

可能性情報下のクールノー複占市場の分析

香川大学経済学部 郭 沛俊 (Peijun Guo)
Faculty of Economics, Kagawa University

企業 1、2 はある同質的な財をそれぞれ q_1, q_2 産出し、財の価格は

$$P = a - b(q_1 + q_2) \quad (P > 0) \tag{1}$$

とする。

$a > 0$ と $b > 0$ はともに需要パラメータであるが、以下では b を定数、 a を可能性変数として取扱う。

a の可能性分布

$$\pi_A : [a_l, a_r] \rightarrow [0, 1] \tag{2}$$

は連続関数で、ある $a_c \in [a_l, a_r]$ が存在し、 $\pi_A(a_c) = 1$ 、 $\pi_A(a_l) = 0$ 、 $\pi_A(a_r) = 0$ 、 $[a_l, a_c]$ で増加関数、 $[a_c, a_r]$ で減少関数とする。

各企業 $i (i = 1, 2)$ の利潤 w_i は、次のようになる (簡単のため、各企業の生産費用を 0 とする)。

$$w_i(a, q_i, q_j) = aq_i - bq_i^2 - bq_iq_j, i \neq j \tag{3}$$

(3) を q_i で微分すると

$$dw_i / dq_i = a - 2bq_i - bq_j, i \neq j \tag{4}$$

企業 j の産出量は q_j であるとき、企業 i の最適産出量 q_i^* は

$$q_i^* = (a - bq_j) / 2b \tag{5}$$

となつて、

企業 i の最大利潤は

$$w_i^*(a, q_j) = aq_i^* - bq_i^{*2} - bq_i^*q_j = \frac{(a - bq_j)^2}{4b} \tag{6}$$

となる。

したがって、ある $a > 0$ によって、企業 $i (i = 1, 2)$ の最小利潤は 0、最大利潤は $\frac{a^2}{4b}$ ($a \geq bq_i \geq 0$ ので)。 a

の値の範囲を考えると、企業 $i (i = 1, 2)$ の利潤の可能の範囲は $[0, \frac{a_r^2}{4b}]$ となる。

定義 1.

効用関数 $u : [0, \frac{a_r^2}{4b}] \rightarrow [0, 1]$ は連続単調増加関数で、以下の条件を満たす

$$(1) u(0) = 0 \tag{7}$$

$$(2) u(\frac{a_r^2}{4b}) = 1 \tag{8}$$

企業 j の産出量を q_j とするとき、企業 i の産出量 q_i の楽観的な価値 $V_{io}(q_i, q_j)$ は以下のように定義する。

$$V_{io}(q_i, q_j) = \max_a (\min(\pi_A(a), u(w_i(q_i, q_j, a)))) \quad (\text{リスク好み}) \quad (9)$$

定義 3.

企業 j の生産量を q_j とするとき、企業 i の産出量 q_i の悲観的な価値 $V_{ip}(q_i, q_j)$ は以下のように定義する。

$$V_{ip}(q_i, q_j) = \min_a (\max(1 - \pi_A(a), u(w_i(q_i, q_j, a)))) \quad (\text{リスク回避}) \quad (10)$$

企業が楽観的な価値と悲観的な価値に基づく、以下の行動を採るべきである。

(I)

企業 j の産出量 q_j を予想して、企業 i は自分の楽観的な価値 $V_{io}(q_i, q_j)$ を最大化するように産出量 q_i を決める。すなわち、企業 i の楽観的な反応関数は

$$q_i = \arg \max_{q_i} V_{io}(q_i, q_j) = g_{io}(q_j) \quad (11)$$

(II)

企業 j の産出量 q_j を予想して、企業 i は自分の悲観的な価値 $V_{ip}(q_i, q_j)$ を最大化するように産出量 q_i を決める。すなわち、企業 i の悲観的な反応関数は

$$q_i = \arg \max_{q_i} V_{ip}(q_i, q_j) = g_{ip}(q_j) \quad (12)$$

定義 4. 方程式

$$\begin{cases} q_1 = g_{1o}(q_2) \\ q_2 = g_{2o}(q_1) \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} q_1 = g_{1p}(q_2) \\ q_2 = g_{2p}(q_1) \end{cases} \quad (14)$$

の解 (q_{1o}^*, q_{2o}^*) と (q_{1p}^*, q_{2p}^*) はそれぞれ楽観的なナッシュ均衡解と悲観的なナッシュ均衡解と呼ぶ。

命題 1. 楽観的なナッシュ均衡解 (q_{1o}^*, q_{2o}^*) は以下の方程式の解となる。

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\hat{a}_{1o}(q_2) - bq_2}{2b} \\ q_2 = \frac{\hat{a}_{2o}(q_1) - bq_1}{2b} \end{cases} \quad (15)$$

ここで $\hat{a}_{io}(q_j)$ は $\pi_A(a)$ と $u(w_i(a, q_i^*(q_j), q_j))$ の右側の交点の横座標となる。 $\hat{a}_{io}(q_{jo}^*)$ は企業 i が楽観的な観点から最も考えるべき需要となり、楽観的フォーカス・ポイントと呼ぶ。

証明.

(a) $u(w_i(a, q_i, q_j))$ は a に関して連続単調増加関数である

(b) $\pi_A(a)$ は $[a_c, a_r]$ で連続減少関数で、 $\pi_A(a_c) = 1$ 、 $\pi_A(a_r) = 0$ である

(a), (b)より、以下の(c) (d)が成立つ。

(c) $u(w_i(a, q_i, q_j)) = \pi(a)$ を満たす $a \in [a_c, a_r]$ が必ず唯一に存在すること

(d) $a^* = \arg \max_a (\min(\pi_A(a), u(w_i(q_i, q_j, a))))$ は $\pi_A(a)$ と $u(w_i(a, q_i, q_j))$ の右側の交点の横座標となる。

(e) $\max_{q_i} \max_a (\min(\pi_A(a), u(w_i(q_i, q_j, a)))) = \max_a (\min(\pi_A(a), \max_{q_i} u(w_i(q_i, q_j, a))))$

(f) $\max_{q_i} u(w_i(q_i, q_j, a))$ の最適解は $q_i = (a - bq_j) / 2b$ である。

(c), (d), (e), (f)から (15) が成立つことがわかる。

系 1. $\hat{a}_{1o} = \hat{a}_{2o}$ 、 $q_{1o}^* = q_{2o}^*$

命題 2. 悲観的なナッシュ均衡解 (q_{1p}^*, q_{2p}^*) は以下の方程式の解となる。

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\hat{a}_{1p}(q_2) - bq_2}{2b} \\ q_2 = \frac{\hat{a}_{2p}(q_1) - bq_1}{2b} \end{cases} \quad (16)$$

ここで $\hat{a}_{ip}(q_j)$ は $1 - \pi_A(a)$ と $u(w_i(a, q_i^*, q_j))$ の左側の交点の横座標となる。 $\hat{a}_{ip}(q_{ip}^*)$ は企業 i が悲観的な観点から最も考えるべき需要となり、悲観的フォーカス・ポイントと呼ぶ。

証明.

(a) $u(w_i(a, q_i, q_j))$ は a に関して連続単調増加関数である

(b) $1 - \pi_A(a)$ は $[a_l, a_c]$ で連続減少関数で、 $1 - \pi_A(a_l) = 1$ 、 $1 - \pi_A(a_c) = 0$ である

(a), (b)より、以下の(c) (d)が成立つ。

(c) $u(w_i(a, q_i, q_j)) = 1 - \pi(a)$ を満たす $a \in [a_l, a_c]$ が必ず唯一に存在する

(d) $a^* = \arg \min_a (\max(1 - \pi_A(a), u(w_i(q_i, q_j, a))))$ は $1 - \pi_A(a)$ と $u(w_i(a, q_i, q_j))$ の左側の交点の横座標となる

る

(e) $\max_{q_i} \min_a (\max(1 - \pi_A(a), u(w_i(q_i, q_j, a)))) = \min_a (\max(1 - \pi_A(a), \max_{q_i} u(w_i(q_i, q_j, a))))$

(f) $\max_{q_i} u(w_i(q_i, q_j, a))$ の最適解は $q_i = (a - bq_j) / 2b$ である。

から (16) が成立つことがわかる。

系 2. $\hat{a}_{1p} = \hat{a}_{2p}$ 、 $q_{1p}^* = q_{2p}^*$

定理 1. 楽観的な均衡解 (q_{1o}^*, q_{2o}^*) と悲観的な均衡解 (q_{1p}^*, q_{2p}^*) は必ず唯一に存在する。

証明. $\hat{a}_{io}, \hat{a}_{ip} (i=1,2)$ が存在するので、 $\hat{a}_{io}, \hat{a}_{ip}$ はある実数と考えて、反応関数の連立方程式 (15)、(16) は一次方程式になる。その連立一次方程式の係数行列は正則行列なので、その解が唯一に存在する。

定理 2. $[q_{1o}^*, q_{2o}^*] > [q_{1p}^*, q_{2p}^*]$ が成立つ。

定義 5. 二つの可能性分布 $\pi_A, \pi_B(x)$ は与えられて、任意の x に対し、 $\pi_A(x) \geq \pi_B(x)$ が成立つならば、可能性分布 π_A は可能性分布 π_B より大きいと呼び、 $\pi_A \geq \pi_B(x)$ で表す。

$\pi_A \geq \pi_B(x)$ のことは、 π_A で表された情報は π_B で表された情報より不確実さが多いことを意味する。

定理 3. 可能性分布 π_A, π_B に基づき得られた楽観的な均衡解をそれぞれ $(q_{1o}^{a*}, q_{2o}^{a*})$ 、 $(q_{1o}^{b*}, q_{2o}^{b*})$ とし、悲観的な均衡解をそれぞれ $(q_{1p}^{a*}, q_{2p}^{a*})$ 、 $(q_{1p}^{b*}, q_{2p}^{b*})$ とする。 $\pi_A \geq \pi_B$ なら、 $[q_{1o}^{a*}, q_{2o}^{a*}] \geq [q_{1o}^{b*}, q_{2o}^{b*}]$ 、 $[q_{1p}^{a*}, q_{2p}^{a*}] \leq [q_{1p}^{b*}, q_{2p}^{b*}]$ が成立つ。

証明. 略

定理 2 により、以下のことが分かる。

不確実さが増えれば、増えるほど、楽観的な観点からより大胆な行動を採り易い、悲観的な観点からより慎重な行動を採り易い。

方程式(15)の解を求める方法

ステップ 1. 任意の $a \in [a_c, a_r]$ を選択し、 \hat{a}_{1o} を a とする。一次方程式(15)から (q_{1o}^*, q_{2o}^*) を求める。

ステップ 2. $\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1o}^*, q_{2o}^*))$ を計算し、 $|\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1o}^*, q_{2o}^*))| \leq \varepsilon$ なら、 $\hat{a}_{1o} = a$ 、停止する。

そうでなければ、ステップ 3. \sim

ステップ 3. $\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1o}^*, q_{2o}^*)) > 0$ なら、 $a = a + \Delta a (\Delta a > 0)$ 、 $\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1o}^*, q_{2o}^*)) < 0$ なら、 $a = a - \Delta a$ 。ステップ 2. \sim

方程式(16)の解を求める方法

ステップ 1. 任意の $a \in [a_1, a_c]$ を選択し、 \hat{a}_{1p} を a とする。一次方程式(16)から (q_{1p}^*, q_{2p}^*) を求める。

ステップ 2. $\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1p}^*, q_{2p}^*))$ を計算し、 $|\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1p}^*, q_{2p}^*))| \leq \varepsilon$ なら、停止する。 $\hat{a}_{1p} = a$ 。

そうでなければ、ステップ 3. \sim

ステップ 3. $\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1p}^*, q_{2p}^*)) > 0$ なら、 $a = a + \Delta a (\Delta a > 0)$ 、 $\pi_A(a) - u(w_i(a, q_{1p}^*, q_{2p}^*)) < 0$ なら、 $a = a - \Delta a$ 。ステップ 2. \sim

需要パラメータ a に関連する新たな情報 s が入ったとする。企業 1 は情報 s を利用せず、企業 2 は情報 s を利用する。この場合は企業 2 の産出量 q_2 は、厳密には利用する情報 s の関数となる。すなわち

$$q_2 = q_2(s)$$

企業 1, 2 の利潤はそれぞれ

$$w_1(a, q_1, q_2) = aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2(s) \quad (17)$$

$$w_2(a, q_1, q_2) = aq_2(s) - bq_2^2(s) - bq_1q_2(s) \quad (18)$$

s の可能性分布は $\pi_s(s)$ であるので、拡張原理によって $q_2(s)$ の可能性分布 $\pi_q(q_2)$ を計算することができる。

企業 1 にとって、企業 2 の生産量 $q_2(s)$ は可能性変数になるので、企業 1 は企業 2 の産出量 q_2 とその可能性を考量しつつ、自分の産出量を決めることである。

企業 1 の生産量 q_1 の楽観的な価値 $Z_{1o}(q_1, q_2)$ は以下のように定義する。

$$Z_{1o}(q_1, q_2) = \max_a(\min(\pi_A(a), \pi_Q(q_2) * u(w_1(q_1, q_2, a)))) \quad (19)$$

定義 7.

企業 1 の生産量 q_1 の悲観的な価値 $Z_{1p}(q_1, q_2)$ は以下のように定義する。

$$Z_{1p}(q_1, q_2) = \min_a(\max(1 - \pi_A(a), (1 - \pi_Q(q_2)) * u(w_1(q_1, q_2, a)))) \quad (20)$$

楽観的な価値と悲観的な価値に基づく、企業 1 が以下の行動を採るべきである。

(I)

企業 2 の産出量 q_2 とその可能性を予想して、企業 1 は自分の楽観的な価値 $Z_{1o}(q_1, q_2)$ を最大化するように産出量 q_1 を決める。すなわち、企業 1 の楽観的な反応関数は

$$q_1 = \arg \max_{q_1} Z_{1o}(q_1, q_2) = h_{1o}(q_2) \quad (21)$$

(II)

企業 2 の産出量 q_2 とその可能性を予想して、企業 1 は自分の悲観的な価値 $Z_{1p}(q_1, q_2)$ を最大化するように産出量 q_1 を決める。すなわち、企業 1 の悲観的な反応関数は

$$q_1 = \arg \max_{q_1} Z_{1p}(q_1, q_2) = h_{1p}(q_2) \quad (22)$$

企業 2 は情報 s を利用し、 a の条件付可能性分布 $\pi_{A|s}(a)$ (s なら、 a の可能性分布は $\pi_{A|s}(a)$) に基づいて、企業 1 の産出量 q_1 を予想し、自分の産出量を決めることである。簡単のため、 $\pi_{A|s}(a): [a_l, a_r] \rightarrow [0, 1]$ は連続関数で、 $\pi_{A|s}(a_c) = 1$ 、 $\pi_{A|s}(a_l) = 0$ 、 $\pi_{A|s}(a_r) = 0$ ($a_l \leq a_l' < a_c' < a_r' \leq a_r$)、 $[a_l, a_c']$ で増加関数、 $[a_c', a_r]$ で減少関数とする。

定義 8.

企業 2 の生産量 q_2 の楽観的な価値 $Z_{2o}(q_1, q_2)$ は以下のように定義する。

$$Z_{2o}(q_1, q_2) = \max_a(\min(\pi_{A|s}(a), u(w_2(q_1, q_2, a)))) \quad (23)$$

定義 9.

企業 2 の生産量 q_2 の悲観的な価値 $Z_{2p}(q_1, q_2)$ は以下のように定義する。

$$Z_{2p}(q_1, q_2) = \min_a(\max(1 - \pi_{A|s}(a), u(w_2(q_1, q_2, a)))) \quad (24)$$

楽観的な価値と悲観的な価値に基づく、企業 2 が以下の行動を採るべきである。

(I)

企業 1 の産出量 q_1 を予想して、企業 2 は自分の楽観的な価値 $Z_{2o}(q_1, q_2)$ を最大化するように産出量 q_2 を決める。すなわち、企業 2 の楽観的な反応関数は

$$q_2 = \arg \max_{q_2} Z_{2o}(q_1, q_2) = k_{2o}(q_1) \quad (25)$$

企業1の産出量 q_1 を予想し、企業2は自分の悲観的な価値 $Z_{2p}(q_1, q_2)$ を最大化するように産出量 q_2 を決める。すなわち、企業2の悲観的な反応関数は

$$q_2 = \arg \max_{q_2} Z_{2p}(q_1, q_2) = k_{2p}(q_1) \quad (26)$$

となる。

定義10. 方程式

$$\begin{cases} q_1 = h_{1o}(q_2) \\ q_2 = k_{2o}(q_1) \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} q_1 = h_{1p}(q_2) \\ q_2 = k_{2p}(q_1) \end{cases} \quad (28)$$

の解 (q_{1o}^*, q_{2o}^*) と (q_{1p}^*, q_{2p}^*) はそれぞれ情報 s に関する楽観的なナッシュ均衡解と悲観的なナッシュ均衡解と呼ぶ。

命題3. 楽観的なナッシュ均衡解 (q_{1o}^*, q_{2o}^*) は以下の方程式の解となる。

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\hat{a}_{1o}(q_2) - bq_2}{2b} \\ q_2 = \frac{\hat{a}_{2o}(q_1) - bq_1}{2b} \end{cases} \quad (29)$$

ここで $\hat{a}_{1o}(q_2)$ は $\pi_A(a)$ と $\pi_Q(q_2) * u(w_1(a, q_1^*, q_2))$ の右側の交点の横座標となる。 $\hat{a}_{1o}(q_2^*)$ は企業1が楽観的な観点から考えるべき需要であり、企業1の楽観的フォーカス・ポイントと呼ぶ。 $\hat{a}_{2o}(q_1)$ は $\pi_{Afs}(a)$ と $u(w_2(a, q_1, q_2^*))$ の右側の交点の横座標となる。 $\hat{a}_{2o}(q_1^*)$ は企業2が楽観的な観点から考えるべき需要であり、楽観的フォーカス・ポイントと呼ぶ。

証明. 略

命題4. 悲観的なナッシュ均衡解 (q_{1p}^*, q_{2p}^*) は以下の方程式の解となる。

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\hat{a}_{1p}(q_2) - bq_2}{2b} \\ q_2 = \frac{\hat{a}_{2p}(q_1) - bq_1}{2b} \end{cases} \quad (30)$$

ここで $\hat{a}_{1p}(q_2)$ は $1 - \pi_A(a)$ と $(1 - \pi_Q(q_2)) * u(w_1(a, q_1^*, q_2))$ の左側の交点の横座標となる。 $\hat{a}_{1p}(q_{2p}^*)$ は企業1が悲観的な観点から考えるべき需要であり、企業1の悲観的フォーカス・ポイントと呼ぶ。 $\hat{a}_{2p}(q_1)$ は $1 - \pi_{Afs}(a)$ と $u(w_2(a, q_1, q_2^*))$ の左側の交点の横座標となる。 $\hat{a}_{2p}(q_{1p}^*)$ は企業2が悲観的な観点から考えるべき需要であり、悲観的フォーカス・ポイントと呼ぶ。

定理 4. (27) の楽観的な均衡解 (q_{1o}^*, q_{2o}^*) と (28) の悲観的な均衡解 (q_{1p}^*, q_{2p}^*) は必ず唯一に存在する。

命題 5. 各企業の均衡利潤の可能性分布 $\pi_w(w)$ は以下のようになる。

$$\pi_w(w) = \pi_A \left(\frac{w + bq_i^{*2} + bq_i^* q_j^*}{q_i^*} \right) \quad (31)$$

ここで、 (q_1^*, q_2^*) は企業 1、2 の均衡産出量。

証明. 拡張原理と $w_i(a, q_i, q_j) = aq_i - bq_i^2 - bq_i q_j, i \neq j$ から明らかにする。

参考文献

1. Dubois, D. and Prade, H., Possibility Theory, Plenum Press, New York, 1988.
2. Guo, P. and Chen, F., The possibilistic approach to the newsboy problem, The First International Conference on Electronic Business, Dec. 19-21, 2001, Hong Kong (Accepted).
3. Kreps, D., A Course in Microeconomic Theory, Princeton University Press, New Jersey, 1990.
4. Tanaka, H. and Guo, P., Possibilistic Data Analysis for Operations Research (Heidelberg; New York; Physica-Verlag, Feb., 1999).
5. Zadeh, L. A., Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 3-28
6. 有定 愛展 ゲームと情報の経済理論、勁草書房、2000年3月。