

# ある非線形差分モデルの Neimark-Sacker 分岐

徳島大学 総合科 村上 公一 (Kouichi Murakami)

## 1 はじめに

論文 [3] において、非線形差分方程式の Neimark-Sacker 分岐を調べ、発生する不変曲線の近似公式を導出した。そしてその結果を、時間遅れのある Logistic 方程式

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_{n-k}), \quad r > 1$$

に適用した。今回は、Maynard Smith [2] により提案された離散 Prey-Predator モデル

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) - x_n y_n, \\ y_{n+1} = \frac{1}{\beta} x_n y_n, \end{cases} \quad \alpha \geq 0, \beta > 0 \quad (1)$$

に適用し、Neimark-Sacker 分岐によって発生する不変曲線の近似表現を求める。

## 2 解の非負条件

まず、方程式 (1) の生物学的な意味から、解が非負となる条件を求める。いま、ある  $n$  について  $x_n \geq 0, y_n \geq 0$  とする。このとき、(1) より  $y_{n+1} \geq 0$  となるが、 $x_{n+1} \geq 0$  となるためには

$$y_n \leq \alpha(1 - x_n)$$

が成立しなければならない。これより、解が非負となるためには

$$(x_n, y_n) \in D, \quad \text{ただし } D = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq \alpha(1 - x)\}$$

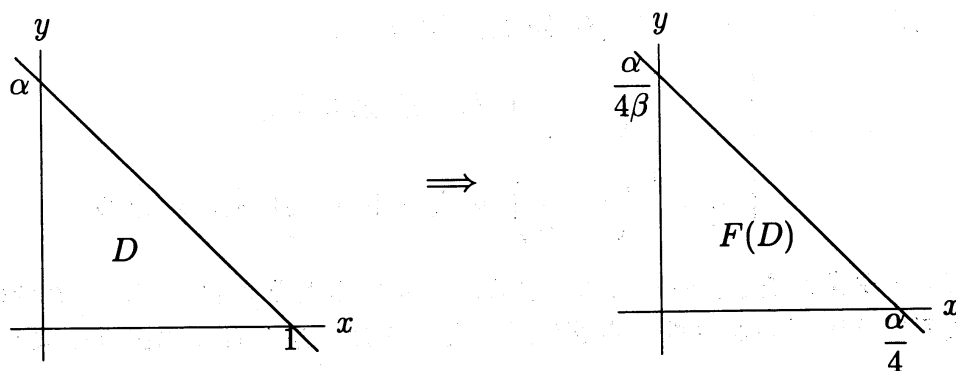
が必要となる。さらに、写像  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x(1 - x) - xy \\ \frac{1}{\beta} xy \end{pmatrix}$$

とすると、 $F(D) \subset D$  が成立すれば、任意の  $n$  について  $x_n \geq 0, y_n \geq 0$  となる。

領域  $D$  と  $F(D)$  のグラフは 図1 のようになるので、解が非負となるための条件は、

$$0 \leq \alpha \leq 4 \quad \text{かつ} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \quad (2)$$

図 1: 領域  $D$  と  $F(D)$  のグラフ

### 3 不動点の安定性と分岐

方程式 (1) は, 3つの不動点

$$P_1 : (0, 0), \quad P_2 : \left(1 - \frac{1}{\alpha}, 0\right), \quad P_3 : (\beta, \alpha(1 - \beta) - 1)$$

を持つ。不動点の安定性と分岐は, ヤコビ行列の固有値  $\lambda$  を調べればよい。まず, すべての固有値が  $|\lambda| < 1$  となれば漸近安定となる。また, ある一つの  $\lambda$  について,  $\lambda = 1$  となれば Fold 分岐,  $\lambda = -1$  となれば Flip 分岐,  $\lambda = e^{i\omega}$  (ただし,  $\omega \neq 0, \pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{2}$ ) となれば Neimark-Sacker 分岐が起こる。

各不動点の安定性と分岐の条件は次のようになる。

(i)  $P_1 : (0, 0)$  について

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha < 1 \text{ ならば 漸近安定} \\ \alpha = 1 \text{ のとき Fold 分岐} \end{cases}$$

(ii)  $P_2 : (1 - \frac{1}{\alpha}, 0)$  について ( $\alpha \geq 1$  のときに第 1 象限に存在)

$$\begin{cases} 1 < \alpha < 3 \text{ かつ } \beta > 1 - \frac{1}{\alpha} \text{ ならば 漸近安定} \\ \alpha = 1 \text{ のとき Fold 分岐} \\ \alpha = 3 \text{ のとき Flip 分岐} \\ \beta = 1 - \frac{1}{\alpha} \text{ のとき Fold 分岐} \end{cases}$$

(iii)  $P_3 : (\beta, \alpha(1 - \beta) - 1)$  について ( $\beta \leq 1 - \frac{1}{\alpha}$  のときに第 1 象限に存在)

(a)  $(2 + \alpha\beta)^2 - 4\alpha \geq 0$  のとき (実固有値の場合)

$$\begin{cases} \beta < 1 - \frac{1}{\alpha} \text{ かつ } \beta < \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha} \text{ ならば 漸近安定} \\ \beta = 1 - \frac{1}{\alpha} \text{ のとき Fold 分岐} \\ \beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha} \text{ のとき Flip 分岐} \end{cases}$$

(b)  $(2 + \alpha\beta)^2 - 4\alpha < 0$  のとき (複素固有値の場合)

$$\begin{cases} \beta > \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \text{ ならば 漸近安定} \\ \beta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \text{ のとき Neimark-Sacker 分岐} \end{cases}$$

以上のパラメタ条件を  $\alpha\beta$  平面に図示すると、図2のように  $R_1 \sim R_6$  の6つの領域になる。各領域での不動点の安定性は右表に示した。また、解の様子は図3のようになる。

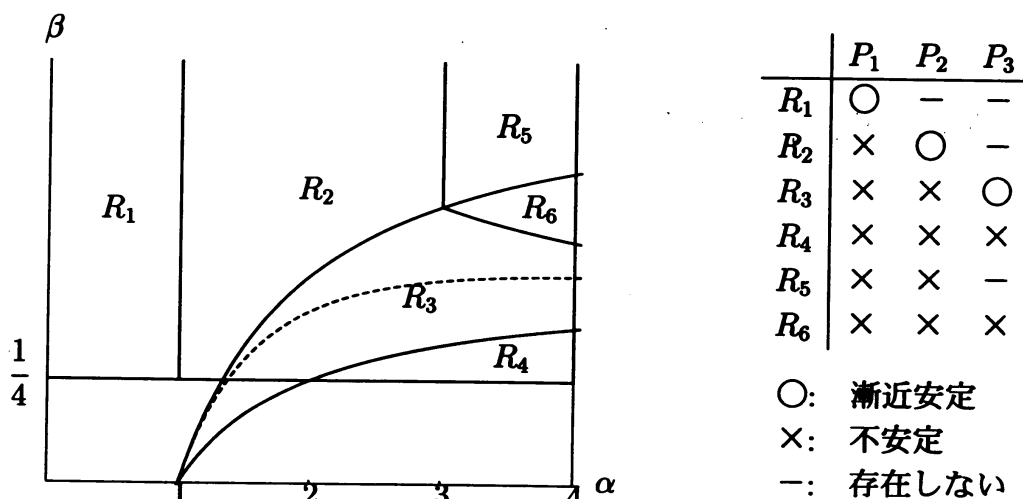


図2:  $\alpha\beta$  平面での不動点の安定性

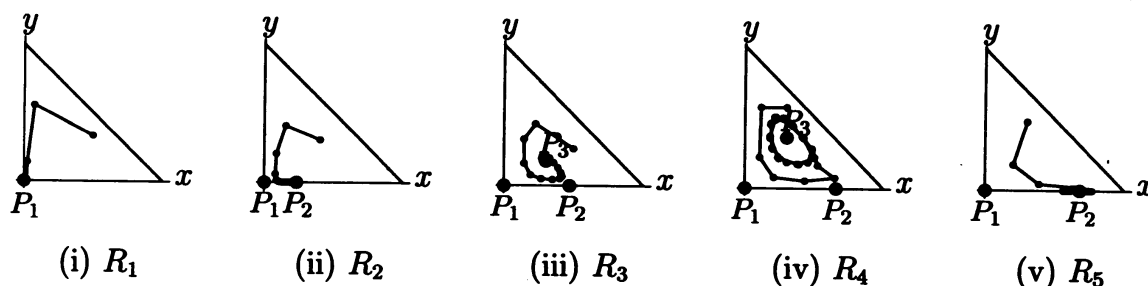


図3:  $R_1 \sim R_5$  の各領域における解の様子

まず、パラメタが  $R_1$  の領域にあるときは、第1象限には漸近安定な  $P_1$  のみ存在する。パラメタが  $R_1$  から  $R_2$  の領域に入ると、 $P_1$  の Fold 分岐によって  $P_1$  は不安定化し、漸近安定な  $P_2$  が発生する。パラメタが  $R_2$  から  $R_3$  の領域に入ると、 $P_2$  の Fold 分岐によって  $P_2$  は不安定化し、漸近安定な  $P_3$  が発生する。パラメタが  $R_3$  から  $R_4$  の領域に入ると、 $P_3$  の Neimark-Sacker 分岐によって  $P_3$  は不安定化し、安定な不変曲線が発生する。パラメタが  $R_2$  から  $R_5$  の領域に入ると、 $P_2$  の Flip 分岐によって  $P_2$  は不安定化し、2周期点、4周期点、... という倍周期点が順次発生する。

## 4 Neimark-Sacker 分岐による不変曲線

ここでは、図2でパラメタが  $R_3$  から  $R_4$  に入るときに、Neimark-Sacker 分岐によって発生する不変曲線の近似表現を求める。

### 4.1 準備

パラメタ  $\mu \in \mathbb{R}$  を含む  $m$  次元非線形差分方程式

$$u_{n+1} = A_\mu u_n + G_\mu(u_n), \quad u_n \in \mathbb{R}^m \quad (3)$$

を考える。行列  $A_\mu$  は  $\mu = 0$  で  $\lambda = e^{\pm i\omega}$  (ただし,  $\omega \neq 0, \pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{2}$ ) となる simple な固有値を持ち、それ以外の固有値は絶対値が1より小さいとする。固有値  $\lambda = e^{i\omega}$  に属する固有ベクトルを  $q, p$  とし、以下を満たすとする。

$$A_0 q = \lambda q, \quad p A_0 = \lambda p, \quad pq = 1.$$

また,

$$c = \frac{1}{2} p \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \bar{z}} G_0 \left( qz + \bar{q} \bar{z} + \frac{1}{2} K_{20} z^2 + K_{11} z \bar{z} \right) \Big|_{z=0}$$

ただし,

$$K_{20} = (\lambda^2 I - A_0)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_0(qz) \Big|_{z=0}$$

$$K_{11} = (I - A_0)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} G_0(qz + \bar{q} \bar{z}) \Big|_{z=0}$$

とする。このとき、以下の結果が成り立つ ([3])。

**Lemma 1**  $a = \operatorname{Re}(\bar{\lambda} c) \neq 0$  ならば、十分小さい  $\mu$  に対して (3) に不変曲線が存在する。不変曲線は、 $a < 0$  のとき安定で、 $a > 0$  のとき不安定となる。さらに、不変曲線は

$$x_n^* \approx 2\rho \operatorname{Re}(q e^{i\theta}) + \rho^2 (\operatorname{Re}(K_{20} e^{2i\theta}) + K_{11})$$

と近似的に表現される。ただし,

$$\rho = \sqrt{-\frac{d}{a}\mu}, \quad d = \frac{d|\lambda|}{d\mu} \Big|_{\mu=0}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

## 4.2 適用結果

(1)において  $\beta$  を固定し,  $\alpha = \alpha_0 + \mu$ ,  $\alpha_0 = \frac{1}{1-2\beta}$  とする。ただし,  $\alpha, \beta$  は (2) を満たすとする。このとき,  $\mu = 0$  における固有値は  $\lambda = e^{i\omega}$ ,  $\omega = \cos^{-1}(1 - \frac{\alpha_0\beta}{2})$  で, 固有ベクトルは

$$q = \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{\alpha_0\beta(\lambda + 1)}(1 - \lambda, \beta)$$

となる。また,

$$c = \frac{1 - \lambda + \beta(2(-5 + 7\lambda) + \beta(29 - 50\lambda + \beta(-26 + 53\lambda)))}{\beta^2(-3 + 7\beta)(5 - 7\lambda + \beta(7(-5 + 8\lambda) + \beta(81 - 147\lambda + \beta(-62 + 127\lambda)))}$$

$$K_{20} = \frac{2\alpha_0(\lambda - 1)}{\det(\lambda^2 I - A)} \begin{pmatrix} \lambda(1 - \lambda^2) - 1 \\ \frac{1}{\beta}(\lambda^2 - 1 + \alpha_0\beta) - \lambda \end{pmatrix}, \quad K_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ -2\alpha_0^2 \end{pmatrix}$$

となる。以上より, 次の結果を得る。

**Theorem 1**  $\alpha, \beta$  は (2) を満たすとする。  $\beta$  を固定し,  $\alpha = \alpha_0 + \mu$ ,  $\alpha_0 = \frac{1}{1-2\beta}$  とする。  $a = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}c) < 0$  ならば, 十分小さい  $\mu$  に対して (1) に安定な不変曲線が存在し,

$$\begin{pmatrix} x_n^* \\ y_n^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha(1 - \beta) - 1 \end{pmatrix} + 2\rho \operatorname{Re}(qe^{i\theta}) + \rho^2 (\operatorname{Re}(K_{20}e^{2i\theta}) + K_{11})$$

と近似的に表現される。ただし,

$$\rho = \sqrt{-\frac{1}{2\alpha_0 a}} \mu, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

とする。

**Remark 1** 数値計算では常に  $a < 0$  となるが, 証明が困難なため  $a < 0$  を条件に課している。

## 4.3 数値例

$\beta = 0.3$  とすると  $\alpha_0 = 2.5$  となる。このとき,  $a \approx -7.8125 < 0$  となり, (1) に安定な不変曲線が存在する。例えば  $\mu = 0.1$  のとき, (1) の解軌道は図4のようになる。ただし, 初期値を (0.6, 0.6) としている。このとき, 定理による不変曲線の近似表現は図5のよう

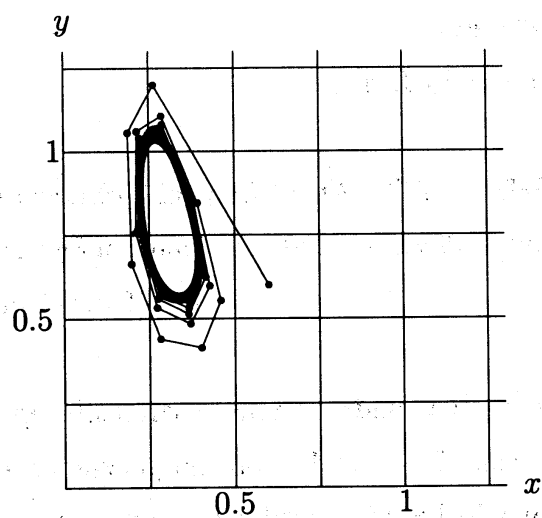


図 4: (1) の解軌道

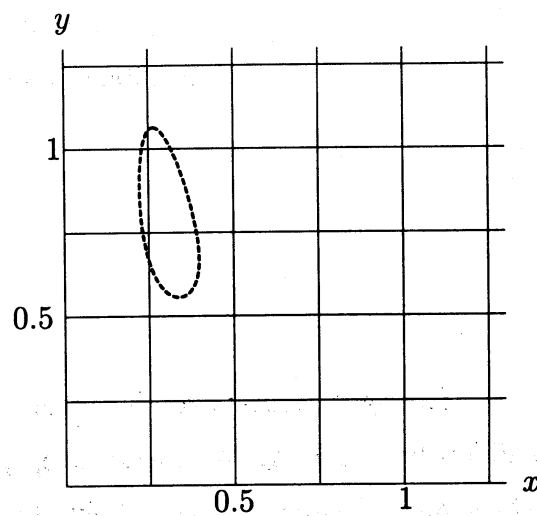


図 5: 不変曲線の近似表現

## 参考文献

- [1] Kuznetsov, Y., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 1995.
- [2] Maynard Smith, J., *Mathematical Ideas in Biology*, Cambridge University Press, 1968.
- [3] Murakami K., The invariant curve caused by Neimark-Sacker bifurcation, *to appear in Dyna. Cont. Discr. Impul. Syst.*