で生成される。ただし、つぎの関係式 (Adem relation) が成り立つ。

$$Sq^a Sq^b = \sum_{0\leq c\leq a/2} \binom{b-1-c}{a-2c} Sq^{a+b-c} Sq^c$$

ただし、 $Sq^0 = 1$ とする。このように定義することもできるが、じつはつぎの Steenrod square の多項式環への作用の式から上の関係式は導かれる。

$$\begin{cases} Sq^a X_i = X_i^2 & \text{if } a = 1 \\ Sq^a X_i = 0 & \text{if } a > 1 \end{cases}$$

$$Sq^a(xy) = \sum_{a'+a''=a} (Sq^{a'}x)(Sq^{a''}y)$$

ここでは Milnor [6] による Steenrod algebra の定義についても紹介しておく。$\mathcal{A}_* = \mathbf{F}_2[\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots,]/(\xi_0 - 1)$ とおく。ここで $\deg \xi_i = 2^i - 1$ とする。ここで coproduct ψ を

$$\psi\xi_i = \sum_{k=0}^{i} \xi_{i-k}^{2^k} \otimes \xi_k$$

と定義すると $\mathcal{A}_*$ は Hopf algebra になり、この双対を

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{A}^d$$

($\mathcal{A}^d = \mathrm{H}om(\mathcal{A}_d, \mathbf{F}_2)$) として、Steenrod algebra を定義できる。ここで $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ にたいして monomial ξ_I を $\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\cdots\xi_r^{i_r}$ とかく。この monomial basis $\{\xi_I\}$ に関しての ξ_I の dual を ξ_I^* とかくことにすると、 ξ_I^* の多項式環 $\mathbf{F}_2[X_1,\ldots,X_n]$ への作用は

$$\begin{cases} \xi_I^* X_i = X_i^{2^j} & I=(0,\cdots,0,1)\ (j\ \text{番目の数字だけ}\ 1)\ \text{の場合} \\ \xi_I^* X_i = 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

と

$$\xi_I^* xy = \sum_{I'+I''=I} (\xi_{I'}^* x)(\xi_{I''}^* y)$$

で与えられる。この作用の仕方から、 $I=(i_1,\ldots,i_r)$ のとき、ξ_I^* の excess を $i_1+\cdots+i_r$ と定義すると、 ξ_I^* の excess が $x\in S^d(V)$ の次数 d より大きければ $\xi_I^* x=0$ となるなどのことがすぐいえて便利である。

さて、ここで、Steenrod algebra の次数が正の元による像全体を $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ とかくことにし、

$$QS^d(V) = S^d(V)/(\mathrm{Im}\,\mathcal{A}\cap S^d(V))$$

と定義する。このベクトル空間の basis は $S^*(V)$ の $\mathcal{A}$ 上の module としての極小な生成元の集合と一致する。また、Steenrod algebra の作用と $GL(V)$ の作用は可換なので $QS^d(V)$ には自然に $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module の構造がはいる。

Probelm 2.1 $QS^d(V)$ の次元を求めよ。また、$QS^d(V)$ の $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-*module* としての構造を調べよ。

この問題に対する解答は $\dim V\le 3$ の場合には与えられている。([1], [2], [5]) また、 $\dim V=4$ の場合の $\dim QS^d(V)$ は計算できている。

さらに、 simple $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module に関してはつぎの命題が知られている。

Proposition 2.2 M を *simple* $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-*module* とする。M を *composition factor* として含む $S^d(V)$ で d が最小のものを考える。このとき、$QS^d(V)$ も M を *composition factor* として含む。

ここで $\alpha(m)$ を m の 2 進展開における 1 の個数とする。上の $QS^d(V)$ に関してつぎの定理が成り立つ。

Theorem 2.3 (Wood [7]) $\alpha(d+n)>n$ ならば $\dim QS^d(V)=0$.

Theorem 2.4 (Kameko [5]) $\alpha(d+n)=n$ ならば $QS^d(V)$ と $QS^{2d+n}(V)$ は $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-*module* として同型である。

Theorem 2.5 **(Crabb, Hubbuck [4])** $d = (2^{i_1}-1)+(2^{i_2}-1)+\cdots+(2^{i_n}-1)$ で、 $i_1 - i_2 \geq 2, \ldots, i_{n-1} - i_n \geq n$ ならば、$\dim QS^d(V) = \prod_{i=1}^{n}(2^i - 1)$ である。

Theorem 2.6 **(Carlisle, Wood [3])** V の次元にのみ依存する数 $\delta(V)$ があって、

$$\sup_{d\geq 0} \dim QS^d(V) < \delta(V)$$

が成り立つ。

3 Weight Vectors and $E_wQS^d(V)$

monomial $x = X_1^{e_1}\cdots X_n^{e_n}$ にたいして指数 e_i の 2 進展開

$$e_i = a_{i,0} + a_{i,1}2 + a_{i,2}2^2 + \cdots$$

をとり、

$$w_j(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

とおき、$w(x) = (w_0(x), w_1(x), w_2(x), \ldots)$ とする。この $w(x)$ は weight vector と呼ばれている。この weight vector には左からの辞書式順序を入れる。この $w(x)$ を用いて $QS^d(V)$ に filtration をいれる。

Proposition 3.1 *$g \in GL(V)$ と monomial x に対し、 $gx = \sum c_\alpha x_\alpha$ $c_\alpha \in \mathbf{F}_2^\times$, x_α は monomial とする。このとき、 $w(x_\alpha) \leq w(x)$.*

$w = (w_0, w_1, \ldots)$ に対して $F_wS^d(V)$ を $w(x) \leq w$ となる monomial x 全体で生成される $S^d(V)$ の部分空間、$F'_wS^d(V)$ を $w(x) < w$ となる monomial x 全体で生成される $S^d(V)$ の部分空間とし、$F_wQS^d(V)$, $F'_wQS^d(V)$ で $F_wS^d(V)$, $F'_wS^d(V)$ の $S^d(V)$ から $QS^d(V)$ への射影による像をあらわし、

$$E_wQS^d(V) = F_wQS^d(V)/F'_wQS^d(V)$$

とおく。ベクトル空間としては

$$QS^d(V) = \bigoplus_w E_wQS^d(V)$$

が成り立つ。また、上の命題より、$F_wQS^d(V)$, $E_wQS^d(V)$ は自然に $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module になる。

実際には多くの w に対して $E_wQS^d(V)$ は自明である。たとえば Theorem 2.5 の場合、非自明な w はただひとつで

$$QS^d(V) = E_{(n,\ldots,n,n-1,\ldots,n-1,\ldots,2,1,\ldots,1)}QS^d(V)$$

である。ここで w は単調減少列で $n, n-1, \ldots, 1$ はそれぞれ i_n, $i_{n-1} - i_n$, $\ldots$, $i_1 - i_2$ 個含まれている。

Proposition 3.2 *M を simple $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-module とする。 M を composition factor として含む $S^d(V)$ のなかで、 d が最小になるものを考える。このとき、ある $w = (w_0, w_1, \ldots)$ で $n > w_0 \geq w_1 \geq \cdots$ となるものがあって、$E_wQS^d(V)$ も M を composition factor として含む。*

いくつかの計算例と問いをあげてこの話を締めくくる。

Example 3.3 $n = 2$ の場合、$E_wQS^d(V)$ は $w = (2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1)$ 以外は 0 であり、1 の長さが 0 のときは 1 , 1 のときは 2, 2 以上のときは 3 になる。これ以外の w にたいしては $E_wQS^d(V) = \{0\}$ である。

Example 3.4 $n = 3$ の場合、$w_0 \geq w_1 \geq w_2 \geq \cdots$ でない w に対しては $E_wQS^d(V) = \{0\}$ である。さらに、$E_\phi QS^0(V)$, $E_{(1)}QS^1(V)$, $E_{(2)}QS^2(V)$, $E_{(2,1)}QS^4(V)$ の次元は 1, 3, 3, 8 で互いに同型でない *simple* $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-*module* である。

Example 3.5 $n = 4$ の場合、$\dim E_{(1,3)}QS^7(V) = 1$, $\dim E_{(2,3)}QS^8(V) = \dim E_{(2,3,2)}QS^{16}(V) = 4$ である。また、$E_\phi QS^0(V)$, $E_{(1)}QS^1(V)$, $E_{(2)}QS^2(V)$, $E_{(3)}QS^3(V)$, $E_{(2,1)}QS^4(V)$, $E_{(3,1)}QS^5(V)$, $E_{(3,2)}QS^7(V)$, $E_{(3,2,1)}QS^{11}(V)$ の次元は 1, 4, 6, 4, 20, 15, 20, 64 で互いに同型でない *simple* $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-*module* である。

Probelm 3.6 $E_wQS^d(V)$ は $w = (w_0, w_1, \ldots)$ が $n > w_0 > w_1 > \ldots$ のとき、互いに同型でない *simple* $\mathbf{F}_2[GL(V)]$-*module* か?

References

[1] Mohamed Ali Alghamdi, M. C. Crabb and J. R. Hubbuck, Representations of the homology of BV and the Steenrod algebra. I, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **176** (1992), 217–234.

[2] J. M. Boardman, Modular representations on the homology of powers of real projective space, Amer. Math. Soc. Contemp. Math. **146** (1993), 49–70.

[3] D. P. Carlisle and R. M. W. Wood, The boundedness conjecture for the action of the Steenrod algebra on polynomials, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **176** (1992), 203–216.

[4] M. C. Crabb and J. R. Hubbuck, Representations of the homology of BV and the Steenrod algebra. II, Basel: Birkhauser. Prog. Math. **136** (1996), 143-154.

[5] M. Kameko, Generators of the cohomology of BV_3, J. Math. Kyoto Univ. **38** (1998), 587–593.

[6] J. Milnor, The Steenrod algebra and its dual, Ann. of Math. **67** (1958), 150–171.

[7] R. M. W. Wood, Steenrod squares of polynomials and the Peterson conjecture, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. **105** (1989), 307–309.