数理解析研究所講究録 1253 巻 2002 年 67-72

Regularities of fuzzy measure

Aoi Honda Yoshiaki Okazaki
(本田あおい 岡崎悦明)

Dept. of Control Engineering and Science,
Fac. of Computer Science and Systems Engineering,
Kyushu Institute of Technology

1 はじめに

X を位相空間とし $\mathscr{B}$ を X のボレル σ-algebra とする. $\mathscr{B}$ 上のファジィ測度 $g:\mathscr{B}\to[0,1]$ は次のように定義される.

定義 1. $g:\mathscr{B}\to[0,1]$ が次の条件を満たすとき g をファジィ測度という.

1. $g(\emptyset)=0,\ g(X)=1$
2. $A\subset B,\ \forall A,B\in\mathscr{B}$ のとき $g(A)\leq g(B)$

次に可能性測度の定義を示す.

定義 2. 集合関数 $\Pi:\mathscr{B}\to[0,1]$ が次の性質を持つとき, Π を可能性測度という.

$$\sup\{\pi(x)|x\in X\}=1$$

を満たす関数 $\pi:X\to[0,1]$ が存在して

$$\Pi(A)=\sup\{\pi(x)|x\in A\}\quad\forall A\in\mathscr{B}.$$

可能性測度はファジィ測度である. $\pi(x)$ を可能性分布関数という. 以後 Π を可能性測度, π をその可能性分布関数とする. 可能性測度は次の性質を持つ.

$$\Pi(\bigcup_{i\in I}A_i)=\sup_{i\in I}\Pi(A_i)$$

本論文では, ファジィ測度について 4 種類の support の概念を導入し, ファジィ測度, 可能性測度の support について考察する.

4 節では可能性測度の連続性についての考察を行う.

2 ファジィ測度の support

以下, support の定義を導入する.

定義 3.

$$\begin{aligned} N_p(g) &:= \{x \in X : g(\{x\}) = 0\} \\ S_p(g) &:= \{x \in X : g(\{x\}) > 0\} \end{aligned}$$

S_p を g の pointwise support という.

次の support が通常の (Radon 測度における) support に相当する.

定義 4. $\mathscr{N}(g) = \{O : O$ は開集合かつ $g(O) = 0\}$ とする.

$$\begin{aligned} N(g) &:= \cup \mathscr{N}(g) \\ S(g) &:= N(g)^c \end{aligned}$$

$S(g)$ を g の support という.

$N(g)$ は開集合, $S(g)$ は閉集合である. 次の fine support は Radon 測度では support と一致するが, ファジィ測度の場合は一致せず, さらに一般には support との関係もわからない.

定義 5. g の fine support を次のように定義する.

$$FS(g) := \cap\{C : C \text{ は閉集合かつ } g(C) = 1\}$$

命題 1. 次の二つの条件を考える：

$$\begin{aligned} &a) \quad g(A) < 1 \implies g(A^c) = 1 \\ &b) \quad g(A) = 0 \implies g(A^c) = 1 \end{aligned}$$

このとき $a)$ は $b)$ より強い条件である.

定理 1. g が条件 $a)$ を満たすとする. このとき

$$FS(g) \subset S(g).$$

Proof. もし $x \notin S(g) = N(g)^c$ なら, ある開集合 U が存在し $x \notin U$ かつ $g(U) = 0$. もし $C = U^c$ なら $x \notin C, C$ は閉集合かつ $g(C^c) = 0$. 以上より $S(g) \supset \cap\{C : C$ は閉集合かつ $g(C^c) = 0\}$ がいえた. 仮定より g は条件 $a)$ を満たすので $g(C^c) = 0 \Rightarrow g(C) = 1$ であり, これは fine support となる. □

次の total support についても fine support と同様に support との関係は一般にわからない.

定義 6.

$$TS(g) := \cap\{C : C \text{ は閉集合かつ } g(C^c) < 1\}$$

$TS(g) \subset S(g)$ となる.

定理 2. g が条件 $a)$ を満たすとする．このとき

$$FS(g) \subset TS(g)$$

が成り立つ．

Proof. 仮定より，もし $g(B^c) < 1$ ならば $g(B) = 1$. x を $FS(g)$ の任意の元とする．$g(B) = 1$ なる任意の B に対して $x \in B$. 特に任意の $g(B^c) < 1$ なる B に対して $x \in B$. これは $x \in TS(g)$ を意味する．以上より $FS(g) \subset TS(g)$. □

3　可能性測度の support

可能性測度は L. A. Zadeh によって提案された (1978) 代表的なファジィ測度である．一般にファジィ測度は扱いにくい測度であるが，可能性測度は可能性分布関数から眺めることができファジィ測度の中では比較的扱いやすい測度である．次に示すように可能性測度は命題 1 の条件 a) を満たす．

命題 2. 可能性測度 Π は条件 $a)$ を満たす．

Proof. 可能性測度の性質より $g(A) < 1$ とすると

$$1 = g(X) = g(A \cup A^c) = \sup\{g(A), g(A^c)\} = g(A^c)$$

□

この命題より以下の定理が成り立つ．

定理 3. 可能性測度 Π に対して，

$$FS(\Pi) \subset TS(\Pi) \subset S(\Pi)$$

が成り立つ．

Proof. 定理 2 よりいえる． □

命題 3. $N(\Pi)$ は零集合．また $\Pi(S(\Pi)) = 1$.

Proof. 可能性測度の性質より

$$\Pi(N(\Pi)) = \Pi(\cup \mathscr{N}(\Pi)) = \sup\{\Pi(B) : \Pi(B) = 0\} = 0.$$

$\Pi(S(\Pi)) = 1$ は命題 2 よりいえる． □

定理 4. $FS(\Pi) \neq \emptyset$ ならば $FS(\Pi)$ は一点集合．

Proof. $x, y (x \neq y) \in FS(\Pi)$ とする．V, W を x, y の閉近傍で $V \cap Q = \emptyset$ となるものとすると，$\Pi(B) = \Pi(W) = 1$. ゆえに $FS(\Pi) \subset B \cap W = \emptyset$ である．もし $x \in FS(\Pi)$ ならば $x \in U$ なる全ての開集合 U にたいして $\Pi(U) = 1$ である．よって $\Pi(V) = \Pi(W) = 1$. 従って $FS(\Pi) \subset V \cap W = \emptyset$ を得る． □

一般に $TS(\Pi) \neq \{x : \pi(x) = 1\}$ である．しかし π が上半連続なら次の定理が成り立つ．

定理 5. π が上半連続とする．このとき

$$TS(\Pi) = \{x : \pi(x) = 1\}$$

が成り立つ

Proof. $\{x : \pi(x) = 1\} \subset TS(\Pi)$ は明らかであるので，$\{x : \pi(x) = 1\} \supset TS(\Pi)$ を示す．$x \in TS(\Pi)$ とする．もし $\pi(x) < 1$ なら $\pi(x) < k < 1$ なる k をとることができる．π は上半連続であるので $\{y : \pi(y) \geqq k\}$ は閉集合．よって $TS(\Pi) \subset \{y : \pi(y) \geqq k\}$ となり $x \in TS(\Pi)$ かつ $\pi(x) < k$ に矛盾． □

例 1. $X = [0, 1]$

$$\pi(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

とし，Π を $\pi(x)$ を可能性分布関数に持つ可能性測度とする．このとき

$$FS(\Pi) = TS(\Pi) = \{1\}$$
$$S(\Pi) = [0, 1]$$

4 可能性測度の連続性

二つの外正則性を導入する．通常，外正則というのは次の O 外正則に相当する．

定義 7. 全ての $A \in \mathscr{B}$ に対して

$$g(A) = \inf\{g(O) | A \subset O, O \text{ は開集合}\}$$

のとき g は O-外正則，

$$g(A) = \inf\{g(C) | A \subset C, C \text{ は閉集合}\}$$

のとき g は C-外正則という．

定理 6. 可能性測度 Π が O-外正則であることの必要十分条件は Π の可能性分布関数 π が上半連続であることである．

Proof. 十分性より示す．

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x) = \alpha$$

とおく．ある点列 $x_n \in A$ が存在して，$\pi(x_n) \uparrow \alpha$ とする．今，任意の ε に対して $O_\varepsilon = \{x | \pi(x) < \alpha + \varepsilon\}$ は開集合かつ $O_\varepsilon \supset A$．しかも

$$\Pi(O_\varepsilon) \leq \alpha + \varepsilon = \Pi(A) + \varepsilon$$

すなわち Π は O-外正則性である.

次に必要性を示す. 任意の $x \in X$ と全ての $\varepsilon > 0$ に対して開集合 $O_\varepsilon(x), O_\varepsilon(x) \ni x$ が存在して

$$\Pi(\{x\}) + \varepsilon > \Pi(O_\varepsilon(x)).$$

任意の $y \in O_\varepsilon(x)$ に対して,

$$\Pi(\{y\}) \leq \Pi(O_\varepsilon(x)) < \Pi(\{x\}) + \varepsilon.$$

すなわち $\pi(y) < \pi(x) + \varepsilon$ となり π は上半連続となる. □

例 2.
F を閉集合とし,

$$\pi(x) = 1_F(x)$$

ただし

$$1_F(x) = \begin{cases} 1 \ (x \in F) \\ 0 \ (x \notin F), \end{cases}$$

$\pi(x)$ は上半連続となり Π は O-外正則.

例 3.
U を閉集合とし,

$$\pi(x) = 1_{U(x)}$$

$\pi(x)$ は上半連続ではない. Π は O-外正則にはならない.

定理 7. 可能性測度 Π が C-外正則であることの必要十分条件は Π の可能性分布関数 π が下半連続であることである.

Proof. 十分性より示す.

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x) = \alpha$$

とおくと, 点列 $x_n \in A$ が存在して

$$\pi(x_n) \uparrow \alpha.$$

全ての $\varepsilon > 0$ に対して

$$C_\varepsilon = \{x | \pi(x)) \leq \alpha + \varepsilon\}$$

とおくと C_ε は閉集合かつ $C_\varepsilon \supset A$. さらに

$$\Pi(C_\varepsilon) \leq \alpha + \varepsilon = \pi(A) + \varepsilon$$

となり, Π は C-外正則である.

次に必要性を示す. $\pi(x) > 0, \varepsilon < \pi(x)$ となる任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ を固定する.

$$A = \{y | \pi(y) \leq \pi(x) - \varepsilon\}$$

とすると，閉集合 C_ε が存在して,

$$\Pi(A) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \Pi(C_\varepsilon), C_\varepsilon \supset A.$$

これより

$$C_\varepsilon^c \subset A^c = \{y | \pi(y) > \pi(x) - \varepsilon\}, x \in C_\varepsilon^c$$

C_ε^c は開集合である．すなわち，全ての ε に対して，x の近傍 V_ε を $V_\varepsilon = C_\varepsilon^c$ とおくと,

$$y \in V_\varepsilon \Rightarrow \pi(y) > \pi(x) - \varepsilon.$$

□

参考文献

[1] A.Honda and Y.Okazaki, "Characterization of 0-1 possibility measure on topological space", Bull. Kyushu Inst. Tech. Pure Appl. Math. No.47(2000),1-3.
[2] 菅野道夫, 室伏俊明, ファジィ測度, 日刊工業新聞社, 東京,1993
[3] Z.Wang and J.Klir, Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York and London, 1992