数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 76-87

「熱の解析的理論」 Fourier展開公式とFourier積分公式 そのFourier自身による証明

明治大学付属中野八王子高等学校　西村重人 (Shigeto Nishimura)
Nakano-Hachioji Senior High Scool Attached to Meiji University

Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1830) は1822年に自らの熱伝導の研究の集大成として「熱の解析的理論」(“Théorie analytique de la chaleur”,1822) を出版した．Fourier は1802年 Isère 県知事に任命されるが，この頃から熱伝導の研究を初め，最初の論文「熱の伝播について」(“Sur la propagation de la chaleur”,1807) をフランス学士院[*1]に提出した．しかし，この論文の審査員たち[*2]から批判され，出版されることはなかった．学士院は熱の伝播に関する懸賞問題を出すが，これに応えて Fourier は論文「固体の中における熱の運動理論」(“Théorie de mouvement de la chaleur dans les corps solides”,1811) を提出し賞を得た．しかし，この論文も批判され，出版されたのは1824,26年，Fourier が科学アカデミー[*3]の終身書記となってからである．したがって，熱の理論に関する Fourier の研究が公になるのは「熱の解析的理論」の出版を待たなければならなかった。

「熱の解析的理論」は，序論22頁，本論601頁，目次36頁，図版2頁，正誤表2頁，計663頁から構成され，本論は9章433項目[*4]から成っている．1807年の論文がその中核を成し，順序を変えて各所に見られるが，第9章に書かれたことは1807年の論文には見られない．また，Fourier が行ったとされる実験に関しても一切述べられておらず，熱の伝播に関する微分方程式とそれを解くための数学理論が重点的に述べられている．特に重要なのは任意関数の Fourier 展開公式に関することである．これについて Fourier は Fourier 展開公式を発見したものの証明はついにできなかったというのが定説だが，この書物を辛抱強く読むと Fourier が Fourier 展開公式や Fourier 積分公式について複数の証明を行っていることがわかる．

こうしたことが、あまり一般に知られていないのは，一つにはこの書物が大変に読みにくいことにあろう．最初から読むと三角級数に関することが現れるまでに序論を含め190ページもあり，しかも，最初の三角級数展開を得る方法は現代の数学から見ると非常におかしなものである．しかし，この書物によって，Fourier が Fourier 展開公式をどのようにして発見し，確かめ，証明しようとしたかを知ることができる．

Fourier の研究で最も詳しく書かれた書物は I.Grattan-Guiness “Joseph Fourier 1768-1830”(1972) であろう．1807年の論文をすべて収録しており，英語による詳しい説明がなされている．したがって，その後に出版された書物はこれによるところが多いように思える．しかし，1807年の論文は熱の解析的理論の第9章には達していないので，この章で述べられた Fourier 積分公式の証明について，詳しいものは見当たらない．

この講究録は Fourier が Fourier 展開公式と Fourier 積分公式を得た過程とそれをどう証明したかを「熱の解析的理論」をもとに整理してまとめたものである．ただ，紙数の都合で冪級数展開から奇整関数の Fourier 正弦級数展開を得る過程において，無限連立一次方程式を解く部分については省略した．

[*1] l'Institut de France
[*2] Lagrange,Laplace,Lacroix,Monge
[*3] l'Académie des sciences
[*4] 項目433までであるが，実際には項目64が欠番，項目100,300,332は2つずつある．

1 特別な関数の三角級数展開

Fourier は Fourier 展開公式を得る前に，一辺を温度 1(水の沸騰する温度)，その辺を挟む二辺を温度 0(氷の溶解する温度) とした無限長方形 (lame) における熱の伝播を考察することでいくつかの特別な関数について三角級数展開を得ている：

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos(2n-1)x \qquad \text{(第 3 章項目 177)}$$

$$\frac{\pi}{4}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)x \qquad \text{(第 3 章項目 181)}$$

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \qquad \text{(第 3 章項目 182)}$$

$$\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cos nx \qquad \text{(第 3 章項目 183)}$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x \qquad \text{(第 3 章項目 184)}$$

これらはすべて 1807 年の論文 (Art.42〜45) に述べられていたものである．

2 冪級数展開に奇数冪だけを含む奇整関数の正弦級数展開

いくつかの関数の三角級数展開に成功した Fourier は，つぎに Maclaurin 展開式に奇数冪だけを含む奇整関数 $\varphi(x)$ が

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

の形に展開できると仮定して，Fourier 正弦級数を導いていく (第 3 章項目 207〜219)．
$\varphi(x)$ を Maclaulin 展開すると

$$\varphi(x) = x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \frac{x^4}{4!}\varphi^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!}\varphi^{(5)}(0) + \cdots$$

$\varphi(x)$ に与えられた仮定から，$\varphi^{(2n)}(0) = 0$ であり，さらに $\varphi^{(2n-1)}(0) = A_n$ とおくことで得られた無限連立方程式

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + \cdots \\
A_2 &= a_1 + 2^3a_2 + 3^3a_3 + 4^3a_4 + 5^3a_5 + \cdots \\
A_3 &= a_1 + 2^5a_2 + 3^5a_3 + 4^5a_4 + 5^5a_5 + \cdots \\
A_4 &= a_1 + 2^7a_2 + 3^7a_3 + 4^7a_4 + 5^7a_5 + \cdots \\
A_5 &= a_1 + 2^7a_2 + 3^7a_3 + 4^7a_4 + 5^7a_5 + \cdots
\end{aligned}$$

を 14 ページに及ぶ長い計算によって解き，a_i $(i=1,2,\cdots)$ を求めた．紙数の制限からここでは述べることはできないが，その結果

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varphi(x) = \sin x\Big\{&\varphi'(0)+\varphi^{(3)}(0)\Big(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{1^2}\Big)+\varphi^{(5)}(0)\Big(\frac{\pi^4}{5!}-\frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^2}{3!}+\frac{1}{1^4}\Big)\\
&+\varphi^{(7)}(0)\Big(\frac{\pi^6}{7!}-\frac{1}{1^2}\cdot\frac{\pi^4}{5!}+\frac{1}{1^4}\cdot\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{1^6}\Big)+\cdots\Big\}\\
-\frac{1}{2}\sin(2x)\Big\{&\varphi'(0)+\varphi^{(3)}(0)\Big(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{2^2}\Big)+\varphi^{(5)}(0)\Big(\frac{\pi^4}{5!}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^2}{3!}+\frac{1}{2^4}\Big)\\
&+\varphi^{(7)}(0)\Big(\frac{\pi^6}{7!}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi^4}{5!}+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{2^6}\Big)+\cdots\Big\}\\
+\frac{1}{3}\sin(3x)\Big\{&\varphi'(0)+\varphi^{(3)}(0)\Big(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{3^2}\Big)+\varphi^{(5)}(0)\Big(\frac{\pi^4}{5!}-\frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^2}{3!}+\frac{1}{3^4}\Big)\\
&+\varphi^{(7)}(0)\Big(\frac{\pi^6}{7!}-\frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi^4}{5!}+\frac{1}{3^4}\cdot\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{3^6}\Big)+\cdots\Big\}\\
-\frac{1}{4}\sin(4x)\Big\{&\varphi'(0)+\varphi^{(3)}(0)\Big(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{4^2}\Big)+\varphi^{(5)}(0)\Big(\frac{\pi^4}{5!}-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^2}{3!}+\frac{1}{4^4}\Big)\\
&+\varphi^{(7)}(0)\Big(\frac{\pi^6}{7!}-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{\pi^4}{5!}+\frac{1}{4^4}\cdot\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{4^6}\Big)+\cdots\Big\}\\
-\cdots&
\end{aligned}
$$

を得る (第 3 章項目 215(A))．さらに { } 内の計算に工夫をして

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\pi\varphi(x) &= \Big\{\varphi(\pi)-\frac{1}{1^2}\varphi''(\pi)+\frac{1}{1^4}\varphi^{(4)}(\pi)-\frac{1}{1^6}\varphi^{(6)}(\pi)+\cdots\Big\}\sin x\\
&-\frac{1}{2}\Big\{\varphi(\pi)-\frac{1}{2^2}\varphi''(\pi)+\frac{1}{2^4}\varphi^{(4)}(\pi)-\frac{1}{2^6}\varphi^{(6)}(\pi)+\cdots\Big\}\sin 2x\\
&+\frac{1}{3}\Big\{\varphi(\pi)-\frac{1}{3^2}\varphi''(\pi)+\frac{1}{3^4}\varphi^{(4)}(\pi)-\frac{1}{3^6}\varphi^{(6)}(\pi)+\cdots\Big\}\sin 3x\\
&-\frac{1}{4}\Big\{\varphi(\pi)-\frac{1}{4^2}\varphi''(\pi)+\frac{1}{4^4}\varphi^{(4)}(\pi)-\frac{1}{4^6}\varphi^{(6)}(\pi)+\cdots\Big\}\sin 4x\\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

を得る (第 3 章項目 217(B)) が，この $\sin nx$ の係数が積分で表されることに次のようにして気づく．まず，$\sin nx$ に掛けられている { } の中を s とおく：

$$s=\varphi(\pi)-\frac{1}{n^2}\varphi''(\pi)+\frac{1}{n^4}\varphi^{(4)}(\pi)-\frac{1}{n^6}\varphi^{(6)}(\pi)+\cdots$$

この s を π の関数と考えると

$$s+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{d^2s}{d\pi}=\varphi(\pi)$$

を得る．微分方程式

$$s+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{d^2s}{dx}=\varphi(x)$$

は解

$$s=a\cos nx+b\sin nx+n\sin nx\int\varphi(x)\cos nx dx-n\cos nx\int\varphi(x)\sin nx dx$$

をもつ．x に再び π を与えると

$$s=\pm n\int\varphi(x)\sin nx dx\qquad (n \text{ が奇数のとき }+,\ n \text{ が偶数のとき}-)$$

実際に部分積分を繰り返すことによって

$$\pm n\int_0^\pi \varphi(x)\sin nx dx=\varphi(\pi)-\frac{1}{n^2}\varphi''(\pi)+\frac{1}{n^4}\varphi^{(4)}(\pi)-\frac{1}{n^6}\varphi^{(6)}(\pi)+\cdots$$

となるので

$$s=\pm n\int_0^\pi \varphi(x)\sin nx dx \qquad (n\text{ が奇数のとき }+,\ n\text{ が偶数のとき}-)$$

を得る．こうして，Fourier 正弦級数

$$\frac{1}{2}\pi\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sin ix\int_0^\pi \varphi(x)\sin ix \tag{1}$$

に達する．(第３章項目 219(D))．Fourier 正弦級数を得るこの方法は，1807 年の論文にも殆どこのままの形で述べられている (Art.51〜61)．この方法は現代の数学から見れば，かなりおかしなものに見えるが，非常に強い条件を与えた関数については，冪級数から Fourier 正弦級数が得られることを J.Peetre が未発表の論文の中で述べている[*5]．Fourier 余弦級数についてはこの方法による記述はない．係数が積分を用いて表すことができることに気づいた Fourier は，まったく任意の関数 (fonctions entièrement arbitraires) が正弦級数に展開できると主張し始める (第３章項目 220)．

3　三角関数の直交性を用いて，Fourier 展開公式を導く

続いて，三角関数の直交性を利用して，Fourier 正弦級数，Fourier 余弦級数，Fourier 展開公式を導いていく[*6]．

任意関数 $\varphi(x)$ が

$$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\sin jx$$

と展開できたと仮定して，その両辺に $\sin ix$ を掛け，区間 $[0,\pi]$ で積分する．直交性

$$\int_0^\pi \sin ix\sin jx\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & (i=j)\\ 0, & (i\neq j)\end{cases}$$

が成り立つことを示した上で

$$a_i=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin ixdx$$

を求め，Fourier 正弦級数

$$\frac{1}{2}\pi\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sin ix\int_0^\pi \varphi(x)\sin ix\,dx$$

を得る (第３章項目 221)．こんどは，任意関数 $\varphi(x)$ が

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\cos ix$$

[*5] Jaak Peetre "On Fourier's discovery of Fourier series and Fourier integrals"
[*6] この部分に関しては Umberto Bottazzini 著 好田順治訳「解析学の歴史」に詳しい解説がある．

と展開できたと仮定する．この両辺に $\cos jx$ を掛け，区間 $[0,\pi]$ で定積分する．ここでも三角関数の直交性

$$\int_0^\pi \cos ix \cos jx\,dx = \begin{cases} \pi, & (i=j=0) \\ \dfrac{\pi}{2}, & (i=j\neq 0) \\ 0, & (i\neq j) \end{cases}$$

を示して

$$a_0 = \frac{1}{\pi}, \quad a_i = \frac{2}{\pi} \quad (i>0)$$

を得て，Fourier 余弦級数

$$\frac{1}{2}\pi\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(x)dx + \sum_{i=1}^{\infty}\cos ix \int_0^\pi \varphi(x)\cos ix\,dx$$

を得る (第 3 章項目 224(n))．任意関数 $F(x)$ が偶関数 $\varphi(x)$ と奇関数 $\psi(x)$ の和で表され，前者が余弦級数に，後者が正弦級数に展開できることを示して (第 3 章項目 233)，Fourier 展開公式

$$\pi F(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx + \sum_{i=1}^{\infty}\cos ix \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos ix\,dx + \sum_{i=1}^{\infty}\sin ix \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin ix\,dx$$

を得る (第 3 章項目 233(p))．ここまでの結果も既に 1807 年の論文で述べられていた (Art.63,67,83) が，最後の式の導き方はこれとは異なる.「熱の解析的理論」ではさらに計算が続けられ，この式を次のように変形した

$$\pi F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha)\,d\alpha\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\cos ix\cos i\alpha + \sum_{i=1}^{\infty}\sin ix\sin i\alpha\Big\}$$

よって

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha)\,d\alpha\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\cos i(x-\alpha)\Big\}$$

を得る (第 3 章項目 235)．ここに，デルタ関数が現れる．

4 Fourier 展開公式の証明

第 4 章第 2 節「離れた物体間の熱の伝播について」で，初期温度の与えられた $n=2^k$ 個の柱体が円周上に並べられた場合の熱の伝播を考察し，k を無限大にすることによって，Fourier 展開公式を証明する (第 4 章項目 259〜277)．

円周上に n 個の質量 m の同じ柱体が等間隔に置かれているとする．それぞれの柱体の初期温度を a_i $(i=1,\cdots,n)$，t 時間後の温度を α_i とする．このとき，α_i は明らかに t と a_j $(j=1,\cdots,n)$ の関数である．まず，これを表す方程式を決定する．

i 番目の柱体から質量 ω の限りなく小さな薄片が剥がれ $i+1$ 番目 ($i=n$ のときは 1 番目) の柱体に結合して熱を移したとき，$i+1$ 番目の柱体に含まれる熱量は

$$(m-\omega)\alpha_{i+1} + \omega\alpha_i$$

m で割ることで，各柱体の温度は

$$\alpha_{i+1} + \frac{\omega}{m}(\alpha_i - \alpha_{i+1})$$

となる．そして，この薄片が再びもとの柱体に戻るとすれば，$i+1$ 番目の柱体の熱を移すので i 番目の柱体に含まれる熱量は

$$\left\{\alpha_i + \frac{\omega}{m}(\alpha_{i-1} - \alpha_i)\right\}(m-\omega) + \left\{\alpha_{i+1} + \frac{\omega}{m}(\alpha_i - \alpha_{i+1})\right\}\omega$$

となる．ω は微小なので ω^2 の項を省き，m で割ることによって i 番目の柱体の温度は

$$\alpha_i + \frac{\omega}{m}(\alpha_{i-1} - \alpha_i) + \frac{\omega}{m}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

となる．ただし，これら２式においては $i=1$ のとき $i-1$ は n に，$i=n$ のとき $i+1$ は 1 に書き換えるとし，以後の式についても同様とする．このような微小薄片 ω の往復によって各瞬間に熱の伝導が行われると考える．

単位時間を p 等分し，その一つを瞬間 dt と考えると $p\,dt=1$ である．質量の単位の個数を k として，これを p で割ったものを微小薄片 ω とすれば $p\omega = k$ となるから，$\omega = k dt$ を得るので，i 番目の柱体の温度 α_i が瞬間 dt に受ける限りなく小さな増加分を $d\alpha_i$ とすると

$$\begin{aligned} d\alpha_i &= \frac{\omega}{m}(\alpha_{i-1} - \alpha_i) + \frac{\omega}{m}(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \\ &= \frac{\omega}{m}(\alpha_{i-1} - 2\alpha_i + \alpha_{i+1}) \\ &= \frac{k}{m}dt(\alpha_{i-1} - 2\alpha_i + \alpha_{i+1}) \end{aligned}$$

である．これを解くために，b_i，$(i=1,\cdots,n)$，h を未定定数として，$\alpha_i = b_i e^{ht}$ とすれば

$$b_i h = \frac{k}{m}(b_{i-1} - 2b_i + b_{i+1})$$

ここで $q = \dfrac{hm}{k}$ とおくと，漸化式

$$b_i = (q+2)b_{i-1} - b_{i-2}$$

を得る．ところで，$u = \dfrac{2\pi}{n}$ とおくと，正弦の列

$$\sin 0u,\ \sin 1u,\ \sin 2u,\ \sin 3u,\ \cdots,\ \sin(n-1)u$$

は関係式

$$\sin iu = 2\cos u \sin(i-1)u - \sin(i-2)u$$

を満たすので，これと漸化式を比較して

$$\begin{aligned} b_i &= \sin(i-1)u, \quad (i=1,\cdots,n) \\ q+2 &= 2\cos u \end{aligned}$$

とすることができる．この２番目の式より

$$\begin{aligned} q &= -2(1-\cos u) \\ &= -2\,\mathrm{vers}\,u \\ &= -2\,\mathrm{vers}\,\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

である[*7]．$q = \dfrac{hm}{k}$ であったから

$$h = -\frac{2k}{m}\,\mathrm{vers}\,\frac{2\pi}{n}$$

[*7] 正矢，$\mathrm{vers}\,u = 1-\cos u$，Fourier は $\sin.\mathrm{V}(u)$ と記した．

$$\alpha_i = e^{-\frac{2k}{m}t \operatorname{vers}\frac{2\pi}{n}} \sin(i-1)u, \quad (i=1,\cdots,n)$$

を得る (第4章項目 261). さらに余弦の列

$$\cos 0u,\ \cos 1u,\ \cos 2u,\ \cos 3u,\ \cdots,\ \cos(n-1)u$$

についても同様の考察から

$$\alpha_i = e^{-\frac{2k}{m}t \operatorname{vers}\frac{2\pi}{n}} \cos(i-1)u, \quad (i=1,\cdots,n)$$

も得る (第4章項目 263). u の代わりに $u_j = \dfrac{2\pi}{n}(j-1), \quad (j=1,\cdots,n)$ をとれば

$$\alpha_i = e^{-\frac{2k}{m}t \operatorname{vers} u_j} \sin(i-1)u_j, \quad (i=1,\cdots,n)$$

または

$$\alpha_i = e^{-\frac{2k}{m}t \operatorname{vers} u_j} \cos(i-1)u_j, \quad (i=1,\cdots,n)$$

をとることができる (第4章項目 263). これらの解を重ね合わせることによって α_i の一般解

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \sum_{j=1}^{n} \{A_j \sin(i-1)u_j + B_j \cos(i-1)u_j\} e^{-\frac{2k}{m}t \operatorname{vers} u_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{A_j \sin\left((i-1)(j-1)\frac{2\pi}{n}\right) + B_j \cos\left((i-1)(j-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right\} e^{-\frac{2k}{m}t \operatorname{vers}\frac{2\pi}{n}(j-1)}
\end{aligned}$$

を得る (第4章項目 264,266(μ)). ここで, $A_j, B_j, (j=1,\cdots,n)$ は任意の定数である.

この式で $t=0$ とすれば初期値 a_i を得なければならないから, そのことから

$$A_j = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \sin\left\{(i-1)(j-1)\frac{2\pi}{n}\right\}, \qquad B_j = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \cos\left\{(i-1)(j-1)\frac{2\pi}{n}\right\}$$

(第4章項目 271). よって

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \\
&+ \left\{\frac{2}{n}\sin\left((i-1)\frac{2\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} a_j \sin\left((j-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{n}\cos\left((i-1)\frac{2\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} a_j \cos\left((j-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right\} e^{-\frac{2k}{m}t \operatorname{vers}\frac{2\pi}{n}} \\
&+ \left\{\frac{2}{n}\sin\left((i-1)\frac{2\cdot 2\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} a_j \sin\left((j-1)\frac{2\cdot 2\pi}{n}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{n}\cos\left((i-1)\frac{2\cdot 2\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} a_j \cos\left((j-1)\frac{2\cdot 2\pi}{n}\right)\right\} e^{-\frac{2k}{m}t \operatorname{vers}\frac{2\cdot 2\pi}{n}} \\
&+ \cdots \\
&+ \left\{\frac{2}{n}\sin\left((i-1)\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} a_j \sin\left((j-1)\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{n}\cos\left((i-1)\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} a_j \cos\left((j-1)\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right\} e^{-\frac{2k}{m}t \operatorname{vers}\frac{2(n-1)\pi}{n}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

を得る (第4章項目 273(ε)). ここに a_j $(j=1,\cdots,n)$ は柱体の初期温度, k は伝導度, m は質量, n は柱体の個数, t は経過時間を表す.

このようにして, 円周上の n 個の質点での温度を得た後, これを連続した物体の熱伝導へ発展させる. 柱体の個数を $n=2,4,8,\cdots$ と増やし, その長さを $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \cdots$ とし, 伝導度を $k=g, 2g, 4g, \cdots$ と仮定する.

(2) 式で, 柱体 m を限りなく小さな要素 dx と書き, 物体の個数 n に $\frac{2\pi}{dx}$, 伝導度 k に $\frac{gn}{2}$, すなわち, $\frac{\pi g}{dx}$ を代入する. 初期温度 a_j は弧 x の任意関数 $f(x)$ で表され, $j-1$ は $\frac{x}{dx}$ に置き換えられる. t 時間後の各物体の温度 α_i $(i=1,\cdots n)$ は弧 x と時間 t に依存する関数 $v=\varphi(x,t)$ である. そして, 物体の場所を示す $i-1$ を $\frac{x}{dx}$ に置き換える. すなわち

$$n,\ m,\ k,\ a_j,\ j-1,\ \alpha_i,\ i-1$$

のそれぞれに

$$\frac{2\pi}{dx},\ dx,\ \frac{\pi g}{dx},\ f(x),\ \frac{x}{dx},\ \varphi(x,t),\ \frac{x}{dx}$$

を代入する. また,

$$\begin{aligned}\mathrm{vers}(l\,dx) &= 1-\cos(l\,dx)\\ &= 1-\left\{1-\frac{(l\,dx)^2}{2!}+\frac{(l\,dx)^4}{4!}-\cdots\right\}\end{aligned}$$

であるから $\mathrm{vers}(l\,dx)$ は $\frac{(l\,dx)^2}{2}$ $(l=1,2,3,\cdots,n-1)$ となる. すると, (2) 式の右辺で

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_j,\ \sin\Big((i-1)\frac{2\pi}{n}\Big),\ \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}a_j\sin\Big((j-1)\frac{2\pi}{n}\Big),\ \cos\Big((i-1)\frac{2\pi}{n}\Big),\ \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}a_j\cos\Big((j-1)\frac{2\pi}{n}\Big)$$

はそれぞれ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx,\ \sin x,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin x dx,\ \cos x,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos x dx$$

になる. これによって

$$\begin{aligned}\varphi(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\Big(\sin x\int_0^{2\pi}f(x)\sin x dx+\cos x\int_0^{2\pi}f(x)\cos x dx\Big)e^{-g\pi t}\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\Big(\sin 2x\int_0^{2\pi}f(x)\sin 2x dx+\cos 2x\int_0^{2\pi}f(x)\cos 2x dx\Big)e^{-2^2 g\pi t}\\ &\quad+\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

を得る (第4章項目 277(E)). $t=0$ とすることによって Fourier 展開公式

$$\pi f(x)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}f(x)dx+\sum_{i=1}^{\infty}\sin ix\int_0^{2\pi}f(x)\sin ix dx+\sum_{i=1}^{\infty}\cos ix\int_0^{2\pi}f(x)\cos ix dx$$

を得る (第4章項目 278,3°).

こうして, Fourier は第3章で自らが得た Fourier 展開公式を環状に並べられた 2^n 個の質点がある離散的な場合の極限として証明したのである. これもまた, 1807 年の論文ですでに述べられていたが離散的な場合が Art.6～11 に, 連続的な場合への発展が Art.95,96 に書かれており, 前述の冪級数展開から Fourier

正弦級数を得る方法や三角関数の直交性を用いる方法がその間に述べられていた．
さらに，(3) 式の計算を進めて

$$2\pi\varphi(x,t)=\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\cos i(\alpha-x)e^{-i^2kt}d\alpha$$

$t=0$ とおいて

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\cos i(\alpha-x)d\alpha$$

を得る (第 4 章項目 279(B)) が，ここで，Fourier 積分公式の萌芽が現れる．

5 Fourier 積分公式

微分方程式

$$\frac{du}{dt}=k\frac{d^2u}{dx^2}$$

を初期条件 $v=F(x)$ で $F(x)=F(-x)$ を満たす場合について考える (第 9 章項目 345,346)．
特殊解 $ae^{-kq^2t}\cos qx$ の重ね合わせによって

$$u=a_1e^{-kq_1^2t}\cos q_1x+a_2e^{-kq_2^2t}\cos q_2x+a_3e^{-kq_3^2t}\cos q_3x+\cdots$$

ここで，$q_i=i\,dx$ とし，$a_i=g(q_i)dq$ $(i=1,2,3,\cdots)$ となる関数 $g(q)$ をとれば

$$u=\int_0^{\infty} g(q)e^{-kq^2t}\cos qxdq$$

と表すことができる．この関数 $g(q)$ をまず決定する．この式で $t=0$ とおくと

$$F(x)=\int_0^{\infty} g(q)\cos qxdq$$

$ndq=1$ とすると $F(x)$ は

$$F(x)=dq\,g(q_1)\cos q_1x+dq\,g(q_2)\cos q_2x+dq\,g(q_3)\cos q_3x+dq\,g(q_4)\cos q_4x+\cdot$$

この両辺に $dx\cos q_jx$ を掛けて区間 $(0,n\pi)$ で積分すると三角関数の直交関係によって

$$\int_0^{n\pi} F(x)\cos qxdx=dq\,g(q_j)\frac{1}{2}n\pi$$

を得るが $ndq=1$ であるから

$$\frac{\pi}{2}g(q_j)=\int_0^{n\pi} F(x)\cos qxdx$$

$n\to\infty$ とすることによって，一般に

$$\frac{\pi}{2}g(q)=\int_0^{\infty} F(x)\cos qxdx$$

$$g(q) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(x)\cos qx dx$$

これより

$$\frac{\pi}{2}F(x) = \int_0^\infty\left\{\int_0^\infty F(x)\cos qx dx\right\}\cos qx dq \tag{4}$$

を得る (第 9 章項目 346(ε)).

その次に前に得られた奇関数 $\varphi(x)$ の正弦級数への展開式

$$\frac{\pi}{2}\varphi(u) = \sin u\int_0^\pi \varphi(u)\sin u du + \sin 2u\int_0^\pi \varphi(u)\sin 2u du + \sin 3u\int_0^\pi \varphi(u)\sin 3u du + \cdots$$

において，$u = \dfrac{x}{n}$，$n = \dfrac{1}{dq}$ として第 i 項に代入すると

$$\sin\frac{ix}{n}\int_0^{n\pi}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\sin\frac{ix}{n}\cdot\frac{1}{n}dx$$

ここで，$\varphi\left(\dfrac{x}{n}\right)$ を $f(x)$ と書き，$i = \dfrac{q}{dq}$ とすれば

$$\sin qx dq\int_0^{n\pi} f(x)\sin qx dx$$

このことから

$$\frac{\pi}{2}f(x) = \int_0^\infty\left\{\int_0^\infty f(x)\sin qx dx\right\}\sin qx dq \tag{5}$$

を得る (第 9 章項目 359(e)).

$f(x)$ は奇関数，$F(x)$ は偶関数であるから，これらは条件

$$f(\alpha) = -f(-\alpha) \qquad\qquad F(\alpha) = F(-\alpha)$$

を満たしているので (4) 式と (5) 式はそれぞれ

$$\pi f(x) = \int_0^\infty\left\{\int_{-\infty}^\infty f(\alpha)\sin q\alpha d\alpha\right\}\sin qx dx$$
$$\pi F(x) = \int_0^\infty\left\{\int_{-\infty}^\infty F(\alpha)\cos q\alpha d\alpha\right\}\cos qx dx$$

と書ける．任意関数 $\varphi(x)$ は奇関数と偶関数の和，すなわち

$$\varphi(x) = f(x) + F(x)$$

と表すことができるので

$$\begin{aligned}\pi\varphi(x) &= \pi\{f(x) + F(x)\}\\ &= \int_0^\infty\left\{\int_{-\infty}^\infty f(\alpha)\sin q\alpha d\alpha\right\}\sin qx dx + \int_0^\infty\left\{\int_{-\infty}^\infty F(\alpha)\cos q\alpha d\alpha\right\}\cos qx dx\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\sin q\alpha = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos q\alpha = 0$$

であることに注意すると

$$\pi\varphi(x) = \int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(f(\alpha)+F(\alpha))\sin q\alpha d\alpha\right\}\sin qx dx + \int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(f(\alpha)+F(\alpha))\cos q\alpha d\alpha\right\}\cos qx dx$$
$$= \int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\sin q\alpha d\alpha\right\}\sin qx dx + \int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cos q\alpha d\alpha\right\}\cos qx dx$$

すなわち

$$\pi\varphi(x)\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}(\sin qx\sin q\alpha + \cos qx\cos q\alpha)dq\right\}\varphi(\alpha)d\alpha$$

ゆえに，積分公式

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\left\{\int_0^{\infty}\cos q(x-\alpha)dq\right\}d\alpha$$

を得る (第9章項目 361(E)). この｛　｝の中の結果は現在デルタ関数 (Dirac 関数) と呼ばれるものの積分表示である.

6 Fourier 積分公式の証明

Fourier は第9章項目 415,416 で Fourier は自らの Fourier 展開公式に対する厳密な検討を加えている. Fourier 積分公式

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\cos(px-p\alpha)d\alpha\right\}dp$$

は，p に関する積分を先に行えば，極限において

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\frac{\sin(p\alpha-px)}{\alpha-x}d\alpha$$

が成り立つことと同等である.

これを証明するために，まず第9章項目 415 では積分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin px}{x}dx$ について述べている. まず，Fourier は第9章項目 356 で

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

を得るが，$z = px$ とすれば

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin px}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz = \frac{\pi}{2}$$

となることに注意する。$\omega > 0$ ならば $p \to \infty$ とするとき，曲線 $y = \frac{\sin px}{x}$ が x 軸と囲む面積を考えれば，$x > \omega$ において隣り合う面積同士が相殺するので極限において

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin px}{x}dx = \int_0^{\omega}\frac{\sin px}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

を得ることを示している. そのつぎに問題となっている積分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\frac{\sin(p\alpha-px)}{\alpha-x}d\alpha$$

を考える．x と α の距離 $\alpha - x$ が限りなく小さいとき，$f(\alpha)$ の値はほぼ変化することなく $f(x)$ に等しく，したがって $f(\alpha)$ は積分記号の外に出すことができる．また，$x > \omega$ の積分は上と同じ理由で 0 に収束する．したがって，ω を限りなく小さい量とするとき，$t = \alpha - x$ と置換すれば (Fourier 自身はこのような置換は書かなかったが)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\frac{\sin(p\alpha - px)}{\alpha - x}\,d\alpha &= \frac{1}{\pi}f(x)\int_{-\omega}^{\omega}\frac{\sin pt}{t}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}f(x)\int_{0}^{\omega}\frac{\sin pt}{t}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}f(x)\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

を得るのである．そこから最後に

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\frac{2\sin p(\alpha - x)}{\alpha - x}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(px - p\alpha)\,dp\right\}d\alpha
\end{aligned}
$$

を結論する (第 9 章項目 416(B))．

7　任意関数について

一般に「関数」というものについて，Fourier は第 9 章項目 417 で次のように述べている．
“En général, la fonction fx représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire. L'abscisse x pouvant recevoir une infinité de valeurs, il y a un pareil nombre d'ordonnées fx. Toutes ont des valeurs numériques *actuelles*, ou positives, ou négatives, ou nulles. On ne suppose point que ces ordonnées soient assujetties à une loi commune ; elles se succèdent d'une manière quelconque, et chacune d'elles est donnée comme le serait une seule quantité. (一般に，関数 $f(x)$ は各々が任意の値，すなわち，縦座標の列を表している．横座標 x は無数の値をとることができ，同じ個数の縦座標 $f(x)$ がある．すべては**実在の**数値，すなわち，正または負または 0 の数値をもつ．我々はこれらの縦座標が共通の法則に従っていることを仮定しない．それらは任意の方法で接続され，そしてそれらの各々は，唯一つの量であるかのように与えられる．)”
この中に出てくる “des valeurs numériques actuelles” とは正確な定義はできないものの実数を表現しようとしたものであろう．Fourier は定義域全体で共通な法則に従う関数だけを考えるのではなく，ある区間ごとには規則的な関数をつなぎ合わせたような関数を任意関数と考えたようである．すなわち，現在の区分的実解析関数である．