数理解析研究所講究録 1262 巻 2002 年 66-74

Generalized Verma modules and contraction

和地 輝仁 (WACHI Akihito)
北海道工業大学総合教育研究部 (Hokkaido Institute of Technology)

1 Introduction

Definition 1.1 (G, ρ, V) を代数群 G の複素ベクトル空間 V 上の表現とする. 以下では, 単に (G, V) と書くこともある. このとき, (G, ρ, V) が概均質ベクトル空間 (PV) であるとは, V 上に Zariski 稠密な G-軌道が存在することをいう. これは開軌道となる. G が簡約であるとき, (G, P) を簡約概均質ベクトル空間 (簡約 PV) と呼ぶ.

この時多項式 $f \in \mathbf{C}[V]$ が相対不変式であるとは, 指標 $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^\times)$ が存在して, すべての $g \in G$, $v \in V$ に対して, $f(gv) = \chi(g) f(v)$ となることをいう.

Definition 1.2 $\mathfrak{g}$ を半単純リー代数, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ をその放物型部分代数とするとき, 指標 $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ に対して,

$$M_{\mathfrak{g}}(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbf{C}_\lambda$$

と定め, スカラー型一般バーマ加群と呼ぶ.

PV において 縮約 (contraction) という操作が知られている. PV (G, V) と相対不変式 $f \in \mathbf{C}[V]$ が与えられたときこれを縮約すると, G の subquotient G' と V の部分空間 V' により別の PV (G', V') が得られ, $f|_{V'}$ は再び相対不変式となる (Definition 2.1). このとき f の b-関数 $b_f(s) \in \mathbf{C}[s]$ と $f|_{V'}$ の b-関数 $b_f|_{V'}(s) \in \mathbf{C}[s]$ (Definition 2.3) は次数が等しく, これらの零点は適当に並べ換えると, 整数差を除いて一致していることも知られている.

単純代数群 G とその放物型部分群 P の組 (G, P) を考え, P の巾単根基 N^+ が可換であるとする. この時, 組 (G, P) から PV $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ が得られる. ここで, L は P のレビ部分群であり, ドイツ文字は対応する群のリー代数を表す. また, 単純代数群 G' とその放物型部分群 P' の組 (G', P') をとって, これから得られる PV $(L', \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^{+\prime})$ が $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ の縮約となるように出来る.

$$\begin{array}{ccc} (G,P) & \dashrightarrow & (G',P') \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ (L,\mathfrak{n}^+) & \longrightarrow & (L',\mathfrak{n}^{+\prime}) \\ & \text{PV の縮約} & \end{array}$$

組 (G, P) と $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ からスカラー型一般バーマ加群 $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ が得られ, 組 (G', P') と $\lambda|_{\mathfrak{p}'}$ からスカラー型一般バーマ加群 $M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ が得られるが, スカラー型一般バーマ加群の既約性を相対不変式の b-関数の零点が制御していること (Theorem 3.2) と, 縮約により零点は整数だけずれる (Theorem 2.4) というふたつの行者氏の結果を用いると, $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ の既約性が $M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ の既約性を導くことがわかる.

N^+ が可換とは限らない場合, 表現 $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ はもはや PV ではなく縮約を考えることはできないが, 組 (G, P, L) から組 (G', P', L') を得る適切な操作を定義し (Definition 4.1),

$M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ の既約性が $M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ の既約性を導くようにしたい.

$$\begin{array}{ccc} & \text{適切な‘縮約’} & \\ (G,P,L) & \dashrightarrow & (G',P',L') \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{\mathfrak{g}}(\lambda) & \dashrightarrow & M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'}) \\ & \text{既約性の伝播} & \end{array}$$

この論説の目的は, 組 (G,P,L) から組 (G',P',L') を得る操作を定義し, $G=SL_n$ の場合に一般バーマ加群の既約性がその操作によって伝播することを証明することである.

2 Prehomogeneous vector spaces

Definition 2.1 (G,V) を簡約 PV, $f\in \mathbf{C}[V]$ を相対不変式とする. この時 $\{v\in V|f(v)\neq 0\}$ の中に, V からの相対位相に関する Zariski 閉 G-軌道が一意的に存在し, そこから v_f をとり固定する. v_f の固定化群 G_{v_f} は簡約代数群であり, その極大トーラスをとり T_f とする. すると, 表現

$$(G^{(f)},V^{(f)}):=(Z_G(T_f)/T_f,V^{T_f})$$

を得るが, 以上の (G,V) から $(G^{(f)},V^{(f)})$ を得る操作を縮約 (contraction) と呼ぶ.

$T_f=\{1\}$ の場合, 縮約によって (G,V) は変化しないが, T_f が自明でない場合は, G も V も次元は下がる.

Theorem 2.2 *(Gyoja [2])* (G,V) を簡約 PV, $(G^{(f)},V^{(f)})$ をその縮約とすると, $(G^{(f)},V^{(f)})$ は概均質ベクトル空間である. □

Definition 2.3 (G,V) を簡約 PV, $f\in\mathbf{C}[V]$ を相対不変式とするとき, 多項式 $b_f(s)\in\mathbf{C}[s]$ が存在して $f^*(\partial)f^{s+1}=b_f(s)f^s$ を満たす. ここで, $f^*(\partial)$ は V 上の定数係数微分作用素であり, $\mathbf{C}[V]\simeq S(V^*)\simeq$ (V 上の定数係数微分作用素環) なる自然な同型により f と対応するものである. b_f を f の b-関数と呼ぶ.

Theorem 2.4 *(Gyoja [3])* (G,V) を簡約 PV, $f\in\mathbf{C}[V]$ を相対不変式, $(G^{(f)},V^{(f)})$ をその縮約とする. この時, b-関数 $b_f(s)\in\mathbf{C}[s]$ と $b_{f|V'}(s)\in\mathbf{C}[s]$ の次数は等しく, 定数倍は無視して,

$$\begin{aligned} b_f(s) &= (s+\alpha_1)\cdots(s+\alpha_d)\\ b_{f|V'}(s) &= (s+\alpha_1')\cdots(s+\alpha_d') \end{aligned}$$

と書いたとすると, α_j' の順序を必要であれば並べ換えて, すべての j に対して $\alpha_j\equiv\alpha_j' \pmod{\mathbf{Z}}$ となる. □

Remark 2.5 Theorem 2.4 において, (G,V) が既約 PV(既約表現でありかつ PV) の場合は, すべての j に対して $\alpha_j\geq\alpha_j'$ とできる.

P を巾単根基が可換である G の放物型部分群とするとき, Introduction でみたような, 組 (G,P) から得られる PV $(L,\mathrm{Ad},\mathfrak{n}^+)$ は既約なので, この PV の縮約を考えたとき $\alpha_j\geq\alpha_j'$ とできる.

3 Generalized Verma modules

Definition 3.1 G を代数群, $\mathfrak{g}$ をそのリー代数とし, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数, $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ のボレル部分代数で $\mathfrak{h}$ を含むものとする. $\varpi_1, \dots, \varpi_n \in \mathfrak{h}^*$ を基本ウエイトとする. $f_i \in \mathbf{C}[G]$ $(i = 1, \dots, n)$ を $B \times B$-ウエイトベクトルであって, 対応する指標が $\exp(w_0\varpi_i) \times \exp \varpi_i$ であるものと定める. ここで w_0 はワイル群の最長元である. f_i は定数倍を除いて一意的に定まる. $\lambda = \sum_i \lambda_i \varpi_i$ に対して, $f^\lambda = \prod_i f_i^{\lambda_i}$ と定め, 半不変式(semi-invariant)と呼ぶ.

例えば $G = SL_{n+1}$ の場合や, $G = Sp_n (\subset GL_{2n})$ のある (標準的ではない) 実現の場合は, f_i は G の左下角の $i \times i$ 小行列式で与えられる.

Theorem 3.2 *(Gyoja [1]) Definition 3.1* の記号を用いる. $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ は, $\mathfrak{h}$ に制限すると *anti-dominant* であることと, さらに若干の条件を仮定する. ただし, $\mu \in \mathfrak{h}^*$ が *anti-dominant* とは, すべての正ルート α_i に対して $2(\mu + \rho, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i) \notin -\mathbf{Z}_{\geq 0}$ なることを言う. ρ は正ルートの和の半分である.

$\mathfrak{p}$ が極大放物型部分代数の場合, スカラー型一般バーマ加群 $M_\mathfrak{g}(\lambda)$ が既約であるための必要十分条件は, すべての $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して $b_{f^\lambda}(\lambda_i - m) \neq 0$ となることである. ここで, i は極大放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ を特徴づける単純ルートの番号で, $\lambda = \lambda_i \varpi_i$ である.

また, $\mathfrak{p}$ が極大ではない場合も同様の主張が成立する. □

Remark 3.3 上の定理において, いくつかの場合には anti-dominant 等の仮定が不要である. 特に, $\mathfrak{p}$ の巾零根基が可換の場合にそうである.

$\mathfrak{p}$ の巾零根基が可換の場合, '縮約' によりスカラー型一般バーマ加群の既約性が保たれることが, Theorem 2.4 と Theorem 3.2 (とそれらの Remark) により導かれるが, そのあらすじを見てみる. Definition 3.1 の記号を引き続き用いる.

$\mathfrak{p}$ の巾零根基 $\mathfrak{n}^+$ が可換な場合は, $\mathfrak{p}$ は極大放物型部分代数であり, $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ は $\lambda = \lambda_i \varpi_i$ と書くことができる. $\mathfrak{n}^-$ を $\mathfrak{n}^+$ のルートの -1 倍のルートに対応する部分代数とする. 半不変式 $f_i \in \mathbf{C}[G]$ を $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を通して $\mathfrak{n}^-$ に制限したものを $\overline{f} \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^-]$ とすると, $\overline{f} \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^-]$ は PV $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^-)$ の相対不変式であり, f_i と $\overline{f}$ の b-関数は一致することもわかる.

ここで PV $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^-)$ を縮約するのではなく, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ を次のように '縮約' する. $\mathfrak{n}^-$ における $\overline{f}$ の零点集合の補集合は PV の開軌道であるから, それ自身相対閉な L-軌道である. そこから $v_{\overline{f}}$ を適当にとり, $Z_L(v_{\overline{f}})$ の中の極大トーラスのリー代数 $\mathfrak{t}$ をとる. PV の縮約ではここで $Z_L(\mathfrak{t})$ を考えるが, そうはせず, $\mathfrak{g}' = Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})/\mathfrak{t}$, $\mathfrak{p}' = Z_\mathfrak{p}(\mathfrak{t})/\mathfrak{t}$ と定める. すると, $\mathfrak{g}'$ は半単純リー代数, $\mathfrak{p}'$ はその極大放物型部分代数で巾零根基が可換である. したがってこれらから PV $(L', \mathfrak{n}^{-\prime})$ が同様にして得られるが, これは PV $(L, \mathfrak{n}^-)$ の縮約であること (Introduction のひとつめの図) が (省略するが) 証明できる. さらに, $\overline{f}|_{\mathfrak{n}^{-\prime}}$ は G' の半不変式を制限したものに等しいこともわかる.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] f_i \arrow[r, mapsto, "G'\text{へ制限}"] \arrow[d, "\mathfrak{n}^-\text{へ制限}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & f_i' \arrow[d, "\mathfrak{n}^{-\prime}\text{へ制限}"] \\ \overline{f} \arrow[r, mapsto, "\mathfrak{n}^{-\prime}\text{へ制限}"'] & \overline{f}|_{\mathfrak{n}^{-\prime}} \end{tikzcd}$$

以上の準備の下, Theorem 2.4 とその Remark により,

$$\begin{aligned} b_{\overline{f}(s)} &= (s + \alpha_1) \cdots (s + \alpha_d), \\ b_{\overline{f}|_{\mathfrak{n}^{-\prime}}}(s) &= (s + \alpha_1') \cdots (s + \alpha_d'), \\ & \quad (\alpha_j \geq \alpha_j') \end{aligned}$$

となる. すべての $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して $(\lambda_i - m) + \alpha_j \neq 0$ であることは, $\lambda_i \notin \mathbf{Z}_{>-\alpha_j}$ であることだから, $b_{\overline{f}(\lambda_i - m)} \neq 0$ ならば $b_{\overline{f}|_{\mathfrak{n}^{-\prime}}}(\lambda_i - m) \neq 0$ であることが, $\alpha_j \geq \alpha'_j$ から導かれる. したがって Theorem 3.2 とその Remark により, $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ が既約ならば $M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ が既約であることがわかる.

この例を以下に示す.

Example 3.4

$$
\begin{aligned}
G &= GL_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ; A, B, C, D \text{ は } n \times n \text{ 行列} \right\}, \\
P &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ & D \end{pmatrix} \in G \right\}, \\
L &= \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & D \end{pmatrix} \in G \right\} \simeq \{(A, D) \in GL_n \times GL_n\},
\end{aligned}
$$

とし, ドイツ文字でそれぞれのリー代数を表す. $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数は対角成分にとり, 基本ウエイト ϖ_i を通常の番号づけでとる.

$$
f \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det C,
$$

とすると f は G の半不変式であり, $\mathfrak{n}^-$ への制限 (同じく f と書く) は PV $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^-)$ の基本相対不変式である. 例えば Capelli 恒等式を用いて, $b_f(s) = (s+1) \cdots (s+n)$ であるから, $\lambda = \lambda_n \varpi_n \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ を取ったとき, 一般バーマ加群 $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ が既約であるための必要十分条件は, Theorem 3.2 とその Remark により, $\lambda_n \notin \mathbf{Z}_{>-n}$ である.

次にこの例の直前にあるような, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ の'縮約'をしてみる. $\mathfrak{n}^- \simeq \mathrm{Mat}(n, \mathbf{C})$ における $f = \det$ の零点集合の補集合から, n 次単位行列 I_n が取れる. $Z_{\mathfrak{l}}(I_n) = \{(A, A) ; A \in \mathfrak{gl}_n\}$ だから, この中の極大可換部分代数として $\mathfrak{t} = \{(t, t) ; t \text{ は } n \text{ 次対角行列}\}$ がとれる.

$$
Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \text{ は } n \text{ 次対角行列} \right\},
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}' &= Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})/\mathfrak{t} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} ; a, b, c \text{ は } n \text{ 次対角行列} \right\} \simeq (\mathfrak{sl}_2)^{\oplus n}, \\
\mathfrak{p}' &\simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}' \right\}, \qquad \mathfrak{l}' \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}' \right\} \simeq (\mathfrak{gl}_1)^{\oplus n},
\end{aligned}
$$

である. 相対不変式 $f \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^-]$ の $\mathfrak{n}^{-\prime}$ への制限は, $f|_{\mathfrak{n}^{-\prime}} = \det c$ であり, $b_{f|_{\mathfrak{n}^{-\prime}}}(s) = (s+1)^n$ となる. 従って, '縮約' 後の一般バーマ加群 $M_{\mathfrak{g}}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ が既約であるための必要十分条件は, Theorem 3.2 とその Remark により, $\lambda_n \notin \mathbf{Z}_{>-1}$ である ($\mathfrak{p}'$ が極大放物型部分代数ではないので Theorem 3.2 のステートメントは直接は適用できないが, 極大でない場合のステートメントを用いるか, あるいは, $\mathfrak{g}' \simeq (\mathfrak{sl}_2)^{\oplus n}$ の分解に応じて $M_{\mathfrak{g}}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ を $\mathfrak{sl}_2$ の一般バーマ加群の n 個の外部テンソル積に分解すれば, 既約条件は求まる). 従って, この場合'縮約'が一般バーマ加群の既約性を保存することが確認できた. □

4 'Contraction' of Verma modules

$\mathfrak{p}$の巾零根基が可換でない場合は, $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ はもはやPVではなく, したがって以上のような'縮約'も行えないが, 一般バーマ加群の既約性の伝播が起こるような'縮約'を$\mathfrak{p}$の巾零根基が可換でない場合にも定義することが目標となる. 既約性の伝播がb-関数の零点の整数差から導かれれば理想的である.

この節では$\mathfrak{p}$の巾零根基が可換とは限らない場合にある'縮約'を定義し, GがSL_nの場合に既約性が伝播することを証明する. ただしb-関数を用いた証明ではない.

Definition 4.1 Gを半単純代数群, Pをその放物型部分群, LをPのレビ部分群とする. $Z_L(w)$が簡約部分群になるような$w \in G$が与えられたとき, $Z_L(w)$の中の極大トーラスTをとり, $(G', P', L') = (Z_G(T)/T, Z_P(T)/T, Z_L(T)/T)$と定め, 組$(G, P, L)$から組$(G', P', L')$を求める操作を$w$に関する'縮約'と呼ぶ.

Tとは別の極大トーラスT_1をとると, TとT_1は$Z_L(w)$の中で共役であるから特にLの中で共役である. 従って, $Z_G(T)$と$Z_G(T_1)$もLの元により共役などとなり, '縮約'はTの取り方によらない.

またw_1とw_2がLの元で共役であるときは, $Z_L(w_1)$と$Z_L(w_2)$がLの中で共役であるから, w_1に関する'縮約'とw_2に関する'縮約'は同型である.

Theorem 4.2 *Definition 4.1の記号の下, G'は半単純代数群, P'はその放物型部分群, L'はP'のレビ部分群である.*

Proof. まずG'の半単純性を示す. $Z_G(T)$は簡約部分群だから, $T = Z(Z_G(T))_0$ (右辺の下付き0は単位連結成分), つまり, $\mathfrak{t} = Z(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}))$を示す. ドイツ文字は対応する群のリー代数を表すこととする.

$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}$を満たす$\mathfrak{g}$のカルタン部分代数$\mathfrak{h}$をとる. $\mathfrak{h} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$であり, $\mathfrak{h}$は自己中心化部分代数であるから, $Z(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}))$は$\mathfrak{h}$に含まれる. 特に, $\mathfrak{l}$にも含まれる. また, $T \subset Z_L(w)$より$w \in Z_G(T)$だから, $[w, Z(Z_G(T))] \subset [Z_G(T), Z(Z_G(T))] = \{e\}$. つまり, $Z(Z_G(T)) \subset Z_G(w)$である. これらより, $Z(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})) \subset Z_{\mathfrak{l}}(w)$である. 従って, $Z(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}))$は$Z_{\mathfrak{l}}(w)$の可換部分代数であり$\mathfrak{t}$を含んでいるから, $\mathfrak{t}$の極大性により$Z(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})) = \mathfrak{t}$である. G'の半単純性が示された.

次にP'がG'の放物型部分群であることを示す. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}$であるから, $\mathfrak{h} \subset Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}) \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$であり, $Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$と$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$は$\mathfrak{g}$のルート空間分解を引き継いでいる. 適当に単純ルート系を定めると, $\mathfrak{p}$は$\mathfrak{g}$の全ての正ルート空間を含むようにできて, そのとき$Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$は$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$の全ての正ルート空間を含むから, $\mathfrak{p}'$は$\mathfrak{g}'$の放物型部分代数である.

最後にL'がP'のレビ部分群であることを示すが, 上と同様にルート空間分解を引き継いでいることから, $Z_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{t})$が$Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$のレビ部分代数であり, $Z_{\mathfrak{n}^+}(\mathfrak{t})$が$Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$の巾零根基であることがわかる. ただし, $\mathfrak{n}^+$は$\mathfrak{p}$の巾零根基である. □

'縮約'が既約性の伝播を引き起こすことについて, 少なくともA型の場合は, wとしてワイル群の最長元を取ったとき$\mathfrak{p}$が可換の場合の拡張になっていることを, 次の定理が示している.

Theorem 4.3 *$G = SL(n+1, \mathrm{C})$, PをGの放物型部分群で上三角行列を含むもの, LをPのレビ部分群で対角行列を含むものとし, ドイツ文字でそれぞれのリー代数を表す. $\mathfrak{g}$のカルタン部分代数$\mathfrak{h}$を対角行列にとる. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$のワイル群の最長元$w_0$として,*

$$w_0 = k \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{pmatrix},$$

ととる．ただし k は，G に含まれるための適当な定数倍である．組 (G', P', L') を組 (G, P, L) の w_0 に関する‘縮約’とする．

$\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ に対して，一般バーマ加群 $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ が既約ならば，$M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ も既約である．

Proof. はじめに $Z_L(w_0)$ が簡約部分群になることを見ておく．${}^t w_0 = w_0$ であるから $x \in Z_L(w_0)$ に対して，$w_0 {}^t g^{-1} w_0^{-1} = {}^t(w_0^{-1} g w_0)^{-1} = {}^t g^{-1}$ だから ${}^t Z_L(w_0)^{-1} = Z_L(w_0)$ である．従って，$Z_L(w_0)$ は簡約部分群である．

まず，$w_0 L w_0^{-1} = L$ の場合を考える．

$$G = \left\{ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_d \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_d \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dd} \end{pmatrix} \end{array} \in SL_{n+1}\ ;\ A_{ij} \text{ は } p_i \times p_j \text{ 行列} \right\},$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{dd} \end{pmatrix} \in G \right\},$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{dd} \end{pmatrix} \in G \right\},$$

と区分けすることができるが，$p_1 = p_d,\ p_2 = p_{d-1}, \cdots, p_{\lfloor d/2 \rfloor} = p_{d+1-\lfloor d/2 \rfloor}$ となっている．ただし $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す．

‘縮約’をする時に w_0 で‘縮約’しても，w_0 に L の元で共役な元で‘縮約’しても同型になるのであった．そこで，w_0 と L の元で共役である

$$w = k' \begin{pmatrix} & & & I_{p_d} \\ & & \iddots & \\ & I_{p_2} & & \\ I_{p_1} & & & \end{pmatrix},$$

で‘縮約’する．ただし k' は，G に含まれるための適当な定数倍である．組 (G, P, L) を‘縮約’するだけであればこれでよいが，一般バーマ加群を考えるため，$\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ も考慮しなくてはならない．しかし，λ は $\mathfrak{l}$ の中心でのみゼロでない値をもつので，L の共役では変化しない．また d が奇数であるときは、w のまん中の $I_{p_{(d+1)/2}}$ の所は共役によって単位行列にはならないが，単位行列としてしまっても‘縮約’後の一般バーマ加群の既約性には影響しないので，上のように w をとることにする．

組 (G, P, L) を w に関して‘縮約’する．

$$Z_L(w) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_d \end{pmatrix} \in G\ ;\ A_i = A_{d+1-i} \right\},$$

だから, この中の極大トーラスとして

$$T=\left\{\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_d \end{pmatrix}\in Z_L(w)\ ;\ t_i \text{ は } p_i \text{ 次対角行列}\right\},$$

がとれる. 従って, これまでの区分けと同じ区分けによって,

$$Z_G(T) \;=\; \left\{\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_1 & & & & & B_1 \\ \hline & A_2 & & & B_2 & \\ \hline & & \ddots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \hline & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \ddots & & \\ \hline & C_2 & & & D_2 & \\ \hline C_1 & & & & & D_1 \end{array}\right)\in G\ ;\ A_i,B_i,C_i,D_i \text{ は対角行列}\right\},$$

$$G'=Z_G(T)/T \;\simeq\; \left\{\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_1 & & & & & B_1 \\ \hline & A_2 & & & B_2 & \\ \hline & & \ddots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \hline & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \ddots & & \\ \hline & C_2 & & & D_2 & \\ \hline C_1 & & & & & D_1 \end{array}\right)\in Z_G(T)\ ;\ \begin{array}{c}\det\begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i\end{pmatrix}=1, \\ (i=1,\dots,\lfloor d/2\rfloor)\end{array}\right\}$$

$$\simeq\;(SL_2)^{p_1}\times\cdots\times(SL_2)^{p_{\lfloor d/2\rfloor}},$$

となる. P' と L' はそれぞれ G' のブロック上三角成分とブロック対角成分に同型である.

では, 一般バーマ加群の既約性を調べる. 通常のように, $\varepsilon_i\in\mathfrak{h}^*$ を (i,i) 行列単位の座標関数とし, 基本ウエイトを $\varpi_i=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_i$ とおく. すると, $\lambda=\lambda_{p_1}\varpi_{p_1}+\lambda_{p_1+p_2}\varpi_{p_1+p_2}+\cdots+\lambda_{p_1+\cdots+p_{d-1}}\varpi_{p_1+\cdots+p_{d-1}}$ とかける. Jantzen [4] の記述から, 一般バーマ加群 $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ が既約であるための必要十分条件は,

$$\begin{aligned}&1\le i<j\le d \text{ を満たすすべての } i,j \text{ に対して}\\ &\lambda_{p_1+\cdots+p_i}+\cdots+\lambda_{p_1+\cdots+p_{j-1}}\notin\mathbf{Z}_{>-(p_{i+1}+\cdots+p_{j-1})-\min(p_i,p_j)},\end{aligned}\tag{4.1}$$

であることがわかる. 次に, '縮約' 後の一般バーマ加群 $M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ の既約性を調べる. λ は $\mathfrak{p}'$ に単純に制限ができないが, $U(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}))\otimes_{U(Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}))}\mathbf{C}_\lambda$ の既約性を考えているという意味である. 上で見た G' の形から, $M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ はいくつかの $\mathfrak{sl}_2$ の一般バーマ加群のテンソル積になり, 従って $M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ が既約になるための必要十分条件は, それらが全て既約であることである. $M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ が既約になるための必要十分条件は,

$$\begin{aligned}\lambda_{p_1}+\cdots+\lambda_{p_1+\cdots+p_{d-1}}&\notin\mathbf{Z}_{>-1},\\ \lambda_{p_1+p_2}+\cdots+\lambda_{p_1+\cdots+p_{d-2}}&\notin\mathbf{Z}_{>-1},\\ &\vdots\\ \lambda_{p_1+\cdots+p_{\lfloor d/2\rfloor}}+\cdots+\lambda_{p_1+\cdots+p_{d+1-\lfloor d/2\rfloor}}&\notin\mathbf{Z}_{>-1},\end{aligned}\tag{4.2}$$

である. ふたつの条件 (4.1) と (4.2) をみると, '縮約' が既約性を保存していることが分かる.

次に, $w_0Lw_0^{-1}=L$ とは限らない場合を考える. この場合は L の代わりに $L\cap w_0Lw_0^{-1}$ を考えることで, $Z_L(w)$ や T を $L\cap w_0Lw_0^{-1}$ の中にとることができる. $L\cap w_0Lw_0^{-1}$ は w_0 による共役で不変であるから, $w_0Lw_0^{-1}=L$ の場合と同様に議論できて, '縮約' が既約性を保存していることも分かる. □

Example 4.4 $G = SL_6$ とし, カルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_6$ の対角成分にとる.

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B & C \\ & D & E \\ & & F \end{pmatrix} \in G \;;\; A, \ldots, F \text{ は } 2 \times 2 \text{ 行列} \right\},$$

とおき, P のレビ部分群 L をブロック対角成分にとる.

$$w_0 = \begin{pmatrix} & & I_2 \\ & I_2 & \\ I_2 & & \end{pmatrix}, \qquad (I_2 \text{ は } 2 \text{ 次単位行列})$$

とすると,

$$Z_L(w_0) = \left\{ \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & A \end{pmatrix} \in L \right\},$$

であり, この中の極大トーラスとして

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} t & & \\ & s & \\ & & t \end{pmatrix} \in L \;;\; t, s \text{ は } 2 \text{ 次対角行列} \right\},$$

がとれて,

$$Z_G(T) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & u \\ & t_2 & \\ v & & t_3 \end{pmatrix} \in G \;;\; t_j, u, v \text{ は } 2 \text{ 次対角行列} \right\},$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned} G' &= Z_G(T)/T \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & & & a_2 & \\ & b_1 & & & & b_2 \\ & & \multicolumn{2}{c}{I_2} & & \\ a_3 & & & & a_4 & \\ & b_3 & & & & b_4 \end{pmatrix} \in G \;;\; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in SL_2 \right\} \\ &\simeq SL_2 \times SL_2, \\ P' &= Z_P(T)/T \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & & & a_2 & \\ & b_1 & & & & b_2 \\ & & \multicolumn{2}{c}{I_2} & & \\ & & & & a_4 & \\ & & & & & b_4 \end{pmatrix} \in G \;;\; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ & a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ & b_4 \end{pmatrix} \in SL_2 \right\} \end{aligned}$$

となる.

さて, 通常のように $\mathfrak{g}$ の (i,i) 成分の座標関数を ε_i と書き, 単純ルートを $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ で定め, 対応する基本ウエイトを ϖ_i を書く. $\lambda = \lambda_2\varpi_2 + \lambda_4\varpi_4 \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ とすると, 一般バーマ加群 $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ が既約であるための必要十分条件は [4] より計算できて,

$$\lambda_2, \lambda_4 \notin \mathbf{Z}_{>-2} \quad \text{かつ} \quad \lambda_2 + \lambda_4 \notin \mathbf{Z}_{>-4}$$

である.

また‘縮約’後の $M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ は, $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ の分解に応じて, ふたつの $\mathfrak{sl}_2$ の一般バーマ加群の外部テンソル積になるから, $M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ が既約であるための必要十分条件は, これらふたつの一般バーマ加群がともに既約であることである. $\mathfrak{sl}_2$ の基本ウエイトを ϖ で表す

と，これらの最高ウエイトはともに $(\lambda_2+\lambda_4)\varpi$ である．したがって，$M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ が既約であるための必要十分条件は，

$$\lambda_2+\lambda_4 \notin \mathbf{Z}_{>-1}$$

である．

以上より，$M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ が既約ならば $M_{\mathfrak{g}'}(\lambda|_{\mathfrak{p}'})$ も既約であることが確認できる． □

References

[1] Gyoja, A., Highest weight modules and b-functions of semi-invariants, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **30** (1994), 353–400.

[2] Gyoja, A., A theorem of Chevalley type or prehomogeneous vector spaces, J. Math. Soc. Japan **48** (1996), 161–167.

[3] Gyoja, A., private note.

[4] Jantzen, J. C., Kontravariante Formen auf induzierten Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren, Math. Ann. **226** (1977), 53–65.