数理解析研究所講究録 1261 巻 2002 年 163-171

4変数調和関数の Fourier-Ehrenpreis 積分表示

千葉工業大学　山根英司[1]
Hideshi YAMANE, Chiba Institute of Technology

1 イントロダクション

$z=(z_1,\ldots,z_n)$ が $z^2=\sum_{j=1}^n z_j^2=0$ をみたすとする．このとき $e^{-i\langle z,t\rangle}$ が $t=(t_1,\ldots,t_n)$ の調和関数であることはすぐ分かる．Ehrenpreis の基本原理によれば任意の調和関数はこの型の調和な指数関数の重ね合わせ，すなわち台が $\{z\in\mathbf{C}^n; z^2=0\}$ に含まれるある測度に関する積分で表される．そのような測度の存在証明は Hahn-Banach の定理を用いた抽象的なものである．

他方，多変数関数論の積分公式から基本原理の具体的バージョンが得られる．それらは測度の代わりにカレントを用いて定式化されている．文献としては [1], [2], [6], [9], [10], [14] などがある．

著者は [2] と [10] に刺激されて，調和関数を Dirichlet 境界値と調和な指数関数で表す積分公式を求めた．

$B_n=\{t\in\mathbf{R}^n; |t|=(\sum_{j=1}^n t_j^2)^{1/2}=1\}$ を $\mathbf{R}_t^n$ の開単位球とし，$u(t)\in\mathcal{C}^0(\bar{B}_n)$ は B_n で調和とする．その Dirichlet 境界値を $v\in\mathcal{C}^0(S^{n-1})$ と表す．$V=\{z\in\mathbf{C}^n; z^2=\sum_{j=1}^n z_j^2=0\}$ とおき，V の smooth locus $V\setminus\{0\}$ に沿う積分のカレントを $[V]$ とする．$\bar\partial[1/z^2]$ を [4] や [8] の留数カレントとすると $[V]=(2\pi i)^{-1}\bar\partial[1/z^2]\wedge d(z^2)$ である．

$y=\operatorname{Im} z$ とおく．

$n=2$ のときは

$$u(t)=[V]\cdot\frac{-1}{16\pi^2}v(y/|y|)(2e^{-i\langle z,t\rangle}-1)e^{i\langle z,y/|y|\rangle}\bar\partial\partial|y|,\ t\in B_2$$

である．ここで下つきドットはカレントと微分形式のペアリングを表す．

$n=3$ のときは

$$u(t)=[V]\cdot\frac{1}{4\pi^2}\left(2-\frac{1}{|y|}\right)v(y/|y|)e^{-i\langle z,t-y/|y|\rangle}(\bar\partial\partial|y|)^2,\ t\in B_3$$

である．

---

[1] 2002 年 4 月より関西学院大学理工学部物理学科, Kwansei Gakuin University

$n=4$ のときは

$$u(t)=[V]\cdot\frac{i}{6\pi^3}\left(1-\frac{1}{|y|}\right)v(y/|y|)e^{-i\langle z,t-y/|y|\rangle}(\bar\partial\partial|y|)^3,\quad t\in B_4$$

である．この式の証明を後で与える．

おそらく $n\geq 5$ のときも

$$u(t)=[V]\cdot\left(A_n+\frac{B_n}{|y|}\right)v(y/|y|)e^{-i\langle z,t-y/|y|\rangle}(\bar\partial\partial|y|)^{n-1},\quad t\in B_n$$

をみたす定数 A_n と B_n が存在すると思われるが, 証明はまだ出来ていない.

2 幾何的考察

$\mathbf{C}^4_z, z=(z_1,z_2,z_3,z_4)$, において, $V=\{z\in\mathbf{C}^4; z^2=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=0\}$ を考える．原点は特異点である．

V(の smooth locus の任意の稠密開集合) に沿う積分のカレントを $[V]$ と表す.

$x_j=\mathrm{Re}z_j, y_j=\mathrm{Im}z_j(1\leq j\leq 4)$, $x=(x_1,x_2,x_3,x_4), y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ とおく．方程式 $z^2=|x|^2-|y|^2+2i\langle x,y\rangle=0$ は $|x|-|y|=\langle x,y\rangle=0$ と同値である. $y\neq 0$ を固定するとき, 対応する x たちの全体は S^2 と微分同相である．さらに S^2 は極座標を通じて $S^1\times I$ と大体同一視される．ここで $S^1=\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ であり I は開区間 $]0,\pi[$ である．S^2 から南極と北極を取り除かないと本当の同一視にはならないが，それは大した問題ではない. というのは，我々は積分を計算したいのであって，測度 0 の集合はどうでもいいからである.

要約すると V は大体 $\mathbf{R}^4_y\times S^1_\theta\times I_\phi$ みたいなものである．このアイデアを手直しして，きちんとした定式化をしよう.

$E=\{y\in\mathbf{R}^4_y; y_1y_4\neq 0\}$ とおく．$y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in E$ に対し

$$\begin{aligned}
u &= \frac{|y|}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}(-y_2,y_1,0,0),\\
v &= \frac{|y|}{\sqrt{y_3^2+y_4^2}}(0,0,-y_4,y_3),\\
w &= \left(\frac{y_1\sqrt{y_3^2+y_4^2}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}},\frac{y_2\sqrt{y_3^2+y_4^2}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}},-\frac{y_3\sqrt{y_1^2+y_2^2}}{\sqrt{y_3^2+y_4^2}}-\frac{y_4\sqrt{y_1^2+y_2^2}}{\sqrt{y_3^2+y_4^2}}\right)
\end{aligned}$$

とおく．明らかに $\{y,u,v,w\}$ は直交系で，$|y|=|u|=|v|=|w|$ である．
$\widehat{V}$ を

$$\widehat{V}=\{z\in V\,;\,y_1y_4\neq 0,\,x\neq\pm w\}$$

で定義される V の稠密開集合とする．これは複素多様体であり，自然な向きをもつ．

$\mathcal{C}^\infty$ 級写像

$$\Phi : E\times S^1\times I\to\widehat{V},\quad (y,\theta,\phi)\mapsto z=x(y,\theta,\phi)+iy$$

を $x(y,\theta,\phi)=(u\cos\theta+v\sin\theta)\sin\phi+w\cos\phi$ で定義する．明らかに $|x|-|y|=\langle x,y\rangle=0$ となる．

次の命題により $[V]$ の作用は $E\times S^1\times I$ 上の積分で表される．

命題 1 写像 Φ は微分同相で，向きを保つ．ここで $E\times S^1\times I$ には $\omega=dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3\wedge dy_4\wedge d\theta\wedge d\phi$ で向きをつけている．

証明 Φ が全単射であることは明らかである．
$\widehat{V}$ において (z_1,z_2,z_3) は正則な座標となるから，$dx_1\wedge dy_1\wedge dx_2\wedge dy_2\wedge dx_3\wedge dy_3$ は自然な向きに関して正である．それの Φ による引き戻しは

$$\sin\phi\Big\{(y_3|y|\sin\theta\sin\phi-y_4\sqrt{y_1^2+y_2^2}\cos\phi)^2(y_3^2+y_4^2)^{-1}+y_4^2\Big\}\omega$$

である．(Maple の`difforms`パッケージを用いて計算した．) $\phi\in I=]0,\pi[$, $y_4\neq 0$ だから, ω の係数は正である． **証了**

3 積分作用素

B_4 は $\mathbf{R}^4_t$ の開単位球で，v は $\partial B_4=S^3$ 上の連続関数とする．
2 つの積分作用素 $Q_0,Q_1:\mathcal{C}^0(S^3)\to\mathcal{C}^\infty(B_4)$ を

$$\begin{aligned}Q_0[v](t) &= [V]\,.\,v(y/|y|)e^{-i\langle z,t-y/|y|\rangle}(-2i\bar\partial\partial|y|)^3,\quad t\in B_4,\\ Q_1[v](t) &= [V]\,.\,\frac{v(y/|y|)}{|y|}e^{-i\langle z,t-y/|y|\rangle}(-2i\bar\partial\partial|y|)^3,\quad t\in B_4\end{aligned}$$

で定義する．

補題 1 もし f が y の関数ならば,

$$-2i\bar{\partial}\partial f = \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2} dx_j \wedge dy_j + \sum{}' \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k}(dx_j \wedge dy_k + dx_k \wedge dy_j)$$

が成り立つ. ここで $\sum'$ は $(j,k) = (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)$ に関する和である. 特に $f(y) = |y|$ のときは

$$-2i\bar{\partial}\partial|y| = \sum_{j=1}^{4}\left(\frac{1}{|y|} - \frac{y_j^2}{|y|^3}\right) dx_j \wedge dy_j - \sum{}' \frac{y_j y_k}{|y|^3}(dx_j \wedge dy_k + dx_k \wedge dy_j)$$

である.

証明 単純な計算による. **証了**

命題 2 $E \times S^1 \times I$ 上で

$$\begin{aligned} \Phi^*(-i\langle z, t - y/|y|\rangle) &= \langle y, t\rangle - |y| - i\langle x(y,\theta,\phi), t\rangle, \\ \Phi^*((-2i\bar{\partial}\partial|y|)^3) &= \frac{6\sin\phi}{|y|}\omega \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明 1 つ目の式は $\langle x, y\rangle = 0$ から出る.
$\Phi^*((-2i\bar{\partial}\partial|y|)^3)$ は補題 1 を用いて計算する. **証了**

Q_0 と Q_1 は $(y,\theta,\phi) \in E \times S^1 \times I$ 上の積分と見なして計算できる. 命題 1, 2 から

$$\begin{aligned} Q_0[v](t) &= \int_{E\times S^1\times I} e^{\langle y,t\rangle - |y| - i\langle x(y,\theta,\phi),t\rangle} \frac{6v(y/|y|)\sin\phi}{|y|}\omega, \\ Q_1[v](t) &= \int_{E\times S^1\times I} e^{\langle y,t\rangle - |y| - i\langle x(y,\theta,\phi),t\rangle} \frac{6v(y/|y|)\sin\phi}{|y|^2}\omega \end{aligned}$$

が分かる. $\mathbf{R}^4 \supset E$ の極座標を導入しよう. $q = |y|, s_j = y_j/q\,(j = 1,2,3,4), s = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in S^3 \setminus \{s_1 s_4 = 0\}$ とおく. $d\sigma(s)$ を S^3 の面積測度とする. $\sigma(S^3) = 2\pi^2$ である. q に関する積分は Laplace 型で

$$\begin{aligned} Q_0[v](t) &= \int_{S^3} d\sigma(s) \int_I d\phi \int_{S^1} d\theta \int_0^\infty 6q^2 e^{-q\{1-\langle s,t\rangle + i\langle x/q,t\rangle\}} v(s)\sin\phi\, dq \\ &= \int_{S^3} d\sigma(s) \int_I d\phi \int_{S^1} \frac{12v(s)\sin\phi}{\{1-\langle s,t\rangle + i\langle x/q,t\rangle\}^3} d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_1[v](t) &= \int_{S^3} d\sigma(s) \int_I d\phi \int_{S^1} d\theta \int_0^\infty 6qe^{-q\{1-\langle s,t\rangle + i\langle x/q,t\rangle\}} v(s)\sin\phi dq \\ &= \int_{S^3} d\sigma(s) \int_I d\phi \int_{S^1} \frac{6v(s)\sin\phi}{\{1-\langle s,t\rangle + i\langle x/q,t\rangle\}^2} d\theta\end{aligned}$$

となる．ここで $x = x(y,\theta,\phi)$ であり，x/q は q によらない．なお，$|s| = 1$, $|t| < 1$ だから $1 - \langle s,t\rangle > 0$ である．

ここで

$$\begin{aligned}a &= 1 - \langle s,t\rangle = 1 - s_1t_1 - s_2t_2 - s_3t_3 - s_4t_4 (> 0), \\ b &= \langle u/q,t\rangle = \frac{s_1t_2 - s_2t_1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}, \\ c &= \langle v/q,t\rangle = \frac{s_3t_4 - s_4t_3}{\sqrt{s_3^2 + s_4^2}}, \\ d &= \langle w/q,t\rangle = \frac{(s_1t_1 + s_2t_2)\sqrt{s_3^2 + s_4^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} - \frac{(s_3t_3 + s_4t_4)\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\sqrt{s_3^2 + s_4^2}}\end{aligned}$$

とおく．$1 - \langle s,t\rangle + i\langle x/q,t\rangle = a + i\{(b\cos\theta + c\sin\theta)\sin\phi + d\cos\phi\}$ となるから付録の命題 5 を用いて

$$(1) \qquad Q_0[v](t) = \int_{S^3} \frac{48\pi a v(s)}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2} d\sigma(s),$$

$$(2) \qquad Q_1[v](t) = \int_{S^3} \frac{24\pi v(s)}{a^2+b^2+c^2+d^2} d\sigma(s)$$

を得る．

補題 2 $s \in S^3 \setminus \{s_1s_4 = 0\}, t \in B_4$ と上述の (a,b,c,d) について

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = |s-t|$$

である．

証明 $\{s,\ u/q,\ v/q,\ w/q\}$ が $\mathbf{R}^4$ の正規直交基底をなすから $\langle s,t\rangle^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |t|^2$ である．よって

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+d^2 &= 1 - 2\langle s,t\rangle + \langle s,t\rangle^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &= 1 - 2\langle s,t\rangle + |t|^2 = |s-t|^2\end{aligned}$$

証了

(1), (2) と補題 2 により Q_0 と Q_1 は Poisson 積分に関係があることがわかる．より詳しく述べると

命題 3

$$
\begin{aligned}
Q_0[v](t) &= 48\pi \int_{S^3} \frac{1-\langle s,t\rangle}{|s-t|^4} v(s)d\sigma(s),\\
Q_1[v](t) &= 24\pi \int_{S^3} \frac{1}{|s-t|^2} v(s)d\sigma(s).
\end{aligned}
$$

4 主結果

B_4 と v は §3 の通りとする.
もうひとつの積分作用素 $Q : \mathcal{C}^0(S^3) \to \mathcal{C}^\infty(B_4)$ を

$$
Q[v](t) = [V] \cdot \frac{i}{6\pi^3}\left(1-\frac{1}{|y|}\right) v(y/|y|) e^{-i\langle z, t-y/|y|\rangle}(\bar\partial\partial|y|)^3, \quad t \in B_4
$$

で定義する.

命題 4 Q は Poisson 積分に一致する:

$$
Q[v](t) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{S^3} \frac{1-|t|^2}{|s-t|^4} v(s)d\sigma(s), \quad t \in B_4.
$$

証明 $|s| = 1$ だから $2(1-\langle s,t\rangle) - |s-t|^2 = 1-|t|^2$ であり,

$$
\frac{1}{24\pi} Q_0[v](t) - \frac{1}{24\pi} Q_1[v](t) = \int_{S^2} \frac{1-|t|^2}{|s-t|^3} v(s)d\sigma(s)
$$

が成り立つ.

$$
Q[v](t) = \frac{1}{48\pi^3}(Q_0[v](t) - Q_1[v](t))
$$

から命題が従う. **証了**

この命題から我々の主結果はすぐに出る.

定理 1 $u(t) \in \mathcal{C}^0(\bar B_4)$ は B_4 で調和であり, $v \in \mathcal{C}^0(S^3)$ がその Dirichlet 境界値ならば, $u(t) = Q[v](t)$ が B_4 で成り立つ. 特に $u(t)$ は $z^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$ と $y/|y| \in \operatorname{supp} v$ をみたす指数関数 $\exp(-i\langle z,t\rangle)$ の重ね合わせである.

5　付録: いくつかの積分

この付録では§3 で用いる命題 5 を証明する.

補題 3 B と C が実数で $\mathrm{Re}\,A>0$ ならば,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A+i(B\sin\theta+C\cos\theta)} &= \frac{2\pi}{(A^2+B^2+C^2)^{1/2}},\\
\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\{A+i(B\sin\theta+C\cos\theta)\}^2} &= \frac{2\pi A}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}},\\
\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\{A+i(B\sin\theta+C\cos\theta)\}^3} &= \frac{\pi(2A^2-B^2-C^2)}{(A^2+B^2+C^2)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

証明 最初の式は留数を使えば出る. $B\sin\theta+C\cos\theta$ は合成公式を使ってひとつにまとめてしまえば少し楽になる. さらに, 最初の式の両辺をパラメータ A について微分すれば第 2, 3 式が出る. ここで $A^2+B^2+C^2$ は 0 以下の実数になることはない. **証了**

補題 4 $a>0$, $r\in\mathbf{R}$ で $\delta\in\mathbf{C}$ が $|\mathrm{Re}\,\delta|<a$ をみたすとき

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{(2\delta^2+r^2)X^2+4a\delta X+2a^2-r^2}{\{(\delta^2-r^2)X^2+2a\delta X+a^2+r^2\}^{5/2}}dX &= \frac{4a}{(a^2-\delta^2+r^2)^2},\\
\int_{-1}^{1}\frac{\delta X+a}{\{(\delta^2-r^2)X^2+2a\delta X+a^2+r^2\}^{3/2}}dX &= \frac{2}{a^2-\delta^2+r^2}.
\end{aligned}$$

証明 $-1\le X\le 1$ のとき

$$(\delta^2-r^2)X^2+2a\delta X+a^2+r^2=(\delta X+a)^2+r^2(1-X^2)$$

であり $\mathrm{Re}\,(\delta X+a)>0$ だから 0 以下の実数の値をとることはない. 特に $\delta\in]-a,\,a[\subset\mathbf{R}$ ならば

$$(\delta^2-r^2)X^2+2a\delta X+a^2+r^2>0$$

である. 積分はともに well-defined で δ について正則である. 解析接続により $\delta\in]-a,\,a[$ と仮定してよい. 証明の残りの部分は初等的である. なお, 第 2 式の両辺を a で微分すると第 1 式が出る. **証了**

補題 5 正の数 a と実数 $r,\ d$ について

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{(-2d^2+r^2)X^2+4iadX+2a^2-r^2}{\{(-(d^2+r^2)X^2+2iadX+a^2+r^2\}^{5/2}}dX &= \frac{4a}{(a^2+d^2+r^2)^2},\\ \int_{-1}^{1}\frac{idX+a}{\{(-(d^2+r^2)X^2+2iadX+a^2+r^2\}^{3/2}}dX &= \frac{2}{a^2+d^2+r^2}.\end{aligned}$$

証明 前の補題で $\delta = id$ とおけばよい. **証了**

補題 6 正の数 a と実数 $b,\ c,\ d$ について

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin\phi\frac{2(a+id\cos\phi)^2-(b\sin\phi)^2-(c\sin\phi)^2}{\{(a+id\cos\phi)^2+(b\sin\phi)^2+(c\sin\phi)^2\}^{5/2}}d\phi &= \frac{4a}{R^4},\\ \int_0^{\pi}\sin\phi\frac{a+id\cos\phi}{\{(a+id\cos\phi)^2+(b\sin\phi)^2+(c\sin\phi)^2\}^{3/2}}d\phi &= \frac{2}{R^2}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

証明 $X=\cos\phi,\ \ r=\sqrt{b^2+c^2}$ とおいて補題 5 を用いる. **証了**

命題 5 正の数 a と実数 $b,\ c,\ d$ について

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}d\phi\int_0^{2\pi}\frac{\sin\phi}{[a+i\{(b\cos\theta+c\sin\theta)\sin\phi+d\cos\phi\}]^3}d\theta &= \frac{4\pi a}{R^4},\\ \int_0^{\pi}d\phi\int_0^{2\pi}\frac{\sin\phi}{[a+i\{(b\cos\theta+c\sin\theta)\sin\phi+d\cos\phi\}]^2}d\theta &= \frac{4\pi}{R^2}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

証明 $A=a+id\cos\phi, B=b\sin\phi, C=c\sin\phi$ とおいて補題 3 と補題 6 を用いる. **証了**

参考文献

[1] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras and A. Yger, "Residue currents and Bezout identities", Birkhäuser, Basel, 1993.

[2] B. Berndtsson and M. Passare, Integral formulas and an explicit version of the fundamental principle, J. Funct. Anal., **84** (1989), 358-372.

[3] J. E. Björk, "Rings of differential operators", North-Holland Publ. Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

[4] N. R. Coleff and M. E. Herrera, "Les courants résiduels associés à une forme méromorphe", Lect. Notes in Math. **633**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[5] L. Hörmander, "An introduction to complex analysis in several variables, third edition (revised)", North-Holland Publ. Co., Amsterdam, London, New York, Tokyo, 1990.

[6] A. Meril and A. Yger, Problème de Cauchy globaux, Bull. Soc. math. France, **120** (1992), 87-111.

[7] M. Morimoto, "Analytic functionals on the sphere", American Mathematical Society, 1998.

[8] M. Passare, A calculus for meromorphic currents, J. reine angew. Math., **392** (1988), 37-56.

[9] M. Passare, Residue solutions to holomorphic Cauchy problems, "Seminar in Complex Analysis and Geometry 1987 (Rende, 1987)", EditEl, Rende, 1988, 101-105.

[10] S. Rigat, Version explicite du principe fondamental d'Ehrenpreis-Malgrange-Palamodov dans le cas non homogene, J. Math. Pures Appl., **76**.

[11] H. Yamane, Residue currents and a Fourier integral representation of harmonic functions, preprint.

[12] H. Yamane, Fourier integral representation of harmonic functions in terms of a current, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[13] H. Yamane, Fourier-Ehrenpreis integral representation of harmonic functions in four variables, preprint.

[14] A. Yger, Formules de division et prolongement méromorphe, Springer Lecture Notes in Math., **1295** (1987), 226-283.