数理解析研究所講究録 1252 巻 2002 年 60-63

代理制約法における最適代理乗数の決定法

姫路獨協大学　並川 哲郎
岡山理科大学　岩崎 彰典
岡山理科大学　太田垣 博一
関西大学　仲川 勇二

1 はじめに

複数の制約条件付の非線形整数計画問題の品質のよい解を得ることは一般に難しい。代理乗数を用いて原問題の複数の制約条件を単一の制約条件とした代理問題に変換する代理制約法は Glover によって整数計画問題を解くことに導入された [1]。原問題が準凸であるときは、複数の制約条件式に乗ずる代理乗数を適当に決定すれば代理問題の最適解は原問題の最適解と一致することが示されている [2]。しかし、離散問題を緩和した代理双対問題の最適解は一般に原問題の最適解に一致せず、代理双対ギャップ (surrogate duality gap) が存在することが多い。このときの解は原問題の目的関数の上限値を与える。この上限値は得られた近似解の品質評価に有用であり、実行可能な近似解を得るためにも重要である。本研究では、代理双対ギャップを最小にする意味で最適な代理乗数を決定するアルゴリズムを二つ提案する。さらに、計算機実験によって、この二つのアルゴリズムによる解を比較し、アルゴリズムの有効性を検討する。

2 問題

つぎの非線形整数計画問題を考える。

$$[P] \quad \text{maximize} \quad f(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{b}, \tag{2}$$

ここで、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T \in \mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}^N$ は N 次元整数値変数ベクトル、$f(\boldsymbol{x})$ は整数値目的関数、$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), \ldots, g_M(\boldsymbol{x}))^T$ は M次元整数値ベクトル制約関数、$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_M)^T$ は M 次元整数値ベクトル制約許容量である。この原問題 $[P]$ を代理乗数$\boldsymbol{u}$を用いてつぎの代理問題に変換する。

$$[P^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})] \quad \text{maximize} \quad f(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

$$\text{subject to} \quad \psi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \leq b, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{X}, \tag{4}$$

$$\psi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m\{g_m(\boldsymbol{x}) - g_M(\boldsymbol{x})\} + g_M(\boldsymbol{x}), \tag{5}$$

$$b = \sum_{m=1}^{M-1} u_m\{b_m - b_M\} + b_M, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{M-1})^T \in \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \{\boldsymbol{u} | \sum_{m=1}^{M-1} u_m \leq 1, \boldsymbol{u} > 0\} \subseteq \mathbf{R}^{M-1}, \tag{7}$$

である。

最適化された$\boldsymbol{x}$は定数ベクトルである。その結果生じる双対問題は代理乗数$\boldsymbol{u}$の関数となる。原問題$[P]$の代理双対問題 $[P^{\mathrm{SD}}]$ は

$$[P^{\mathrm{SD}}] \qquad \min\{\mathrm{Opt}[P^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})] : \quad \boldsymbol{u} \in \mathbf{U}\}, \tag{8}$$

となる。ただし、 $\mathrm{Opt}[P^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u})]$ は代理問題 $[P^S(\boldsymbol{u})]$ の最適解である。

3 代理乗数の決定アルゴリズム

3.1 COPアルゴリズム

$k=1$ から出発する。第k番目の多面体$\mathbf{U}^k$ において $\boldsymbol{u}^k$ のすべての頂点が単位質量である質点系とみなす。この多面体 $\mathbf{U}^k$ の質点系の重心 u^k を代理乗数として代理問題 $[\mathrm{P}^S(\mathbf{u})]$ の解 $\boldsymbol{x}^k$ を求める。この $\boldsymbol{x}^k$ を代理制約式に代入して切断面 $\psi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) > b$ が得られる(3)。これによって代理乗数 $\boldsymbol{u}$ の縮小された多面体 $\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U} \cap \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^{m-1} : \psi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) > b\}$ が得られる。その多面体の重心を$\boldsymbol{u}^k$とする。

3.2 Dyerアルゴリズム

$k=1$から出発する。第 k 番目の多面体 $\mathbf{U}^k$ において内接する球のうちで、半径が最大のものの中心を代理乗数 $\boldsymbol{u}^k = (u_1^k, u_2^k, \ldots, u_M^k)$ とする(4)。この代理乗数を用いた代理問題を解く。代理制約条件式によって多面体を切断縮小する。縮小された多面体の第 j 番目の内接円の半径をd_jとし、その最大値を r^{k+1} とする。

$$r^{k+1} = \max_j\{y \mid d_j(\boldsymbol{u}^k) \geq y\}, \tag{9}$$

$$\sum_{m=1}^{M} u_m^k = 1, \quad u_m^k > 0, \quad (m = 1, 2, \ldots, M) \tag{10}$$

このときの問題を LP 問題として Simplex 法を用いて解いて得られた内接円の中心の座標を代理乗数 $\boldsymbol{u}^{k+1}$ とする。

4　計算機実験と結果

擬似乱数を用いてテスト問題をつぎのように作成した。

$$0 \le f_n(k) \le f_n(k+1) \le 256K_n, \tag{11}$$

$$0 \le g_{mn}(k) \le g_{mn}(k+1) \le 256K_n,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, K_{n-1},\ \ n = 1, 2, \ldots, N) \tag{12}$$

$$b_m = \left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (g_{mn}(1) + g_{mn}(K_n)) \right\rfloor, \quad (m = 1, 2, \ldots, M) \tag{13}$$

制約条件の個数を3, 5, 8とし、10問のテスト問題を解いた結果について、代理乗数の更新回数と実行時間との平均を表1. ～ 3. に示す。

表1. 制約条件数 3 の場合

	制約条件数	3				
	変数	10	20	50	80	100
更新回数	COP	8	11.3	13.2	15.2	15.9
	Dyer	8.5	14.6	15.2	17.8	18.4
実行時間	COP	0	0.2	0.8	1.8	2.5
	Dyer	0.1	0.3	0.9	1.7	2.9

表2. 制約条件数 5 の場合

	制約条件数	5				
	変数	10	20	50	80	100
更新回数	COP	17.2	21.7	29	33.8	31.8
	Dyer	17.8	30.3	43.5	42.7	51
実行時間	COP	0.3	0.4	1.6	4	5.1
	Dyer	0.3	0.8	2.6	4.9	8.6

表3. 制約条件数 8 の場合

	制約条件数	8				
	変数	10	20	50	80	100
更新回数	COP	36.5	44.6	58.9	67	65
	Dyer	35.2	59.4	86.6	121	114
実行時間	COP	1.5	2.2	10.8	16.3	23.7
	Dyer	0.6	2.1	9.1	27.7	28.4

これらの結果において、二つのアルゴリズムによって得られた代理乗数の数値は異なるが、得られた解の目的関数値は全ての問題で一致している。代理乗数の更新回数については、変数や制約条件の個数が増えると繰り返し回数も増えるが、制約条件の個数の方が繰り返し回数に及ぼす影響は大きい。また、繰り返し回数はCOPアルゴリズムの方が少ないことがわか

る。実行時間ついても、制約条件数が増えると、飛躍的に増加する。また、COPアルゴリズムの方が実行時間は短いことがわかる。解くことができるのはメモリの制約のため、COPアルゴリズムでは8制約まで、Dyerアルゴリズムでは15制約までの問題問題であった。

5 おわりに

本論文で、複数の制約条件つきの非線形計画問題を解くための代理制約法において、最適な代理乗数を決定するアルゴリズムを二つ提案した。この二つのアルゴリズムを用いて計算機実験を行うことによって得られた解を比較し、それらのアルゴリズムの有効性を検討した。これらの結果から、仲川によるCOPアルゴリズムは得られた解の品質、計算時間ともにDyerアルゴリズムよりもよいことが確かめられた。

参考文献

[1] Glover,F., "Surrogate constraints", Operations Research, 16, 741-749 (1968)

[2] Luenberger, D. G., "Quasi-convex programming", SIAM J. of Applied Math., 16, 1090-1095 (1968)

[3] 仲川 勇二, 疋田 光伯, 鎌田 弘, "代理双対問題を解くためのアルゴリズム", 電子通信学会論文誌 Vol.J67-A No.1 53-59 (1984)

[4] Dyer, M. E., "Calcurating surrogate constraints", Mathematical Programing, 19, 255-278 (1980)

[5] Nakagawa, Y., "A reinforced surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming RIMS Kokyuroku 1068 Kyoto University, 194- 202 (1998)