

The Maximal Smoothing Effect of Dispersive Equations with Constant Coefficients

姫路工業大学 理学部
保城 寿彦(Toshihiko HOSHIRO)

1 序論

本稿では定数係数分散型方程式の smoothing effect について考察する。特に時空間で解を考える際、初期値より最大の滑らかさが得られる為の必要十分条件を与える。我々が考えるのは次の初期値問題の解についてである。

$$(1) \quad \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + P(D)u = f(t, x), & (t, x) \in \mathbf{R}^{n+1}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

ここで $u = u(t, x)$, $D = i^{-1}(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, 表象 $P(\xi)$ は ξ についての m 次 ($m > 1$) 実係数多項式とする。

ここで議論する現象は以下の様に説明することができる。方程式が分散型であれば準古典近似の意味での粒子は波動方程式等の双曲型方程式と違ってどの様な速度でも持つことができ、その速度は周波数に依存する。従って解は時空間で考えるとある種の均質化がおり、その結果初期値より滑らかさが増す。実際この十年以上にわたってこの様な現象が研究者の興味を引き、多くの結果が論文として発表されてきた。このうち本稿の結果と関連する過去の知られた結果のうち重要なものについて紹介しよう。まず Schrödinger 方程式つまり $P(D) = \Delta$ の場合、Sjölin [16] と Vega [17] が独立に初期値 $u_0(x)$ が $L^2(\mathbf{R}^n)$ に属するとき、解は空間方向に $1/2$ 階滑らかさが上がる、すなわち $\langle D \rangle^{1/2} u(t, x) \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^{n+1})$ となることを発見した。彼らの本来の興味は Schrödinger 方程式のとき、 $u_0(x) = \lim_{t \rightarrow 0} u(t, x)$ となるための初期値 $u_0(x)$ に対する滑らかさの条件にあった為、その結果を他の分散型方程式に一般化することは無かった。一般化したのは Constantin と Saut [4] である。彼らの考えた方程式が分散型となる条件は次の様なものであった。

$$(2) \quad \left| \frac{\partial P}{\partial \xi_j}(\xi) \right| \geq c(1 + |\xi|)^{m-1} \cdot \frac{|\xi_j|}{|\xi|}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n, |\xi| \geq R, j = 1, \dots, n.$$

ここで c 及び R は正の定数である。彼らはこの条件の下、斉次方程式 つまり (1) で $f(t, x) \equiv 0$ のとき、 $u_0(x) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ なら $\langle D \rangle^{(m-1)/2} u(t, x) \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^{n+1})$ となることを示した。まず本稿の最初の興味は彼らの条件が適切か、言い換えれば条件 (2) が結論が成立する為に必要かどうかということにある。

解の大域的挙動については 加藤-谷嶋 [12] 及び Ben Artzi - Klainerman [2] によって得られた。彼らの結果から $P(D) = \Delta$ かつ $f(t, x) \equiv 0$ の場合、以下の不等式が成立することが

わかる。 $s > 1/2$ をみたす指数 s 及び正数 T に対して正の定数 C が存在して

$$(3) \quad \int_0^T \int_{\mathbf{R}^n} |\langle x \rangle^{-s} \langle D \rangle^{1/2} e^{it\Delta} u_0(x)|^2 dx dt \leq C \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2$$

となる。(注：実は低周波数の部分での時間大域的評価については指数 s に関してデリケートな現象がある。次の事実が知られている。

$$\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} |\langle x \rangle^{-s} \langle D \rangle^{1/2} e^{it\Delta} u_0(x)|^2 dx dt \leq C \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2$$

が成立する為の必要十分条件は空間の次元 n が 2 の場合は $s > 1$ で 3 以上の場合は $s \geq 1$ である。また次元が 1 の場合には如何なる指数 s に対しても成立しない。この事実は Schrödinger 方程式の場合のレベル集合 $\{\xi \in \mathbf{R}^n \mid |\xi|^2 = \lambda\}$ が $\lambda > 0$ のとき球面で次元が $n-1$ であるのに対し $\lambda = 0$ のときは 1 点で次元が 0 であることが起因することに注意しよう。) 本稿の第二の興味は (3) のタイプの評価式を定数係数初期値問題 (1) に一般化することにある。

2 結果

結果を述べる前に $P_m(\xi)$ を $P(\xi)$ の主要部、すなわち

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$$

とし、Constantin- Saut の分散型条件 (2) の代わりに次の条件を導入する。

$$(4) \quad |\nabla P_m(\xi)| \neq 0, \quad \text{for } \xi \in S^{n-1}.$$

本稿の最初の結果は：

定理 1 関数 $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ を $x \in U$ で $\chi(x) \equiv 1$ となるものとする。但しここで U は空でない有界開集合とする。いま正の定数 C と T があって、初期値問題 (1) が齊次すなわち $f \equiv 0$ となる場合の解に対して不等式

$$(5) \quad \int_0^T \|\chi(\cdot) u(t, \cdot)\|_{H^{(m-1)/2}}^2 dt \leq C \|u_0\|_{L^2}^2$$

が成立するとき、主要部 $P_m(\xi)$ は条件 (4) をみたす。

上の定理は条件 (4) が局所的に最大の滑らかさが得られるときに必要であることを主張するものである。逆も成り立つ。より詳しく次の大域的評価式が成立する。

定理 2 $u(t, x)$ を初期値問題 (1) の解とする。いま主要部 $P_m(\xi)$ が分散型条件 (3) をみたすとき、 $s > 1/2$ となる指数 s 及び $T > 0$ に対して正定数 C が存在して次の不等式が成立する。

$$(6) \quad \int_0^T \|\langle x \rangle^{-s} \langle D \rangle^{(m-1)/2} u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt \leq C \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\langle x \rangle^s \langle D \rangle^{-(m-1)/2} f(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt \right).$$

ここで分散型条件 (2) 及び (4) の関係について述べよう。まず明らか条件 (2) がなりたてば条件 (4) が成立する。しかし条件 (4) は条件 (2) と比べて真に緩い条件であろうか? Constantin-Saut の条件 (2) は一次変換について不変ではない。従ってここでは一次変換をすれば条件 (4) から条件 (2) が従うかどうか問題となる。実際 $m = 2$ の場合には両者は同等になる。しかしながら $m \geq 3$ のとき条件 (4) に比べて条件 (2) は真に緩い条件であるといえる。例えば

$$P(\xi) = \xi_1^3 + \xi_1^2 \xi_2 - \xi_1 \xi_2^2 + \frac{1}{6} \xi_2^3$$

は条件 (4) をみたすが条件 (2) はみたさない。実際

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} &= 3\xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 - \xi_2^2 \\ &= (3\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 + \xi_2), \\ \frac{\partial P}{\partial \xi_2} &= \xi_1^2 - 2\xi_1 \xi_2 + \frac{1}{2} \xi_2^2 \\ &= (\xi_1 - \lambda_+ \xi_2)(\xi_1 - \lambda_- \xi_2) \end{aligned}$$

である。ここで $\lambda_{\pm} = (2 \pm \sqrt{2})/2$ である。ここで $\lambda_{\pm} \neq 1/3, -1$ であることから $P(\xi)$ は条件 (4) をみたすことがわかる。他方、一次変換した後条件 (2) が成立することを仮定すると

$$(7) \quad \theta \partial P / \partial \xi_1 + (1 - \theta) \partial P / \partial \xi_2$$

が単位円上 高々 2 点零点をもつ様に実数 θ を定めることができるはずだが、二次式 (7) の判別式は $28\theta^2 - 14\theta + 2$ で全ての実数 θ に対し正の値をとる。よって

$$\begin{aligned} &\theta \partial P / \partial \xi_1 + (1 - \theta) \partial P / \partial \xi_2 \\ &= (2\theta + 1)(\xi_1 - \lambda_+(\theta)\xi_2)(\xi_1 - \lambda_-(\theta)\xi_2) \end{aligned}$$

において $\lambda_+(\theta) \neq \lambda_-(\theta)$ となり、よって単位円上で 4 個の零点をもつことがわかる。

定理 2 の様な大域的結果はスペクトル理論に関する論文 Agmon- Hörmander [1] で導入された Besov 型の関数空間を用いた結果に精密化できる。結果を述べるためにまず次の様な関数空間を導入する。まず $D_0 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, $k \geq 1$ に対して $D_k = \{x \in \mathbf{R}^n \mid 2^{k-1} \leq |x| \leq 2^k\}$ とおく。また χ_{D_k} を D_k の特性関数とする。そして

$$\begin{aligned} B_T &= \left\{ u \in L^2_{loc}([0, T] \times \mathbf{R}^n) \mid \|u\|_{B_T} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2} \|\chi_{D_k} u\|_{L^2([0, T] \times \mathbf{R}^n)} < \infty \right\}, \\ B_T^* &= \left\{ u \in L^2_{loc}([0, T] \times \mathbf{R}^n) \mid \|u\|_{B_T^*} = \sup_{k \geq 0} 2^{-k/2} \|\chi_{D_k} u\|_{L^2([0, T] \times \mathbf{R}^n)} < \infty \right\} \end{aligned}$$

とおく。明らかに $s > 1/2$ のとき $\langle x \rangle^{-s} L^2([0, T] \times \mathbf{R}^n) \subset B_T$ and $B_T^* \subset \langle x \rangle^s L^2([0, T] \times \mathbf{R}^n)$ であることがわかる。精密化された結果とは：

定理 3 $u(t, x)$ 初期値問題 (1) の解とする。主要部 $P_m(\xi)$ は分散型条件 (4) をみたすものとする。このとき正数 T に対し正定数 C が存在して次の不等式が成立する。

$$(8) \quad \|\langle D \rangle^{(m-1)/2} u\|_{B_T^*} \leq C \left(\|u_0\|_{L^2} + \|\langle D \rangle^{-(m-1)/2} f\|_{B_T} \right).$$

追加：本稿を書き上げてから、筆者は千原浩之氏の最近の結果 [3] が上の定理 2 を含むことを知った。これについては千原氏の web site をご覧頂きたい。

3 証明の概略

ここでは各定理の証明の方針あるいはアイデアについて説明する。詳細については [9] をみられたい。

定理 1 の証明について：

ここでの証明の議論は土居氏 [7] のものと同様である。まず x_0 を開集合 U のなかの 1 点とし、 ω_0 を単位球面 S^{n-1} 上の点、 δ を正定数でその値は後で決めるものとする。また関数 $h(\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ を $|\xi| \leq 10^{-10}$ で $h(\xi) = 1$ 、 $|\xi| \geq 2 \cdot 10^{-10}$ で $h(\xi) = 0$ となるものとする。そして大きな正のパラメータ λ に対し初期値問題の初期値 $u_0(x)$ を

$$u_0(x) = h\left(\delta^{-1}\left(\frac{D}{\lambda} - \omega_0\right)\right) \delta(x - x_0)$$

と定める。ここで $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数で、 $h\left(\delta^{-1}\left(\frac{D}{\lambda} - \omega_0\right)\right)$ は擬微分作用素あるいは Fourier multiplier である。初期値が上の u_0 で初期値問題 (1) で斉次の場合の解 $u(t, x)$ について考えよう。

まず初期値 u_0 の L^2 -ノルムについて $\|u_0\| = c(\delta \cdot \lambda)^{n/2}$ であり、超局所的に考えるとその大部分が点 $(x_0, \lambda\omega_0)$ の近傍に集中していることに注目しよう。あらっばく言って解 $u(t, x)$ のエネルギーは方程式の特性曲線に沿って伝わるから、初期値問題 (1) の解 $u(t, x)$ のエネルギーは時刻 t が充分小さいとき、点 $(x_0 - t\nabla P_m(\lambda\omega_0), \lambda\omega_0)$ の近傍に集中していることがいえる。従って

$$\|\langle D \rangle^{(m-1)/2} \chi(x) u\|$$

の値は点 $x_0 - t\nabla P_m(\lambda\omega_0)$ が開集合 U の境界 ∂U に達するまでは小さくなりえず、おおよそ $c'(\delta \cdot \lambda)^{n/2} \cdot \lambda^{(m-1)/2}$ の大きさをもつことがいえる。より正確には $d = \text{dist}(x_0, \partial U)$ として

$$(9) \quad T(\lambda) = \min\left(\lambda^{-m+2-\epsilon_0}, \frac{d}{2\lambda^{m-1} \cdot \sup_{|\omega-\omega_0| \leq 4\delta} |\nabla P_m(\omega)|}\right)$$

とおいたとき、 $0 \leq t \leq T(\lambda)$ をみたく時刻 t に対し

$$\|\langle D \rangle^{(m-1)/2} \chi(x) u\| \geq c' \cdot \delta^{n/2} \cdot \lambda^{(n+m-1)/2}$$

となる。この部分の証明は土居氏 [7] や一ノ瀬氏 [10] の方法と同様で、更にその起源は Lax-溝畑の定理の証明に使われた溝畑先生の energy method [13] に遡ることができる。

この事実を認めると定理 1 の証明は簡単である。すなわち $P_m(\omega_0) = 0$ となる様に点 ω_0 をとるとより長い時間にわたって上の不等式が成立するため、評価式 (5) が成立しないことがわかるのである。実際

$$\begin{aligned} c_1(\delta \cdot \lambda)^n &= C \|u_0\|^2 \\ &\geq \int_0^{T(\lambda)} \|\langle D \rangle^{(m-1)/2} \chi(x) u\|^2 dt \\ &\geq (c')^2 \cdot \delta^n \cdot T(\lambda) \cdot \lambda^{n+m-1}. \end{aligned}$$

従って充分大きな λ に対して

$$T(\lambda) \leq C \cdot \lambda^{-m+1}$$

で、このとき上の不等式が成立する λ の範囲は正数 δ 及び単位球面上の点 ω_0 には依存するが正定数 C は依存しない。この不等式は単位球面上で主要部 P_m が零点を持つときには不可能である。なぜなら $\omega_0 \in S^{n-1}$ を $P_m(\omega_0) = 0$ となるようにとり、正数 ϵ に対し $\delta > 0$ を充分小さくとれば、 $T(\lambda)$ の定義 (9) より充分大きな λ に対し

$$T(\lambda) \geq \epsilon^{-1} \cdot \lambda^{-m+1}$$

となるからである。よって定理 1 が示された。

定理 2 の証明について：

ここでは初期値問題 (1) で、 $u_0 \equiv 0$ であつ $t < 0$ または $T < t$ のとき $f(t, x) \equiv 0$ となる場合に関する高周波数の部分の評価式の証明の概略について述べる。その他の場合は実は自明またはこの部分の評価式からくる。その議論については [8] 及び [9] をみられたい。

まず論文 [8] において注意したように初期値問題 (1) 右辺 $f(t, x)$ から解 $u(t, x)$ を対応させる作用素の表象は $(-\tau + P(\xi))^{-1}$ である。従って定理 2 の結果は特異性のある表象をもつ作用素についての評価式とみることができる。このような事象は smoothing effect の研究だけでなくスペクトル理論の極限吸収でも扱われている。そこでここではそのスペクトル理論の技術を応用する。詳しくいえば Mourre の commutator method を利用する。その議論はまず特異性のない表象をもつ作用素で近似して、その作用素に近づけていった際にある種の作用素ノルムが有界にとどまることを示すのである。

まず単位球面の開被覆 Ω_j ($j = \pm 1, \dots, \pm n$) を $j > 0$ のとき $\partial_{\xi_j} P_m(\omega) > 0$ ($\omega \in \Omega_j$), $j < 0$ のとき $\partial_{\xi_j} P_m(\omega) < 0$ ($\omega \in \Omega_{-j}$) となる様にとり、その被覆にともなう 1 の分割を $\varphi_j(\omega)$ ($j = \pm 1, \dots, \pm n$) とする。すなわち $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$ であつ単位球面上の任意の点 ω で $\sum_j \varphi_j(\omega) = 1$ となる様に関数 φ_j をとるのである。更に正定数 R を充分大きくとって、ある正数 c があつて

$$|\partial_{\xi_j} P(\xi)| \geq c |\xi|^{m-1}, \quad |\xi| \geq R, \quad \frac{\xi}{|\xi|} \in \Omega_j \cup \Omega_{-j}$$

が成り立つ様にする。この際分散型条件 (4) を用いていることに注意しよう。

ここで関数 $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ を $\lambda \geq 2R$ で $\varphi_0(\lambda) = 1$, $0 < \lambda \leq R$ で $\varphi_0(\lambda) = 0$ となる様にとつて上述の作用素の近似を次で定義する。

$$\begin{aligned} \psi_j(\xi) &= \varphi_0(|\xi|) \varphi_j\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right), \\ Q_{j,(\epsilon, \epsilon')}(\xi) &= i\epsilon' + \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{(i\epsilon)^k}{k!} (\partial_{\xi_{|j|}}^k P)(\xi) \right\} \cdot \operatorname{sgn} j, \\ G_{j,(\epsilon, \epsilon')}(D) &= \psi_j(D) (i\partial_t + P(D) + Q_{j,(\epsilon, \epsilon')}(D))^{-1}, \\ G &= \sum_j G_{j,(\epsilon, \epsilon')}(D). \end{aligned}$$

ここで次の命題が成立する。

命題 1 分散型条件 (4) を仮定する。このとき $s > 1/2$ に対して作用素ノルム

$$\|\langle x \rangle^{-s} \langle D \rangle^{m-1} G \langle x \rangle^{-s}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^{n+1}))}$$

は小さな正のパラメータ ϵ 及び ϵ' に依存しない定数でおさえられる。

この命題を認めると更に $\epsilon, \epsilon' \rightarrow 0$ と極限をとれば上述の初期値問題について

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\langle x \rangle^{-s} \langle D \rangle^{(m-1)/2} \varphi_0(|D|) u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt \\ & \leq C_s \int_0^T \|\langle x \rangle^s \langle D \rangle^{-(m-1)/2} f(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt \end{aligned}$$

と解 $u(t, x)$ は右辺 $f(t, x)$ と較べて decay は悪いが滑らかさについては $m-1$ 階良くなるということを示す評価式が得られる。

命題 1 の証明は Mourre の方法による。作用素 $G_{j(\epsilon, \epsilon')}(D)$ をパラメータ ϵ で微分すると、

$$\psi_j(D)[x_j, (i\partial_t + P(D) + Q_{j(\epsilon, \epsilon')}(D))^{-1}]$$

となり、これからある種の微分不等式が得られるのである。ここでは指数 s が 1 の場合のみ議論する。一般の $s > 1/2$ のときの議論は [8] をみられたい。以下では $G_{j(\epsilon, \epsilon')}(D)$ のみ議論するので $Q_{j(\epsilon, \epsilon')}(D)$ を $Q(D)$ 、 $G_{j(\epsilon, \epsilon')}(D)$ を $G(D)$ 、 ψ_j を ψ 、そして $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{n+1}))}$ を $\|\cdot\|$ と表すことにする。また $j > 0$ と仮定する。

まず

$$G_0 = (i\partial_t + P(D) + Q(D))^{-1}$$

とし、更に

$$F = \langle x \rangle^{-1} \langle D \rangle^{m-1} \psi(D) G_0 \langle x \rangle^{-1}$$

とおく。これを ϵ に関して微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\epsilon} &= -\langle x \rangle^{-1} \langle D \rangle^{m-1} \psi(D) [x_j, G_0] \langle x \rangle^{-1} \\ &= -\langle x \rangle^{-1} x_j \langle D \rangle^{m-1} \psi(D) G_0 \langle x \rangle^{-1} - \langle x \rangle^{-1} [\langle D \rangle^{m-1} \psi(D), x_j] G_0 \langle x \rangle^{-1} \\ &\quad + \langle x \rangle^{-1} \langle D \rangle^{m-1} \psi(D) G_0 x_j \langle x \rangle^{-1} \end{aligned}$$

となる。ここで $0 \leq \psi(\xi) \leq 1$ で関数 ψ は滑らかで 2 階微分が有界だから $\psi(\xi) \leq \psi^{1/2}(\xi)$ および $|\nabla \psi(\xi)| \leq C \psi^{1/2}(\xi)$ となり、これから次の微分不等式が得られる。

$$(10) \quad \left\| \frac{dF}{d\epsilon} \right\| \leq C \left(\|\langle D \rangle^{m-1} \psi^{1/2}(D) G_0 \langle x \rangle^{-1}\| + \|\langle x \rangle^{-1} G_0 \langle D \rangle^{m-1} \psi^{1/2}(D)\| \right).$$

ここで以下の補題が成り立つ。

補題 1 正定数 ϵ_0 及び C が存在して $0 < \epsilon < \epsilon_0$ 及び $\epsilon' > 0$ をみたま ϵ, ϵ' に対して次の不等式が成り立つ。

$$(11) \quad \|F\| \leq C \cdot \epsilon^{-1},$$

$$(12) \quad \begin{aligned} & \|\langle D \rangle^{m-1} \psi^{1/2}(D) G_0 \langle x \rangle^{-1}\| + \|\langle x \rangle^{-1} G_0 \langle D \rangle^{m-1} \psi^{1/2}(D)\| \\ & \leq C \cdot \epsilon^{-1/2} \cdot \|F\|^{1/2}. \end{aligned}$$

この補題の証明については [8] や [14] を参照していただきたい。これを認めるとあとはルーチンな議論である。すなわち得られた3つの不等式 (10), (11), (12) から

$$\left\| \frac{dF}{d\epsilon} \right\| \leq C \cdot \epsilon^{-1}$$

がいえるが、この不等式をパラメータ ϵ に関して積分し、更に (10) 及び (12) を用いると

$$\left\| \frac{dF}{d\epsilon} \right\| \leq C \cdot \epsilon^{-1/2} |\log \epsilon|^{1/2}$$

となることがわかる。よってこの結果をパラメータ ϵ について積分すると $\|F\|$ が有界でありことがわかるから、よって以上の議論より $\|\langle x \rangle^{-1} G_{j(\epsilon, \epsilon')}(D) \langle x \rangle^{-1}\|$ がパラメータ ϵ 及び ϵ' によらない定数でおさえられることがわかった。

定理3の証明について：

定理2と同様に非斉次の高周波数の部分の不等式が本質的である。命題1のかわりに χ_{B_k} を球

$$B_k = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 2^k\}$$

の特性関数として、

$$\|\chi_{B_k} \langle D \rangle^{m-1} G \chi_{B_{k'}}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^{n+1}))} \leq C \cdot 2^{(k+k')/2}$$

が成り立つことを示せばよい。ここ C はパラメータ ϵ, ϵ', k 及び k' によらない定数である。これは更に χ_ℓ を領域 $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \ell \leq x_j < \ell + 1\}$ の特性関数として

$$\|\chi_\ell \langle D \rangle^{m-1} G_{j(\epsilon, \epsilon')}(D) \chi_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^{n+1}))}$$

がパラメータ $\epsilon, \epsilon', \ell$ 及び m に依存しない定数でおさえられることからくる。その証明の議論は [11] 及び [15] の議論と同じものである。

参考文献

- [1] S. Agmon and L. Hörmander, *Asymptotic properties solutions to differential equations with simple characteristics*, Jour. d'Analyse Math. **30** (1976), 1–38.
- [2] M. Ben-Artzi and S. Klainerman, *Decay and regularity for the Schrödinger equation*, Jour. d'Analyse Math. **58** (1992), 25–37.
- [3] H. Chihara, *Smoothing effects of dispersive pseudodifferential equations*, Preprint
- [4] P. Constantin and J.C. Saut, *Local smoothing properties of dispersive equations*, Jour. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 413–439.
- [5] W. Craig, T. Kappeler and W. Strauss, *Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equation*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), 769–860.

- [6] H. Cycon and P. Perry, *Local time-decay of high energy scattering states for the Schrödinger equation*, Math. Z **188** (1984), 125–142.
- [7] S. Doi, *Smoothing effects of Schrödinger evolution groups on Riemannian manifolds*, Duke. Math. Jour. **82** (1996), 679–706.
- [8] T. Hoshiro, *Mourre's method and smoothing properties of dispersive equations*, Commun. Math. Phys. **202** (1999), 255–265.
- [9] T. Hoshiro, *Decay and regularity for dispersive equations with constant coefficients*, Preprint.
- [10] W. Ichinose, *Some remarks on the Cauchy problem for Schrödinger type equations*, Osaka J. Math. **21** (1984), 565–581.
- [11] A. Jensen and P. Perry, *Commutator method and Besov space estimates for Schrödinger operators*, J. Operator Theory **14** (1985), 181–188.
- [12] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. **1** (1989), 481–496.
- [13] S. Mizohata, *Some remarks on the Cauchy problem*, J. Math. Kyoto Univ. **1** (1961), 109–127.
- [14] E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators*, Commun. Math. Phys. **78** (1978), 391–408.
- [15] E. Mourre, *Opérateurs conjugués et propriétés de propagation*, Commun. Math. Phys. **91** (1983), 279–300.
- [16] P. Sjölin, *Regularity of solutions to the Schrödinger equation*, Duke. Math. Jour. **55** (1987), 699–715.
- [17] L. Vega, *The Schrödinger equation: pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 874–878.