数理解析研究所講究録 1254 巻 2002 年 1-7

4 階準線形常微分方程式の振動定理

加茂 憲一　　広島大学理学部
Ken-ichi Kamo
Faculty of Sciences, Hiroshima University

宇佐美 広介　　広島大学総合科学部
Hiroyuki Usami
Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University

1 導入.

4 階準線形常微分方程式

$$(p(t)|u''|^{\alpha-1}u'')'' + q(t)|u|^{\lambda-1}u = 0 \tag{E}$$

を考える. ここで α, λ は正定数, p, q は区間 $[a, \infty)$ 上で定義された正値連続関数とする. 方程式 (E) は $\lambda > \alpha$ のとき super-homogeneous, $\lambda < \alpha$ のとき sub-homogeneous と呼ばれる. (E) の解とは, 区間 $[T, \infty)$ $(T \geq a)$ で定義された実数値関数 u で u と $p(t)|u''|^{\alpha-1}u''$ が共に $C^2[T, \infty)$ であるものをいう.

方程式 (E) の漸近的な性質は 2 つの無限積分

$$\int^{\infty} \left(\frac{t}{p(t)}\right)^{1/\alpha} dt, \qquad \int^{\infty} \frac{t}{p(t)^{1/\alpha}}\, dt$$

が収束するか発散するかによって異なることが知られている. 具体的には次の (A)-(D) の 4 パターンが考えられる.

$$\text{(A)} \qquad \int^{\infty} \left(\frac{t}{p(t)}\right)^{1/\alpha} dt = \infty, \qquad \int^{\infty} \frac{t}{p(t)^{1/\alpha}}\, dt = \infty;$$

$$\text{(B)} \qquad \int^{\infty} \left(\frac{t}{p(t)}\right)^{1/\alpha} dt = \infty, \qquad \int^{\infty} \frac{t}{p(t)^{1/\alpha}}\, dt < \infty;$$

$$\text{(C)} \qquad \int^{\infty} \left(\frac{t}{p(t)}\right)^{1/\alpha} dt < \infty, \qquad \int^{\infty} \frac{t}{p(t)^{1/\alpha}}\, dt = \infty;$$

$$\text{(D)} \qquad \int^{\infty} \left(\frac{t}{p(t)}\right)^{1/\alpha} dt < \infty, \qquad \int^{\infty} \frac{t}{p(t)^{1/\alpha}}\, dt < \infty.$$

ここで (B) の場合は $\alpha < 1$, (C) の場合は $\alpha > 1$ となる. (A)-(D) の条件の下での振動定理を確立する事を目標とする.

4 階準線形方程式 (E) に関する振動論の研究としては $\alpha = 1$ の場合は [2, 3] がある. 一方 [4] においては (A) の場合を取り扱い, $\alpha = 1$ における結果を $\alpha \neq 1$ の場合にうまく拡張する事に成功している. また [1] においては (B) の場合を取り扱っている. 前述の通り (B) の場合は $\alpha < 1$ であるので $\alpha = 1$ における結果をそのまま拡張する事は出来ないが, 振動定理を得る事が出来た.

今後用いる関数 H, π を定義しておく：

$$H(t,\tau) = \int_\tau^t \int_\tau^s \left(\frac{r}{p(r)}\right)^{1/\alpha} dr\, ds = \int_\tau^t (t-s) \left(\frac{s}{p(s)}\right)^{1/\alpha} ds,$$

$$\pi(t) = \int_t^\infty \int_s^\infty \frac{1}{p(r)^{1/\alpha}}\, dr\, ds = \int_t^\infty \frac{s-t}{p(s)^{1/\alpha}}\, ds, \quad t \geq T > a.$$

2 正値解の性質.

方程式 (E) の正値解は次のように分類される：

補題 2.1. u を (E) の正値解とする. このとき u は次の (i)-(iv) のいずれかに属する.

$$\begin{array}{lllll} \text{(i)} & (p(t)|u''|^{\alpha-1}u'')' > 0, & u'' > 0, & u' > 0, & t \geq t_1 > a; \\ \text{(ii)} & (p(t)|u''|^{\alpha-1}u'')' > 0, & u'' < 0, & u' > 0, & t \geq t_1; \\ \text{(iii)} & (p(t)|u''|^{\alpha-1}u'')' < 0, & u'' < 0, & u' > 0, & t \geq t_1; \\ \text{(iv)} & (p(t)|u''|^{\alpha-1}u'')' > 0, & u'' > 0, & u' < 0, & t \geq t_1. \end{array}$$

以下 (A)-(D) 各々の場合における正値解の性質を調べる. 具体的には正値解の上下からの評価, 最大解, 最小解（定義は後述）の存在性に関する結果を述べる.

2.1 (A) の場合.

(A) の場合に関しては文献 [4] において様々な結果が得られている.

補題 2.2. [4, Lemma 2.2]. 方程式 (E) の解は (i) か (ii) である.

補題 2.3. 方程式 (E) の解 u は次の不等式をみたす：ある正定数 c_1, c_2 に対して

$$c_1 \leq u(t) \leq c_2 H(t,a).$$

補題 2.4. [4, Theorem 2.2]. 方程式 (E) が $u \sim c_1$ なる解を持つ為の必要十分条件は

$$\int^{\infty} q(t)H(t,a)^{\lambda}\,dt < \infty.$$

補題 2.5. [4, Theorem 2.1]. 方程式 (E) が $u \sim c_2 H(t,a)$ なる解を持つ為の必要十分条件は

$$\int^{\infty} \frac{t}{p(t)^{1/\alpha}} \left(\int_t^{\infty} (s-t)q(s)\,ds \right)^{1/\alpha} < \infty.$$

最大解 (maximal solution) を最もオーダーの高い解の漸近的主要項, 最小解 (minimal solution) を最もオーダーの低い解の漸近的主要項と定義する. 補題 2.3-2.4 より, 正定数が最小解であり, 補題 2.3-2.5 より $cH(t,a)$ が最大解であることが分かる.

2.2 (B) の場合.

補題 2.6. 方程式 (E) の解は (i) か (ii) か (iv) である.

補題 2.7. 方程式 (E) の解 u は次の不等式をみたす：ある正定数 c_1, c_2 に対して

$$c_1\pi(t) \le u(t) \le c_2 H(t,a).$$

補題 2.8. 方程式 (E) が $u \sim c_1\pi(t)$ なる解を持つ為の必要十分条件は

$$\int^{\infty} tq(t)\pi(t)^{\lambda}\,dt < \infty.$$

（注） (B) の場合 (E) が $u \sim c_2 H(t,a)$ なる解を持つ為の必要十分条件は補題 2.5 と同じである.

この場合の最小解は $c_1\pi(t)$, 最大解は $c_2 H(t,a)$ であることが分かる.

2.3 (C) の場合.

補題 2.9. 方程式 (E) の解は (i) か (ii) か (iii) である.

補題 2.10. 方程式 (E) の解 u は次の不等式をみたす：ある正定数 c_1, c_2 に対して

$$c_1 \le u(t) \le c_2 t.$$

補題 2.11. 方程式 (E) が $u \sim c_1 t$ なる解を持つ為の必要十分条件は

$$\int^{\infty} \frac{1}{p(t)^{1/\alpha}} \left(\int_{t_0}^{t} (t-s)s^{\lambda}q(s)\,ds \right)^{1/\alpha} < \infty.$$

（注） (C) の場合 (E) が $u \sim c_2$ なる解を持つ為の必要十分条件は補題 2.4 と同じである.

この場合の最小解は正定数, 最大解は $c_1 t$ であることが分かる.

2.4 (D) の場合.

補題 2.12. 方程式 (E) の解は (i)-(iv) 全ての可能性がある.

補題 2.13. 方程式 (E) の解 u は次の不等式をみたす：ある正定数 c_1, c_2 に対して

$$c_1\pi(t) \le u(t) \le c_2 t.$$

（注） (D) の場合 (E) が $u \sim c_1\pi(t)$ 並びに $u \sim c_2 t$ なる解を持つ為の必要十分条件はそれぞれ補題 2.8, 2.11 と同じである.

この場合の最小解は $c_1\pi(t)$, 最大解は $c_2 t$ であることが分かる.

3 振動定理.

以下の定理において次のいずれか（あるいは両方）を仮定することがある：

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t^k} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t^k} < \infty \quad \text{for some } k \in R, \tag{1}$$

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{q(t)}{t^l} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{q(t)}{t^l} < \infty \quad \text{for some } l \in R. \tag{2}$$

定理 3.1. 方程式 (E) において (A) の場合.
(I) $\lambda \le 1 < \alpha$ とする. このとき (E) が振動的である必要十分条件は

$$\int^\infty q(t)H(t,a)^\lambda\,dt = \infty. \tag{3}$$

(II) $\lambda > 1 \ge \alpha$ とする. このとき (E) が振動的である必要十分条件は

$$\int^\infty \frac{t}{p(t)^{1/\alpha}} \left(\int_t^\infty (s-t)q(s)\,ds\right)^{1/\alpha} = \infty. \tag{4}$$

定理 3.2. 方程式 (E) において (B) の場合.
(I) $\lambda < \alpha$ とし (1) を仮定する. このとき (E) が振動的である必要十分条件は (3) である.

(II) $\lambda \ge 1 > \alpha$ とする. このとき (E) が振動的である必要十分条件は

$$\int^\infty tq(t)\pi(t)^\lambda\,dt = \infty. \tag{5}$$

(III) $\lambda > \alpha$ とし (1), (2) を仮定する. このとき (E) が振動的である必要十分条件は (5)

定理 3.3. 方程式 (E) において (C) の場合.
(I) $\lambda \leq 1 < \alpha$ とする. このとき (E) が振動的である必要十分条件は

$$\int^{\infty} \frac{1}{p(t)^{1/\alpha}} \left(\int_{t_0}^{t} (t-s) s^{\lambda} q(s)\, ds \right)^{1/\alpha} = \infty. \tag{6}$$

(II) $\lambda > \alpha$ とし (1), (2) を仮定する. このとき (E) が振動的である必要十分条件は (4) である.

定理 3.4. 方程式 (E) において (D) の場合.
(I) $\lambda < \alpha$ とし (1), (2) を仮定する. このとき (E) が振動的である必要十分条件は (6) である.

(II) $\lambda > \alpha \geq 1$ とする. また, ある正定数 m に対して $m\pi(t) \leq \pi(t+1)$ が成り立つとする. このとき (E) が振動的である必要十分条件は (5) である.

4 常微分方程式に関する結果のまとめ.

前章の結果を一覧表にまとめると次のようになる：

	remark	variety of positive solutions	maximal solution	minimal solution	oscillation criteria for $\lambda < \alpha$	oscillation criteria for $\lambda > \alpha$
(A)		(i), (ii)	$cH(t,a)$	c	(3) (*1)	(4) (*2)
(B)	$\alpha < 1$	(i), (ii), (iv)	$cH(t,a)$	$c\pi(t)$	(3) (*3)	(5) (*4)
(C)	$\alpha > 1$	(i), (ii), (iii)	ct	c	(6) (*5)	(4) (*6)
(D)		(i), (ii), (iii), (iv)	ct	$c\pi(t)$	(6) (*7)	(5) (*8)

ただし (*1) − (*8) は次の通り：

$$\begin{array}{ll}
(*1) & \lambda \leq 1 < \alpha, \\
(*2) & \lambda > 1 \geq \alpha, \\
(*3) & (1), \\
(*4) & \lambda \geq 1 > \alpha \quad \text{or} \quad (1), (2), \\
(*5) & \lambda \leq 1 < \alpha, \\
(*6) & (1), (2), \\
(*7) & (1), (2), \\
(*8) & \alpha \geq 1 \quad \text{and} \quad m\pi(t) \leq \pi(t+1).
\end{array}$$

以上の結果から, 最大解の存在条件が sub-homogeneous の場合の振動条件に, 最小解の存在条件が super-homogeneous の場合の振動条件に各々対応していることが分かる.

5 偏微分方程式への応用.

この章では前述の常微分方程式の応用として, 次の偏微分方程式系を考える

$$\begin{cases} \Delta u = f(x)|v|^{\sigma-1}v \\ \Delta v = -g(x)|u|^{\rho-1}u \quad \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

ここで $N \geq 3$, $\sigma \geq 1$ $\rho \geq 1$ は定数とし, Ω は R^N における外部領域とする. また $f, g \in C(\bar{\Omega}; (0,\infty))$ とする.

先の常微分方程式 (E) に関する結果を用いて (7) に関する振動定理を得ることが出来る. ここで適用できるのは (A), (B) の場合である. 十分大きな $r > 0$ に対して

$$f_*(r) = \min_{|x|=r} f(x) \quad \text{and} \quad g_*(r) = \min_{|x|=r} g(x)$$

とする.

定理 5.1. (定理 3.1 の応用) 偏微分方程式系 (7) において $\sigma\rho > 1$ とする. もし

$$\int^\infty t f_*(t)\, dt = \infty,$$

$$\int^\infty t^{N-1-\sigma(N-2)} f_*(t)\, dt = \infty$$

かつ

$$\int^\infty t^{N-1-\sigma(N-2)} f_*(t) \left(\int_t^\infty s^{N-3} \int_s^\infty r^{1-\rho(N-2)} g_*(r)\, dr\, ds \right)^\sigma dt = \infty$$

ならば (7) は正値解 (u, v) を持たない.

定理 5.2. (定理 3.2 の応用) 偏微分方程式系 (7) において $\sigma > 1$, $\rho \geq 1$ とする. もし

$$\int^\infty t f_*(t)\, dt = \infty,$$

$$\int^\infty t^{N-1-\sigma(N-2)} f_*(t)\, dt < \infty$$

かつ

$$\int^\infty t^{N-1-\rho(N-2)} g_*(t) \left(\int_t^\infty s^{N-3} \int_s^\infty r^{1-\sigma(N-2)} f_*(r)\, dr\, ds \right)^\rho dt = \infty$$

ならば (7) は正値解 (u, v) を持たない.

上の結果の具体的な例を1つ挙げる.

例 5.1. 方程式系

$$\begin{cases} \Delta u = |x|^{-1} v^3 \\ \Delta v = -|x|^3 u^3 \quad \text{in} \quad R^3 \setminus \{0\} \end{cases}$$

は正値解を持たない.

一方, ある $\varepsilon \in (0, 8/3)$ に対して方程式系

$$\begin{cases} \Delta u = |x|^{-1} v^3 \\ \Delta v = -|x|^{3-\varepsilon} u^3 \quad \text{in} \quad R^3 \setminus \{0\} \end{cases}$$

は球対称な正値解

$$u(x) = c_1 |x|^{m_1}, \quad v(x) = c_2 |x|^{m_2},$$

を持つ. ただし

$$m_1 = -2 + \frac{3\varepsilon}{8},\ m_2 = -1 + \frac{\varepsilon}{8},$$

$$c_1 = \frac{\varepsilon^{3/8}}{8}(8-\varepsilon)^{3/8}(16-3\varepsilon)^{1/8}(8-3\varepsilon)^{1/8},\ c_2 = \frac{\varepsilon^{1/8}}{8}(8-\varepsilon)^{1/8}(16-3\varepsilon)^{3/8}(8-3\varepsilon)^{3/8}$$

である.

参考文献

[1] K.Kamo and H.Usami, *Oscillation theorems for fourth-order quasilinear ordinary differential equations,* (preprint).

[2] T.Kusano and M.Naito, *Nonlinear oscillation of fourth order differential equations,* Can. J. Math. 28 (1976), 840-852.

[3] T.Kusano and M.Naito, *On fourth-order nonlinear oscillations,* J. London Math. Soc. 14 (1976) 91-105.

[4] F.Wu, *Nonoscillatory solutions of fourth order quasilinear differential equations*, Funkcial. Ekvac. (to appear).