数理解析研究所講究録 1253 巻 2002 年 164-171



# On Tensor Matrices and Norm Inequalities

岡山県立大情報工 髙橋 泰嗣 (Yasuji Takahashi)
九 州 工 大 工 加藤 幹雄 (Mikio Kato)

**Abstract.** The operator norms of tensor matrices between $\ell_p^n$-spaces were studied in G. Bennett [1]. We shall consider these norms between $\ell_p^n(X)$-spaces ($X$-valued $\ell_p^n$-spaces) for a Banach space $X$. The main theorem (Theorem 1) is stated as follows. Let $A$ and $B$ be $m \times n$ and $r \times s$ matrices respectively, and $A \otimes B$ their tensor product. Let $X$ be an arbitrary Banach space. Then $\|A \otimes B\|_{p,q;X} \leq \|A\|_{p,q;X}\,\|B\|_{p,q;X}$ for any $1 \leq p \leq q \leq \infty$, where $\|A\|_{p,q;X} = \|A : \ell_p^n(X) \to \ell_q^m(X)\|$. The equality holds true if $X$ is a Hilbert space (Theorem 2). As applications, from the classical Clarkson inequality we shall derive the generalized Clarkson inequality ([2]; cf. [11, 4, 6]) and the type $p$ inequality with type constant 1 for $L_p$ (cf. [5]).

G. Bennettは行列のテンソル積$A \otimes B$の作用素ノルムをスカラー・ケースで研究した。ここではそれをBanach空間で考察し、ノルム不等式への応用を述べる。

**定義 1.** $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$, $r \times s$ 行列 $B$ に対して

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (mr \times ns \text{行列})$$

$1 \leq p,\, q \leq \infty$ に対して

$$\|A\|_{p,q} := \|A : \ell_p^n \to \ell_q^m\|$$

Banach 空間 $X$ に対して

$$\|A\|_{p,q;X} := \|A : \ell_p^n(X) \to \ell_q^m(X)\|$$

明らかに, $\|A\|_{p,q} \leq \|A\|_{p,q;X}$.

**定理A (G. Bennett [1]).** (i) $1 \le p,\ q \le \infty$ に対して

$$\|A \otimes B\|_{p,q} \ge \|A\|_{p,q}\,\|B\|_{p,q} \tag{1}$$

(ii) $1 \le p \le q \le \infty$ に対して

$$\|A \otimes B\|_{p,q} \le \|A\|_{p,q}\,\|B\|_{p,q} \tag{2}$$

すなわち

$$\|A \otimes B\|_{p,q} = \|A\|_{p,q}\,\|B\|_{p,q}. \tag{3}$$

Banach 空間 $X$ に対して定理A の拡張を考える. (2) は $p > q$ のときスカラー・ケースでさえ成立しない (cf. [1], Proposition 10.3) が, $p \le q$ のとき, 任意の Banach 空間 $X$ で成立する:

**定理1.** $1 \le p \le q \le \infty$ とする. 任意の Banach 空間 $X$ に対して

$$\|A \otimes B\|_{p,q;X} \le \|A\|_{p,q;X}\,\|B\|_{p,q;X} \tag{$2_X$}$$

$(2_X)$ においてスカラー・ケースでは等号が成立するが, 一般の Banach 空間では等号は成立しない. 以下どのような空間 $X$ で等号が成立するかを考察する.

**補題1.** $1 \le p \le r \le q \le \infty$ のとき, 任意の Banach 空間 $X$ に対して

$$\|A\|_{p,q;L_r(X)} = \|A\|_{p,q;X}$$

とくに

$$\|A\|_{p,q;L_r} = \|A\|_{p,q}$$

**定理2.** (i) $1 \le p \le r \le q \le \infty$ とする. $X = L_r$ に対して

$$\|A \otimes B\|_{p,q;X} = \|A\|_{p,q;X}\,\|B\|_{p,q;X}$$

一般に $X$ が finitely representable (f.r.) in $L_r$ であればよい.

(ii) $1 \le p \le q \le \infty$ とする. $X$ が Hilbert 空間ならば

$$\|A \otimes B\|_{p,q;X} = \|A\|_{p,q;X}\,\|B\|_{p,q;X}$$

実際, (i) は (3) と補題1から得られる. また, Hilbert 空間は f.r. in $L_r$ (無限次元) であるから (ii) は (i) の直接的な結果である. ただし,

$X$ が f.r. in $Y$ であるとは, $X$ の任意の有限次元部分空間 $M$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して, 線形作用素 $T : M \to Y$ が存在して

$$(1-\epsilon)\|x\| \leq \|Tx\| \leq (1+\epsilon)\|x\| \quad (\forall\, x \in M)$$

が成り立つことである.

定理 2 (ii) の逆について次の結果が得られる.

**定理 3.** $X$ が Hilbert 空間であるための必要十分条件は, $X$ の任意の有限次元部分空間 $Y$ と任意の $\pm 1$ 行列 $A, B$ に対して

$$\|A \otimes B\|_{2,2;Y} = \|A\|_{2,2;Y}\, \|B\|_{2,2;Y}$$

が成立することである.

**注.** (i) $A, B$ は Littlewood 行列に限定してもよい.
(ii) $X$ が無限次元のとき

$$\|A \otimes B\|_{2,2;X} = \|A\|_{2,2;X}\, \|B\|_{2,2;X}$$

が成立しても, $X$ が Hilbert 空間とは限らない (定理 4 参照).

**定理 4.** $1 \leq p,\ q \leq \infty$ とする. $\ell_1$ が f.r. in $X$ (とくに $X = L_1,\ L_\infty$) ならば, すべての $\pm 1$ 行列 $A,\ B$ に対して

$$\|A \otimes B\|_{p,q;X} = \|A\|_{p,q;X}\, \|B\|_{p,q;X}$$

以下, 定理 1 を Littlewood 行列, Rademacher 行列に適用して, $L_p$ に対する一般 Clarkson 不等式, type 不等式を導く.

次の行列 $A_n$ を **Littlewood 行列** という ([10]):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2...).$$

$A_{n+1} = A_1 \otimes A_n$ より, 定理 1 を適用して,

$$\|A_n\| \leq \|A_1\|^n \quad (n = 1, 2, 3.....). \tag{4}$$

これより，Clarkson 不等式から次の一般 Clarkson 不等式が得られることを見よう．

**系 1 (Generalized Clarkson's inequality)** ([2, 4, 6, 7, 8, 9]). $1 \le p \le 2,\ 1/p + 1/p' = 1$ とする．$A_n = (\epsilon_{ij})$ を Littlewood 行列とするとき，次が成立．

(i) 任意の $n \in \mathbf{N}$ と任意の $f_1, f_2, \ldots, f_{2^n} \in L_p$ に対して

$$\left\{ \sum_{i=1}^{2^n} \left\| \sum_{j=1}^{2^n} \epsilon_{ij} f_j \right\|_p^{p'} \right\}^{1/p'} \le 2^{n/p'} \left\{ \sum_{j=1}^{2^n} \|f_j\|_p^p \right\}^{1/p}. \tag{5}$$

(ii) $1 \le r, s \le \infty$ とする．任意の $n \in \mathbf{N}$ と任意の $f_1, f_2, \ldots, f_{2^n} \in L_p$ に対して

$$\left\{ \sum_{i=1}^{2^n} \left\| \sum_{j=1}^{2^n} \epsilon_{ij} f_j \right\|_p^{s} \right\}^{1/s} \le 2^{nc(r,s;p)} \left\{ \sum_{j=1}^{2^n} \|f_j\|_p^r \right\}^{1/r} \tag{6}$$

ここで

$$c(r,s;p) = \begin{cases} 1/r' + 1/s - 1/p' & \text{if } p \le r \le \infty,\ 1 \le s \le p', \\ 1/s & \text{if } 1 \le r \le p,\ 1 \le s \le r', \\ 1/r' & \text{if } s' \le r \le \infty,\ p' \le s \le \infty. \end{cases}$$

また, (5), (6) は $L_p$-norm を $L_{p'}$-norm に置きかえて成立する．

**Clarkson 不等式**:

(i) $1 < p \le 2$. $\forall f,\ g \in L_p$

$$(\|f+g\|_p^{p'} + \|f-g\|_p^{p'})^{1/p'} \le 2^{1/p'}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{1/p} \tag{7}$$

(ii) $2 \le q < \infty$. $\forall f,\ g \in L_q$

$$(\|f+g\|_q^{q} + \|f-g\|_q^{q})^{1/q} \le 2^{1/q}(\|f\|_q^{q'} + \|g\|_q^{q'})^{1/q'} \tag{8}$$

は Littlewood 行列 $A_1$ を用いてそれぞれ次のように表現される:

$$\|A_1\|_{p,p';L_p} = \|A_1 : \ell_p^2(L_p) \to \ell_{p'}^2(L_p)\| \le 2^{1/p'}, \tag{9}$$

$$\|A_1\|_{q',q;L_q} = \|A_1 : \ell_{q'}^2(L_q) \to \ell_q^2(L_q)\| \le 2^{1/q}. \tag{10}$$

(10) で $q = p'$ とおくと

$$\|A_1\|_{p,p';L_{p'}} = \|A_1 : \ell_p^2(L_{p'}) \to \ell_{p'}^2(L_{p'})\| \leq 2^{1/p'} \tag{10*}$$

となる．したがって (9) と (10)，すなわち (7) と (8) は Banach 空間 $X$ に対する不等式として次のように統一される．

$$\|A_1\|_{p,p';X} = \|A_1 : \ell_p^2(X) \to \ell_{p'}^2(X)\| \leq 2^{1/p'}, \tag{$9_X$}$$

すなわち

$$(\|x+y\|_X^{p'} + \|x-y\|_X^{p'})^{1/p'} \leq 2^{1/p'}(\|x\|_X^p + \|y\|_X^p)^{1/p}. \tag{$7_X$}$$

以上の考察から，Clarkson 不等式 (7), (8) は $X = L_p$ と $X = L_{p'}$ に対する同一の不等式 $(7_X)$ に他ならない．また，${}^tA_1 = A_1$ に注意すれば $(9_X)$ において $X$ をその双対空間 $X'$ で置き換えても同値．すなわち $1/p + 1/q = 1$ のとき Clarkson 不等式 (7), (8) は同値である．したがって Clarkson 不等式は一般に $1 \leq p \leq 2$ の場合を考察すれば十分である．

上と同様の考察により，$1 \leq p \leq 2$ の場合，一般 Clarkson 不等式 (5) は

$$\|A_n\|_{p,p';L_p} = \|A_n : \ell_p^{2^n}(L_p) \to \ell_{p'}^{2^n}(L_p)\| \leq 2^{n/p'}$$

と同値である．したがって (4) によって

$$\|A_n\|_{p,p';L_p} \leq (\|A_1\|_{p,p';L_p})^n \leq (2^{1/p'})^n = 2^{n/p'}$$

このことは一般 Clarkson 不等式 (5) が古典的 Clarkson 不等式 (7) から導かれることを示している．

**注.** (i) Clarkson 不等式 (7) は特別な場合として一般 Clarkson 不等式 (5) に含まれる (n=1 の場合)．また (5) と (6) は同値であるから (cf. [2, 4])，Clarkson 不等式と一般 Clarkson 不等式は同値である．

(ii) $X = L_p$ (無限次元)，$1 \leq p, r, s \leq \infty$ とするとき，任意の Littlewood 行列 $A_m$，$A_n$ に対して

$$\|A_m \otimes A_n\|_{r,s;X} = \|A_m\|_{r,s;X}\,\|A_n\|_{r,s;X}$$

が成り立つ．ただし，$X$ が有限次元のときは成立しない（定理 3 注参照）．

次に$L_p$のtype不等式をClarkson不等式から導こう.

**定義2** (cf. [12]). $X$をBanach空間とし$1<p\leq 2$とする. ある定数$M$と$s$ $(1\leq s<\infty)$が存在して

$$\left\{\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)x_j\right\|^s dt\right\}^{1/s}\leq M\left\{\sum_{j=1}^n\|x_j\|^p\right\}^{1/p} \qquad (11)$$

が任意の有限列$\{x_j\}\subset X$に対して成り立つとき, $X$はtype $p$であるという. ここで$r_j(t)$はRademacher関数, すなわち$r_j(t)=\mathrm{sgn}(\sin 2^j\pi t)$である. Khinchine-Kahaneの不等式によれば, $s$ $(1\leq s<\infty)$は任意の値をとって同値(定数$M$は変動する). (11)をみたす最小の$M$を$T_{p(s)}(X)$で表し, $X$のtype $p(s)$定数という.

**定義3**. 次のように定義される行列$R_n$を**Rademacher 行列**という([3, 4]):

$$R_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad R_{n+1}=\left(\begin{array}{c|c}1 & \\ \vdots & R_n\\ 1 & \\ \hline -1 & \\ \vdots & -R_n\\ -1 & \end{array}\right)\quad (n=1,2\ldots).$$

**補題2** ([3, 4]). $1<p\leq 2$とする. Banach空間$X$に対して, 次は同値.

(i) $X$はtype $p$.

(ii) ある定数$M>0$が存在して

$$\|R_n:\ell_p^n(X)\to\ell_{p'}^{2^n}(X)\|\leq M\,2^{n/p'}\quad\text{for } n=1,2,\ldots. \qquad (12)$$

**系2.** $1<p\leq 2$とする. $L_p$はtype $p$で, $T_{p(p')}(L_p)=1$.

実際, $R_{n+1}$は$R_1\otimes A_n$のsubmatrixであるから, 定理1より

$$\|R_{n+1}:\ell_p^{n+1}(L_p)\to\ell_{p'}^{2^{n+1}}(L_p)\|$$

$$\leq\ \|R_1\otimes A_n:\ell_p^{2^n}(L_p)\to\ell_{p'}^{2^{n+1}}(L_p)\|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \|R_1 : \ell_p^1(L_p) \to \ell_{p'}^2(L_p)\| \cdot \|A_n : \ell_p^{2^n}(L_p) \to \ell_{p'}^{2^n}(L_p)\| \\
&\le 2^{1/p'}(\|A_1\|_{p,p';L_p})^n \\
&\le 2^{1/p'} \cdot 2^{n/p'} = 2^{(n+1)/p'}.
\end{aligned}
$$

$L_p$ を $L_{p'}$ で置きかえると $L_{p'}$ も type $p$ で $T_{p(p')}(L_{p'}) = 1$ であることが分かる.

一般に, type $p$ 不等式 (type $p(p')$ 定数=1), Clarkson 不等式, 一般 Clarkson 不等式は互いに同値であることが知られている:

**定理 5** ([5, 4]). $1 < p \le 2$, $1/p + 1/p' = 1$ とする. Banach 空間 $X$ に対して次は同値.

(i) $(p, p')$-Clarkson 不等式 (7) が $X$ で成立. すなわち

$$\|A_1\|_{p,p';X} = \|A_1 : \ell_p^2(X) \to \ell_{p'}^2(X)\| \le 2^{1/p'}$$

(ii) $(p, p'; n)$-Clarkson 不等式 (5) が $X$ で成立. すなわち

$$\|A_n\|_{p,p';X} = \|A_n : \ell_p^{2^n}(X) \to \ell_{p'}^{2^n}(X)\| \le 2^{n/p'}$$

(iii) 一般 Clarkson 不等式 (6) が $X$ で成立. すなわち

$$\|A_n\|_{r,s;X} = \|A_n : \ell_r^{2^n}(X) \to \ell_s^{2^n}(X)\| \le 2^{nc(r,s;p)}$$

(iv) $X$ は type $p$ で $T_{p(p')}(X) = 1$. すなわち

$$\|R_n\|_{p,p';X} = \|R_n : \ell_p^n(X) \to \ell_{p'}^{2^n}(X)\| \le 2^{n/p'}$$

## References


[1] G. Bennett, Schur multipliers, Duke Math. J. **44** (1977), 603-639.

[2] M. Kato, Generalized Clarkson's inequalities and the norms of the Littlewood matrices, Math. Nachr. **114** (1983), 163-170.

[3] M. Kato, K. Miyazaki and Y. Takahashi, Type, cotype constants for $L_p(L_q)$, norms of the Rademacher matrices and interpolation, Nihonkai Math. J. **6** (1995), 81-95.

[4] M. Kato, L. E. Persson and Y. Takahashi, Clarkson type inequalities and their relations to the concepts of type and cotype, Collect. Math. **51** (2000), 327-346.

[5] M. Kato and Y. Takahashi, Type, cotype constants and Clarkson's inequalities for Banach spaces, Math. Nachr. **186** (1997), 187-196.

[6] M. Kato and Y. Takahashi, Some recent results in the Banach space geometry and related norm inequalities, Publicaciones del Departamento de Analisis Matematico **46**, Universidad Complutense de Madrid, pp. 105-122, 2000.

[7] L. Maligranda and L. E. Persson, On Clarkson's inequalities and interpolation, Math. Nachr. **155** (1992), 187-197.

[8] L. Maligranda and L. E. Persson, Inequalities and interpolation, Collect. Math. **44** (1993), 181-199.

[9] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1993.

[10] A. Pietsch, Absolutely-$p$-summing operators in $L_r$-spaces II, Sem. Goulaouic-Schwartz, Paris, 1970/1971.

[11] A. Tonge, Random Clarkson inequalities and $L_p$-version of Grothendieck's inequality, Math. Nachr. **131** (1987), 335-343.

[12] P. Wojtaszczyk, Banach spaces for analysts, Cambridge Univ. Press., Cambridge-New York-Melbourne, 1991.

*Department of System Engineering,*
*Okayama Prefectural University,*
*Soja 719-1197, Japan*
*e-mail: takahasi@cse.oka-pu.ac.jp*

*Department of Mathematics,*
*Kyushu Institute of Technology,*
*Kitakyushu 804-8550, Japan*
*e-mail: katom@tobata.isc.kyutech.ac.jp*