

# 不完全情報の下での資産選択モデル

南山大学 数理情報学部 数理科学科

澤木 勝茂 (Katsushige SAWAKI)

Faculty of Mathematical Sciences and Information Engineering

Department of Mathematical Sciences

Nanzan University

## 1. はじめに

ファイナンス理論の下で研究されてきたポートフォリオ選択問題では、取引される証券（資産）の価格は時々刻々に変化する情報を織込んで市場において形成される。完全で効率的な資産市場を前提とするポートフォリオ理論では、取引される証券の価格は常にスポット市場で観察可能である。しかし、すべての有価証券や資産がそのような公開の市場で何時でもその価格を知ることが出来、その価格で売買される訳ではない。特に、実物資産や流動性の低い有価証券は、相対取引が主流であることが希でない。また、リアル・オプションのように完全かつ効率的な公開市場で取引されない資産も数多く存在する。

本論文では、上述のような資産価格について完全な情報が利用できない資産の選択問題を考察する。すなわち、資産価格の真の価格を直接に知ることは出来ないが、真の資産価格と確率的な関係（依存）を有する価格情報が利用可能な場合の資産選択問題を制御理論の枠組の下で分析する。金融経済学の想定する公開市場は存在しないが、過去に取引されたデータや相対取引による個別に提示された価格は利用可能であるような資産取引の下での資産選択問題は、この枠組によって考察できることになる。

## 2. 資産価格と資産配分の問題

取引時刻を  $t$  とし取引期間を有界閉区間  $[0, T]$  で表す。  $t \in [0, T]$ 。資産市場では  $n$  種類の危険資産と 1 種類の無危険資産が取引され、時刻  $t$  でのそれぞれの価格を  $X_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ , 及び  $X_0(t)$  とする。無危険資産の価格  $X_0(t)$  は、常微分方程式

$$dX_0(t) = X_0(t)r(t)dt \tag{1}$$

で与えられる。すなわち、

$$X_0(t) = e^{\int_0^t r(s)ds} \tag{1}'$$

ただし、  $X_0(0) = 1$  とする。

確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  で定義し、この確率空間の上で 2 つのウィナー過程  $\{Z_1(t), t \geq 0\}$  と  $\{Z_2(t), t \geq 0\}$  を考える。  $Z_1(\cdot)$  と  $Z_2(\cdot)$  によって生成される増加  $\sigma$ -subfield を  $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_1(s), Z_2(s); 0 \leq s \leq t)$  とする。危険資産  $i$  の価格について 2 つの確率過程を想定し、それぞれ  $X_i(t)$  及び  $Y_i(t)$  とし確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{P}; t \geq 0)$  の上で定義する。  $i = 1, 2, \dots, n$ . 危険資産の価格  $X_i(t)$  は確率微分方程式

$$dX_i(t) = X_i(t)[\mu_i(t)dt + \sigma_i(t)dZ_1(t)] \quad , i = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

によって与えられるが、投資家は各時刻でこの資産価格  $X_i(t)$  を直接に観測することは不可能であると仮定する。しかし、投資家は、  $X_i(t)$  を直接に観測することができない代わりに、  $X_i(t)$  と確率的な関係を有する確率過程  $Y_i(t)$  を観測することが可能である。  $Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_n(t))$  とし、投資家は各時刻で  $Y(t)$  が生成する情報構造  $\mathcal{Y}_t = \sigma(Y(s); 0 \leq s \leq t)$  に従って資産配分に関する意思決定を行なう。すなわち、  $t$  までに観測可能な  $Y(t)$  の標本パスによって生成される  $\sigma$ -subfield に依拠し

て資産選択に関する決定を行なうのである。危険資産の真の価格  $X_i(t)$  についての完全情報を得ることができないので、投資家は  $X_i(t)$  と確率的な依存関係を有する観測可能な確率変数  $Y_i(t)$  を観測する。各  $Y_i(t)$  のダイナミクスは次の確率微分方程式で与えられるものとする。

$$\frac{dY_i(t)}{Y_i(t)} = a_i(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} + b_i(t) dZ_2(t) \quad , i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

投資家は、情報構造によって与えられる  $Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_n(t))$  についての過去及び現在の全てのデータを有している。時刻  $t$  での資産  $i$  への投資額を  $\pi_i(t)$  とすれば、 $\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_n(t))$  は時刻  $t$  での資産配分（ポートフォリオ）である。 $W(t)$  を時刻  $t$  での投資家の富とし、 $W(0) = w$  は所与とする。 $\pi_0(t)$  を無危険資産への投資額とすれば、 $\pi_0(t) = W(t) - \sum_{i=1}^n \pi_i(t)$  である。 $C(t)$  を  $t$  までの累積消費量とし  $t$  の増加関数である。もし、 $X_i(t)$  が観測可能ならば、投資家の富の変動は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} dW(t) &= \sum_{i=1}^n \pi_i(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} + (W(t) - \sum_{i=1}^n \pi_i(t)) \frac{dX_0(t)}{X_0(t)} - dC(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \pi_i(t) [(\mu_i(t) - r(t))dt + \sigma_i(t) dZ_1(t)] + W(t)r(t)dt - dC \end{aligned} \quad (4)$$

投資家が観測できる危険資産のシグナル（データ） $Y_i(t)$  に従うならば、投資家の富の変動は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} d\hat{W}(t) &= \sum_{i=1}^n \pi_i(t) \frac{dY_i(t)}{Y_i(t)} + (\hat{W}(t) - \sum_{i=1}^n \pi_i(t)) \frac{dX_0(t)}{X_0(t)} - dC(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \pi_i(t) [a_i(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} + b_i dZ_2(t)] + (\hat{W}(t)r(t)dt - \sum_i \pi_i(t)r(t)dt) - dC(t) \\ &\equiv r(t)\hat{W}(t)dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t) [(A_i(t) - r(t))dt + \sigma_i dZ_1(t) + b_i dZ_2(t)] - dC(t) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $A_i(t) = a_i(t)\mu_i(t)$  である。ここで  $\mu_i(t) - r(t)/\sigma_i \equiv \alpha_i(t)$  とおく。 $i = 1, 2, \dots, n$ . 確率測度  $\mathcal{P}$  に対して「ラドン・ニコディムの定理」から得られる  $(\Omega, \mathcal{F})$  の下での確率測度  $\mathcal{P}^0$  を

$$\frac{d\mathcal{P}^0(w)}{d\mathcal{P}(w)} = \exp\left\{-\int_0^T \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) dZ_1(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n \alpha_i^2(t) dt\right\} \quad (6)$$

とすれば、「ギルサノフの定理」によって  $\mathcal{P}^0$  もまた確率測度となり、確率過程  $\{Z_1^0(t), t \geq 0\} = \{Z_1^0(t) = Z_1(t) - \int_0^t \sum_{i=1}^n \alpha_i(s) ds; 0 \leq t \leq T\}$  は新しい確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}^0; \mathcal{F}_t)$  のうえでウィナー過程となる。

富のダイナミクス (4) の下での資産配分と消費の選択問題は、期待効用

$$\mathbf{E}^0 \left[ \int_0^T u_1(t, C(t)) dt + u_2(W(T)) | W(0) = w \right] \quad (7)$$

を最大にする資産配分  $\{\pi(t); 0 \leq t \leq T\}$  と消費計画  $\{C(t); 0 \leq t \leq T\}$  を求めることである。すなわち、

$$V(w) = \sup_{(\pi, C)} \mathbf{E}^0 \left[ \int_0^T u_1(t, C(t)) dt + u_2(W(T)) | W(0) = w \right] \quad (8)$$

### 3. 推定と分離原理

この節では、直接に観測不可能な資産価格の推定の問題と (8) で定式化した最適制御問題を観測可能な状態変数の上で定式化する問題への変換を議論する。

$dZ_1^0(t) = dZ_1(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)dt$  とおけば、資産価格とシグナルの確率過程は、それぞれ

$$\begin{aligned} dX_i(t) &= X_i(t)[r(t)dt + \sigma_i(t)dZ_1^0(t)] \\ dY_i(t) &= Y_i(t)[a_i(t)\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} + b_i(t)dZ_2(t)] \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

時刻  $t$  までの観測値  $\mathcal{Y}(t) = \{Y(s) = (Y_1(s), \dots, Y_n(s)); 0 \leq s \leq t\}$  が所与の下で  $t$  での  $X_i(t)$  の最小 2 乗推定量を

$$\hat{X}_i(t) = \mathbf{E}^0[X_i(t)|\mathcal{F}(t)] \quad (10)$$

とする。このとき確率過程

$$v_i(t) = \frac{Y_i(t) - a_i(t)\hat{X}_i(t)dt}{b_i(t)} \quad (11)$$

を innovation 過程と呼び、確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}^0; \mathcal{Y}(t))$  の下でのウィナー過程である。

**定理 1** (Davis, M. H. A. and Varaiya, P. P. [6])

条件付分布関数  $\mathcal{P}^0\{X_i(t) \leq x | \mathcal{Y}(t)\}$  は正規分布であり、その平均と分散はそれぞれ次式で与えられる。平均  $\hat{X}_i(t) = \mathbf{E}^0(X_i(t)|\mathcal{Y}(t))$  は確率微分方程式

$$d\hat{X}_i(t) = r(t)\hat{X}_i(t)dt + \frac{a_i(t)\hat{\sigma}_i(t)}{b_i(t)\sigma_i(t)}dv_i(t) \quad (12)$$

の解であり、分散

$$\hat{\sigma}_i^2(t) = \mathbf{E}^0[(X_i(t) - \hat{X}_i(t))^2 | \mathcal{Y}(t)] \quad (13)$$

は Riccati 方程式

$$d\hat{\sigma}_i(t) = (2r(t)\hat{\sigma}_i(t) + \sigma_i(t) - a_i^2(t)\hat{\sigma}_i^2(t))dt \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}_i(0) = 0 \quad (15)$$

の解である。

[注] 上記の定理 1 において次の点に留意しよう。

(i) 最小 2 乗推定量の平均  $\hat{X}_i(t)$  は、分散  $\hat{\sigma}_i^2(t)$  に依存し、一方分散  $\hat{\sigma}_i^2(t)$  は平均のパラメータに依存する。また、分散は確定的なパラメータにのみ依存するが、平均は確率変数  $dv_i(t)$  に依存する。

(ii) 特に平均  $\hat{X}_i(t)$  は、 $\mathcal{Y}(t)$  から独立という意味で  $X_i(t)$  の推定値に対して十分統計量の役割を果たしている。

資産価格  $X_i(t)$  が幾何ブラウン運動するとき、富の確率過程に対して関数

$$f(w, t | w(\tau) = w_0) = \frac{1}{w\sqrt{2\pi(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{(\log w - w_0)^2}{(t-\tau)}\right\} \quad (16)$$

を定義する。

$$\hat{u}_1(t, C(t)) = \int_0^\infty f(w, t | W(0) = w_0) u_1(t, C(t)) dw \quad (17)$$

$$\hat{u}_2(W(T)) = \int_0^\infty f(w, T | W(0) = w_0) u_2(w(T)) dw \quad (18)$$

とおけば、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0 \left[ \int_0^T \mathbf{E}^0 [u_1(t, C(t)) | \mathcal{F}(t)] dt + \mathbf{E}^0 [u_2(W(T)) | \mathcal{F}(T)] \right] \\ = \mathbf{E}^0 \left[ \int_0^T \hat{u}_1(t, \hat{C}(t)) dt + \hat{u}_2(\hat{W}(T)) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

を得る。ここで、 $\hat{C}(t)$  と  $\hat{W}(T)$  は、危険資産価格の推定量  $\hat{X}_i(t)$  に対応する富の変動式 (5) における  $C(t)$  と  $W(T)$  の推定量である。従って、観測不可能な資産価格の下での最適化問題が観測可能な最適化問題に変換される。すなわち原問題は、資産価格の推定量を求める問題と推定値  $\hat{X}_i(t)$  に基づく最適化問題に分離されたことになる。これが、いわゆる Davis, M. H. A. and Varaiya, P. P. [6] の分離原理と呼ばれるものである。

#### 4. 最適な資産配分と消費の問題

$V(w, t)$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} V(w, t) = \sup_{\substack{C(\tau), \pi(\tau) \\ t \leq \tau \leq T}} \mathbf{E}^0 \left[ \int_t^T \hat{u}_1(\tau \hat{C}(\tau)) d\tau + u_2(\hat{W}(T)) | \hat{W}(t) = w \right] \end{aligned} \quad (20)$$

「伊藤の定理」と動的計画法の最適性の原理より次式を得る。

$$0 = \sup \{ \hat{u}_1(t, C(t)) + V_t + V_w \left[ \sum_{i=1}^n \pi_i(t) (A_i(t) - r(t)) + r(t)w - C(t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i(t) \pi_j(t) \rho \sigma_i b_j V_{ww} \} \quad (21)$$

ただし、 $\rho = \mathbf{E}[dZ_1(t) \cdot dZ_2(t)]$ 、 $V_w = \frac{\partial V}{\partial w}$ 、 $V_{ww} = \frac{\partial^2 V}{\partial w^2}$ 、である。最適性の1階の条件より、最適な消費と資産配分は次式を満足する。

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial C^*} = V_w \quad (22)$$

$$\begin{aligned} V_w (A_i(t) - r(t)) + \sum_{j=1}^n \pi_j^*(t) \rho \sigma_i b_j V_{ww} = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (23)$$

$V_w, V_{ww}$  を所与として ( ) を解けば、

$$\pi_i^*(t) = -\frac{V_w}{V_{ww}} \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^{-1}(t) (A_j(t) - r(t)) \quad (24)$$

を得る。ここで  $\sigma_{ij}^{-1}$  は共分散  $\rho \sigma_i b_j$  が作る分散共分散行列の逆行列の要素  $(i, j)$  である。無危険資産への最適な資産配分  $\pi_0^*$  は、

$$\pi_0^*(t) = \hat{W} - \sum_{i=1}^n \pi_i^*(t) = \hat{W} + \frac{V_w}{V_{ww}} \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1} (A_j(t) - r(t))$$

## 5. おわりに

本論文では、資産価格を引用することができる公開市場が存在しない場合の資産と消費の最適政策を考察する問題を取り扱っている。資産の真の価格が利用できないとき、取引データから得られる部分情報に基づき資産価格を推定する問題とその推定値に基づいて最適な資産配分と消費を決定する問題に分割する方法を提唱した。このようにして変換された最適制御問題においても従来のモデルと類似の結論が得られることを示した。

採用した接近法は連続時間の下での動的計画法であり、観測データに基づいて資産価格の最小2乗推定値が与えられるならば、通常の偏微分方程式を解く問題に帰結する。閉じた型の最適な資産配分と消費計画ならびに評価関数が求められるか否かは、効用関数の具体的な型に依存する。この点に関しても従来のポートフォリオ選択問題と同様の問題を抱えている。

本論文では、不完備市場でのポートフォリオ選択問題の1つの場合を提案し、それに対する接近法を試みた。不完備市場における裁定機会の無存在や資本市場が完備であるための条件などを考察する問題は、今後の興味深いテーマである。

## 参考文献

- [1] 木島正明：「ファイナンス工学入門Ⅰ・Ⅱ」，日科技連，1994.
- [2] 沢木勝茂：「ファイナンスの数理」朝倉書店，1994.
- [3] Beneš, V. E. and Karatzas, I.: Examples of Optimal Control for Partially Observable Systems: Comparison, Classical, and Martingale Methods, *Stochastics vol.5* 43-64, Gordon and Breach Science Publishers Inc., 1981.
- [4] Christopeit, N. and Helmes, K.: Optimal Control for a Class of Partially Observable Systems, *Stochastics vol.8* 17-38, Gordon and Breach Science Publishers Inc., 1982.
- [5] Cuoco, D.: Optimal Consumption and Equilibrium Prices with Portfolio Constraints and Stochastic Income, *Journal of Economic Theory* 72, 33-73, Academic Press, 1997.
- [6] Davis, M. H. A. and Varaiya, P. P.: Information States for Linear Stochastic Systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications vol.37* 384-402, Academic Press, Inc., 1972.
- [7] Dothan, M. U.: *Prices in Financial Markets*, Oxford University, 1990.
- [8] Harrison, J. M. and Plisak, S. R.: Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, *Stochastic Processes and Their Applications*, 1981.
- [9] Karatzas, I. and Ocone, D. L.: The Finite-Horizon Version for a Partially-Observed Stochastic Control Problem of Beneš & Rishel, *Stochastic Analysis and Applications vol.11(5)* 569-605, Marcel Dekker, Inc., 1993.
- [10] Karatzas, I. and Shreve, S. E.: *Methods of Mathematical Finance*, Springer, 1998.
- [11] Karatzas, I.: *Lectures on the Mathematics of Finance*, American Mathematical Society, 1996
- [12] Luenberger, D. G.: *Investment Science*, Oxford University Press, 1998.
- [13] Merton, R. C.: *Continuous Time Finance*, Blackwell, 1990.
- [14] Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations*, Springer, 1998
- [15] Pliska, S. R.: *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell, 1997.
- [16] Ross, S.: *An Introduction to Mathematical Finance*, Cambridge University Press, 1997.
- [17] Sawaki, K.: Optimal Exercise Policies for Call Options and Their Valuation, *Computers and Mathematics with Applications vol.24, No.1/2* 141-146, Pergamon Press, 1992.