数理解析研究所講究録 1259 巻 2002 年 53-59

Rank Reducing Matrix Norms

北海道教育大札幌校　大久保 和義 (Kazuyoshi Okubo)

Mathematics Laboratory,

Hokkaido Univ. of Education

Joint work with H.J.Woerdeman (The College of William and Mary)

1. はじめに

R_p でランクが p 以下の行列全体の集合を表す, すなわち,

$$R_p := \{X \in M_{mn} \mid \mathrm{rank}(X) \leq p\}$$

とする。行列空間 M_{mn} 上のノルム $\|\cdot\|$ に対して、M の pth 近似 を

$$d_{\|\cdot\|}(M, R_p) := \min\{\|M - X\| : X \in R_p\}$$

で定義する。よく知られていることとして、M_n上のスペクトラルノルム $\|\cdot\|_\infty$ に対しては、$d_{\|\cdot\|_\infty}(M, R_p) := s_{p+1}(M)$ (ただし、$s_i(M)$ は M の i 番に大きい singular value) となる。

$$P_{R_p}(M) = \{X \in R_p \mid \|M - X\| = d_{\|\cdot\|}(M, R_p)\}$$

とする。M_{mn}上のノルム $\|\cdot\|$ また、$M \in M_{mn}$ に対して $M_p \in P_{R_p}(M)$ で $\mathrm{rank}(M - M_p) = \max\{\mathrm{rank}M - p, 0\}$ ととれるとき、$\|\cdot\|$ は rank p reducing と呼ばれる。また、すべての $1 \leq p \min\{m, n\}$ に対して p reducing のとき、$\|\cdot\|$ は rank reducing と呼ばれる。

M_{mn} 上の norm $\|\cdot\|$ が ***unitarily invariant*** とは

$$\|UMV\| = \|M\|$$

がすべての $M \in M_{mn}$ とすべての unitary matrices $U \in M_m$, $V \in M_n$ に対して成り立つとする。

Unitarily invariant norm は symmetric gauge function Φ を用いて

$$\|M\| = \Phi(s_1(M), s_2(M), \cdots, s_{\min(m,n)}(M))$$

で表すことができ，これを使うと実際には、M_n 上の unitarily invariant norm は、rank rerducing であることがわかる。

$\|\cdot\|$ を M_{mn} 上の operator norm とする。すなわち、$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$をそれぞれ、$\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ 上のノルムとして $\|\cdot\|$ を

$$\|M\| = \max_{\|x\|_2=1} \|Mx\|_1$$

で定義する。$\|\cdot\|$ が rank reducing かどうかという問題は、$(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$ の部分空間上への "metric projection" が "linear selection" をもつかという問題に関係する。本講演では、これらの問題に関する結果、特に、numerical radius に関する近似に関する結果について紹介する。

2. 結果

$(V, \|\cdot\|_V)$: Banach speace, $W \subset V$: subspace とする。W が *proximinal* (resp. *Chebyshev*) とは $\forall\, v \in V$,

$$\Pi_W(v) := \{y \in W \ : \ \|v-y\|_V = \inf_{w\in W} \|v-w\|_V\} \neq \emptyset \text{ (resp. a singleton)}$$

であることとする。

$\Pi_W : V \to 2^W$ は *metric projection* と呼ばれる。
また, $\Pi_W : V \to 2^W$ が *metric projection* であるとして,

$P : V \to W$ が *selection* for Π_W であるとは,
$\Leftrightarrow^{def}$
$P(v) \in \Pi_W(v)$ for $\forall v \in V$ であることとする。

P が *linear selection* for Π_W とは,
$\Leftrightarrow^{def}$
P が selection かつ linear であることとする。

Hilbert space では selection として W 上の orthogonal projection だけなので, それは linear selection である。

$3 \le \dim V < \infty$ のときは逆もいえる。すなわち, すべての部分空間に対して metric projection が linear selection をもつときはその空間は Hilbert space に isometric である。[Stoer (1967)].

実際には次のようにもっと強いことがいえる。

もし, $3 \le \dim V < \infty$ として, 次元 p の部分空間すべてに対して metric projection が linear selection をもつとするような p $(p \le \dim V - 2)$ が存在すれば, V は Hilbert space に isometric である。[D. Amir (1986)].

さらに, codimension 1 のいかなる部分空間の metric projection もは linear selection をもつことが知られている。[N. Aronszajn and K.T. Smith (1954), F. Deutsch

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{C}^n$ に対して $|x| := (|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)^t$ とする。
$\|\cdot\|$ が $\mathbb{C}^n$ 上の *absolute norm* とは
$\Leftrightarrow^{def}$
$\|x\| = \| |x| \|$ を満たすこととする。

$\|\cdot\|$: operator matrix norm が *absolute* とは,
$\Leftrightarrow^{def}$
The image space のノルムが absolute vector norm のときとする。

Lemma 1. $\|\cdot\|$ を M_{mn} 上の *absolute operator norm* とする。もし，rank$M \geq p$ ならば M は *rank p* の *closest rank* $\leq p$ *approximant* をもつ。

Theorem 2. $\|\cdot\|$ を M_{mn} 上の *absolute operator norm* とすると、$\|\cdot\|$ は *rank* $m-1$ *reducing norm* である。

Proof. $M \in M_{mn}$ で rank$M = m$ としてよい。Lemma 1 から、$\|\cdot\|$ が absolute operator norm とすると $\exists A \in M_{mn}$ で次の条件を満たす。
1 rank$A = m-1$
2 $\|A - M\| = d_{\|\cdot\|}(M, R_{m-1})$
$N := Im(A)$ とすると、codim$(N) = 1$, すなわち, Π_N は linear selection をもつ。従って, $\exists P$; N 上の linear projection で

$$\|x - Px\|_1 = \inf_{n \in N} \|x - n\|_1 \ (x \in C^n)$$

を満たす。このとき, $\|M - PM\| = d_{\|\cdot\|}(M, R_{m-1})$ かつ, rank$(M - PM) = 1$ となる。

Corollary 3. *(B.I. Wainberg and H. J. Woerdeman)*
$\|\cdot\|$ を M_n 上の *maximum row length norm* とする。$1 \leq k, l \leq n$ として $\mathbb{Q} = \{Q = (q_{ij}) \in M_n(R) \mid q_{ij} = 0 \ (i > l \ or \ j > k)\}$ とする。このとき、$M \in M_n(R)$ に対して、M の *singularity radius* $\mu_{\mathbb{Q},\|\cdot\|}(M)) = \min_{\Delta \in \sigma_{\mathbb{Q}}(M)} \|\Delta\|$ は *rank*(Δ)= 1 で得られる。ここで、$\sigma_{\mathbb{Q}}(M) = \{\Delta \in \mathbb{Q} \mid \det(M - \Delta) = 0\}$ とする。

Theorem 4. $\|\cdot\|_1$ が *inner product norm* ならば、*operator norm* は *rank reducing* である。

Theorem 5 (Yu. I. Lyubich). $n \geq 3$ として, $\|\cdot\|$ を $\mathbb{C}^n$上の *norm* によって *induce* された M_n 上の *operator norm* とする。このとき, $d_{\|\cdot\|}(I, R_p) = \|I - X\|$ となるような *rank p* の *matrix X* が存在すための必要十分条件は *rank* $n-p$ の *norm 1 projection P* が存在することである。

Proof. $\Longrightarrow$) $X := I - P$ とおくとよい。

$Q := 1 - X$ とおく。このとき，$\dim \mathrm{Ker} Q = n - p$，かつ $\mathrm{Ker} Q = \{x \in C^n \mid Qx = x\}$ で，$||Q|| = 1$ から，$\exists P$: Ker$X$ 上の projection で $||P|| = 1$ となる。実際，Ergodic Theorem から

$$P = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} Q^j$$

であり，$\mathrm{rank} P = n - p$ となる。

Remark 6. *Operator matrix norm* は必ずしも *rank p reducing* でない。

Example $\mathbf{R}^3$ で $||\cdot||'$ を単位球を正 12 面体とする norm とする。このとき，$||P|| = 1$ かつ $\mathrm{rank} P = 2$ なる projection は存在しない。[Singer(1970)]

したがって，$||\cdot||$ を $||\cdot||'$ で induce された M_3 上の norm とすると，$||I - X|| = d_{||\cdot||}(I, R_1)$ ならば，$X = 0$ であることが分かる。

[数域半径の場合]

Let $A \in M_n$. $W(A)$ で A の数域

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle \mid ||x|| = 1\}$$

を表し $w(A)$ で A の数域半径

$$w(A) = \sup_{||x||=1} |\langle Ax, x \rangle|$$

を表す。

また，

$$d_w(M, R_p) = \min\{w(M - X) \ : \ X \in R_p\}$$

とする。

数域半径に関しては次のことは知られている。[H(1968)]

(1) $w(U^* AU) = w(A)$ (unitary similarity invariant).

(2)

$$w(\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \leq w(\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}) \leq w(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{22} \end{bmatrix}).$$

(3) $\frac{1}{2}||A||_\infty \leq w(A) \leq ||A||_\infty$.

By (3) から，

$$\frac{1}{2} s_{p+1}(A) \leq d_w(A, R_p) \leq s_{p+1}(A)$$

であることは分かる。

Lemma 7. p を自然数として，$M \in M_n$ を $\mathrm{rank} M \geq p$ を満たすとする。このとき，数域半径に関して，$\mathrm{rank} X = p$ なる M の *closest rank* $\leq p$ *approximant* X が存在する。

Proof. $p \in \{1, \ldots, n\}$ としよう。仮に $d_w(M, R_{p-1}) < d_w(M, R_p)$ ならよい。$d_w(M, R_{p-1}) = d_w(M, R_p)$ とする。$X \in R_p$ を $w(\cdot)$ に関する M の closest rank $\leq p$ approximant とする。

$$U^*(M-X)U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

となるような，unitary matrix $U \in M_n$ が存在する。ここで，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ は $M - X$ の固有値である。Y_i を $U^*(M-X)U$ の始めの i 行を保ち，後の行を 0 とする行列として，$X_i = X + UY_iU^*$ とする。このとき，

$$w\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \leq w\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \leq w\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = w(A)$$

だから，

$$w(M - X_i) \leq w(M - X) = d_w(M, R_p)$$

がすべての $i \in \{0, \ldots, n\}$ についていえる。rank X_i と rank X_{i+1} の差は高々1で，rank $X_0 \leq p$, $\mathrm{rank} X_n =$ rank $M \geq p$ だから，ある $i \in \{0, \ldots, n\}$ で $\mathrm{rank} X_i = p$ を得る。

Theorem 8. M_n 上の数域半径は *rank* $n-1$ *reducing* である。

Proof. Theorem 2 のようにできる。

Lemma 9. $A \in M_n$ とすると $d_w(A, R_{n-1}) \geq \mathrm{dist}(0, W(A))$ である。ただし、$\mathrm{dist}(\alpha, Q)$ は α から集合 $Q \subset \mathbb{C}$ への距離を表す。

Theorem 10. A を固有値が$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0 \geq -\lambda_{k+1} \geq \cdots \geq -\lambda_n$, $\lambda_1, \lambda_n \neq 0$ となるエルミート行列とする。このとき、

$$d_w(A, R_1) = \max\{\lambda_2, \lambda_{n-1}, \frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}\}$$

ただし、$k = 1$ のとき、$\lambda_2 = 0$, $k = n-1$ のとき、$\lambda_{n-1} = 0$ とする。

Proof. はじめに $n = 2$ の場合を考えよう。$a, b > 0$ として $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$ とする。A を rank が 1 の行列の和として

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ -\frac{b(a-p)p}{aq} & -\frac{b(a-p)}{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a-p & -q \\ \frac{b(a-p)p}{aq} & -\frac{b}{a}p \end{bmatrix}$$

とする。$X_1 = \begin{bmatrix} p & q \\ -\frac{b(a-p)p}{aq} & -\frac{b(a-p)}{a} \end{bmatrix}$ として, Theorem 8 から, $d_w(A, R_1) = \min_{p,q} w(X_1)$ となる。したがって, $\min_{p,q} w(X_1) = \frac{ab}{a+b}$ であることを示すとよい。$w(X_1) \geq \min_p \max\{|p|, \frac{b(a-p)}{a}\}$ であることは簡単で, この最小値は $p = \frac{ab}{a+b}$ で得られる。これより, $w(X_1) \geq \frac{ab}{a+b}$ となるが, 一方, $q = -\frac{ab}{a+b}$ とすると, $X_1 = \frac{ab}{a+b}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ で

$$w(X_1) = \frac{ab}{a+b} w\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{ab}{a+b}$$

となる。

次に, $n \geq 3$ として $A \in M_n$ が定理の仮定を満たすとしよう。このとき, $\frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n} \leq \min\{\lambda_1, \lambda_n\}$ と $a \geq a' > 0, b \geq b' > 0$ ならば $\frac{a'b'}{a'+b'} \leq \frac{ab}{a+b}$ であることが分かる。また, 一般に, X' を X の principal submatrix とすると, $w(X) \geq w(X')$ だから,

$$\begin{aligned} d_w(A, R_1) &= \min_{X \in R_1} w(A - X) \\ &\geq \max_{A':2\times 2 \text{ principal submatrix of A}} \min_{X' \in R_1} w(A' - X') \\ &= \max\{\lambda_2, \lambda_{n-1}, \frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}\} \end{aligned}$$

となる。

一方, $A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_n \end{bmatrix}$ ならば, 2×2 行列の場合に還元し, $d_w(A', R_1) = w(A' - X') = \frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}$ となる。ここで, X' は A' の closest rank ≤ 1 approximant とする。$X = X' \oplus 0 \in M_n$ とおくと, $X \in R_1$ で $w(A - X) = \max\{\lambda_2, \lambda_{n-1}, \frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}\}$ である。

Proposition 11. $a \in \mathbb{C}$ とする。$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ならば、$d_w(A, R_1) = \frac{1}{2}s_2(A) = \frac{1}{4}(\sqrt{4+|a|^2} - |a|)$ である。

Proposition 12.
$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする。
$0 \leq a \leq 1$ ならば、$d_w(A, R_1) = 1 - \frac{a}{2}$ であり、
$a > 1$ ならば、$d_w(A, R_1) = \frac{1}{2a}$ である。

References

[A] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Operator Theory: Adv. Appl. OT 20, Birkhaüser, Basel, 1986.

[AS] N. Aronszajn and K. T. Smith, Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. of Math.* **60** (1954), 345-350.

[D] F. Deutsch, Linear selections for the metric projection, *J. Funct. Anal.* **49** (1982), 269-292.

[H] J. A. R. Holbrook, On the power-bounded operators of Sz-Nagy and Foiaş, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **29** (1968), 299-310.

[OW] K. Okubo and H. Woerdeman, Rank Reducing Matrix Norms, *Linear and Multilinear Algebra*, to appear.

[Si] I. Singer, *Bases in Banach Spaces*, v.1, Springer-Verlag, 1970.

[S] J. Stoer, Über die Existenz Linearer Approximationsoperatoren, in "Funktionalanalysis Approximationstheorie, Numerische Matematik" (L. Collatz, G. Meinardus, and H. Unger, Eds.), Birkhaüser, Basel, 1967.

[WW] B. I. Wainberg and H. J. Woerdeman, The maximum row length nonsingularity radius, *Linear Algebra Appl.* **247** (1996), 251-263.