

セルオートマトンが定めるダイナミクスと時空間パターンについて

名古屋工業大学 大鑄 史男 (Fumio Ohi)
 Nagoya Institute of Technology
 Email:ohi@system.nitech.ac.jp

1. 序

$S = \{0, 1\}$ と S^3 から S への写像 g との組 (S, g) を基本セルオートマトン (Elementary Cellular Automata, ECA) と呼ぶ. $2^8 = 256$ 通りの ECA (S, g) が存在し, それぞれの ECA (S, g) には次のようにして定まるルール番号 $RN(S, g)$ が与えられている.

$$RN(S, g) = \sum_{a,b,c} g(a, b, c)2^{a2^2+b2+c}.$$

ECA (S, g) が与えられたとき, 次のようにして $g : S^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^{\mathbb{Z}}$ を定義することができる.

$$\forall \mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, (g(\mathbf{x}))_i = g(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

$S^{\mathbb{Z}}$ の要素を configuration と呼ぶ.

ECA (S, g) の g を local rule, g から定まる $g : S^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^{\mathbb{Z}}$ を global rule と呼び, その bold face g で書き表すことにする. g は, $S^{\mathbb{Z}}$ 上の dynamics を定める.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}}, \quad g^{t+1}(\mathbf{x}) &= g(g^t(\mathbf{x})), \quad t \geq 0, \\ g^0(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}}$ を initial configuration としたとき, dynamics g が定める時空間パターンとは, $\{(t, g^t(\mathbf{x})), t \geq 0\}$ のことである. 一般的に我々が問題にするのは, ECA (S, g) が定める $S^{\mathbb{Z}}$ 上の dynamics g の解析及び時空間パターン $\{(t, g^t(\mathbf{x})), t \geq 0\}$, $\mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}}$ の特性である.

S.Wolfram(1983) は, 詳細な計算機シミュレーションによって基本セルオートマトンを分類したが, それらは必ずしも厳密なものではない. これに対して G.Braga, G.Cattaneo, P.Flocchini and C.Quaranta Vogliotti(1995) は, 明確な判定基準による分類を行い, 0-quiescent local rule (定義はこの後で提示する) を持つ基本セルオートマトンを以下のような C_1, C_2, C_3 の三つのクラスに分類した. また, それぞれのセルオートマトンがどのクラスに属するかの判定を行うアルゴリズム的な手法を提示している.

$$\begin{aligned} C_1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} l(g^t(\mathbf{x})) &= 0, \\ C_2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \quad \sup_{t \in \mathbb{N}} l(g^t(\mathbf{x})) &< \infty, \\ C_3 \quad \exists \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \quad \sup_{t \in \mathbb{N}} l(g^t(\mathbf{x})) &= \infty. \end{aligned}$$

本稿で問題にするのは C_3 クラスに属する local rule g によって定まる \mathcal{F} 上の dynamics g がどのような growth of time-space pattern を示すかについて議論することである.

S 上には離散位相が定義されていて, その直積位相が $S^{\mathbb{Z}}$ 上に定義されているとする. また $\sigma_L : S^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^{\mathbb{Z}}, \sigma_R : S^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^{\mathbb{Z}}$ を次のように定義する; $\mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}}$ に対して

$$(\sigma_L(\mathbf{x}))_i = x_{i+1}, \quad (\sigma_R(\mathbf{x}))_i = x_{i-1}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}.$$

ECA (S, g) は, $g(0, 0, 0) = 0$ であるとき 0-quiescent であると呼ばれる.

$$\mathcal{F} = \{x \in S^{\mathbb{Z}} \mid \exists i \in \mathbb{Z}, \exists j \in \mathbb{Z}, i \leq j, x = (\dots, 0, 0, x_i, \dots, x_j, 0, 0, \dots)\}$$

と書き, \mathcal{F} の要素を 0-finite configuration と呼ぶ. 特に $(\dots, 0, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}$ であると約束する.

g が 0-quiescent であれば, $g(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$ である. よって g は, \mathcal{F} 上での dynamics を定める.
 $x \in \mathcal{F}$ に対して

$$x = (\dots, 0, 0, \overset{i}{1}, \dots, \overset{j}{1}, 0, 0, \dots)$$

であるとき,

$$l(x) = j - i + 1$$

と定め, x の length of pattern と呼ぶ.

以降では, ルール番号を明記する必要がある時, ルール番号 n を持つセルオートマトンの local rule とそれから決まる global rule をそれぞれ g_n 及び g_n と書く.

Notations 1 の block とは, 1 が 2 個以上並んだもので, 例えば $(1, 1)$ や $(1, 1, 1)$ など指し, 長さ n の 1 の block とは, n 個の 1 が並んだものであり, $1_n = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ 個}}$ と書く. 同様に長さ n の 0 の block とは, $0_n = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ 個}}$ である. 特に断ることなく 0 を $(\dots, 0, 0)$, $(0, 0, \dots)$, $(\dots, 0, 0, 0, \dots)$ 等を表すものとして使うが, いずれを意味するかは前後関係から容易に読みとることができる. 1 に関しても同様である.

$a_i = (a_1^i, \dots, a_{m_i}^i) \in S^{m_i}$, $i = 1, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) &= (a_1^1, \dots, a_{m_1}^1, \dots, a_1^n, \dots, a_{m_n}^n), \\ (0, \mathbf{a}_1) &= (\dots, 0, 0, 0, a_1^1, \dots, a_{m_1}^1), \\ (\mathbf{a}_1, 0) &= (a_1^1, \dots, a_{m_1}^1, 0, 0, 0, \dots), \\ (0, \mathbf{a}_1, 0) &= (\dots, 0, 0, 0, a_1^1, \dots, a_{m_1}^1, 0, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

と約束する. 0 の代わりに 1 を入れ替えた場合も同様である.

$\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} S^n$, $\mathcal{D} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} S^n$ のとき, $k \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \oplus^k \mathcal{D} &= \{(c, 0_k, d) \mid c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}\}, \\ \mathcal{C} \overset{k}{\oplus} \mathcal{D} &= \bigcup_{l \geq k} \mathcal{C} \overset{l}{\oplus} \mathcal{D} \end{aligned}$$

と約束する. また $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} S^n$ に対して

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(0, \mathbf{a}, 0) \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$$

とする.

さらに $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \in S^{\mathbb{Z}}$ に対して

$$x_{i,j} = (x_i, \dots, x_j), \quad i \leq j, \quad x_{-\infty,i} = (\dots, x_{i-1}, x_i), \quad x_{i,\infty} = (x_i, x_{i+1}, \dots)$$

以下のような一定のパターンを持ったブロックの集合を定義しておく。

$$\mathcal{B} = \{1_n \mid n \geq 2\}$$

$$\mathcal{U} = \{(1, 0_{m_1}, 1, 0_{m_2}, 1, \dots, 1, 0_{m_{n-1}}, 1) \mid m_1 \geq 2, \dots, m_{n-1} \geq 2, n \geq 1\}$$

$$\mathcal{V} = \{((0, 1)_{i_1}, 0_{m_1}, (0, 1)_{i_2}, 0_{m_2}, \dots, 0_{m_{n-1}}, (0, 1)_{i_n}) \mid i_1 \geq 1, m_1 \geq 1, \dots, m_{n-1} \geq 1, i_n \geq 1, n \geq 1\}$$

$$\mathcal{W} = (\mathcal{U} \overset{2 \leq}{\oplus} \mathcal{B}) \cup \mathcal{B}, \quad \mathcal{X}_1 = (\mathcal{V} \overset{1}{\oplus} \mathcal{B}) \cup \mathcal{B}, \quad \mathcal{X}_2 = (\mathcal{V} \overset{2 \leq}{\oplus} \mathcal{B}) \cup \mathcal{B},$$

$$\mathcal{X} = \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{(\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2) \overset{0 \leq}{\oplus} \dots \overset{0 \leq}{\oplus} (\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2)}_{n \text{ 組}} \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{(\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2) \overset{0 \leq}{\oplus} \dots \overset{0 \leq}{\oplus} (\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2) \overset{0 \leq}{\oplus} \mathcal{V}}_{n \text{ 組}},$$

$$\mathcal{WB} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{W} \overset{1}{\oplus} \underbrace{\mathcal{B} \overset{1}{\oplus} \dots \overset{1}{\oplus} \mathcal{B}}_n.$$

ここで, $(0, 1)_k = (\underbrace{0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1}_{k \text{ 組の } (0, 1)})$ である。明らかに次のことが成立する。

$$\tilde{\mathcal{V}} \cup \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{F}, \quad \tilde{\mathcal{V}} \cap \tilde{\mathcal{X}} = \phi$$

Definition 1.1 基本セルオートマトンの local rules g, h が次の条件を満たすとき, g と h , または g と h は対称であると呼ぶ。

$$g(a, b, c) = h(c, b, a), \quad a, b, c \in S$$

次のように定義される $s: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ を対称変換と呼ぶ。 $\mathbf{x} = (\dots, 0, 0, \overset{i}{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \overset{j}{x_j}, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}$ に対して

$$s(\mathbf{x}) = (\dots, 0, 0, \overset{j}{x_j}, x_{j-1}, \dots, x_{i+1}, \overset{i}{x_i}, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}.$$

Proposition 1.2 基本セルオートマトンの local rules g, h が互いに対称ならば,

$$\forall t \in \mathbf{N}, \quad g^t = s \circ h^t \circ s$$

である。

証明は容易であるから省略する。

g, h が互いに対称であれば, g が生成する time-space pattern は, h が生成する time-space pattern の左右を入れ替えたものになる。従って, 一方の time-space pattern の特徴を解明すれば, 他方の time-space pattern も同時に解明されたことになる。

2. C_3 クラス

C_3 に属するルール全体を, 対称性の観点から整理したものが以下の表である。第 3 群と第 6 群, 第 4 群と第 7 群, 第 5 群と第 8 群は互いに対称である。今後, 主に第 1, 2, 3, 4, 5 群のルールについて考

第1群									第2群								
111	110	101	100	011	010	001	000	RN	111	110	101	100	011	010	001	000	RN
0	1	0	1	1	0	1	0	90	0	0	0	1	0	0	1	0	18
0	1	0	1	1	1	1	0	94	0	0	0	1	0	1	1	0	22
0	1	1	1	1	0	1	0	122	0	0	1	1	0	0	1	0	50
0	1	1	1	1	1	1	0	126	0	0	1	1	0	1	1	0	54
1	1	0	1	1	0	1	0	218	1	0	0	1	0	0	1	0	146
1	1	0	1	1	1	1	0	222	1	0	0	1	0	1	1	0	150
1	1	1	1	1	0	1	0	250	1	0	1	1	0	0	1	0	178
1	1	1	1	1	1	1	0	254	1	0	1	1	0	1	1	0	182

第3群									第6群								
111	110	101	100	011	010	001	000	RN	111	110	101	100	011	010	001	000	RN
0	0	0	1	1	0	1	0	26	0	1	0	1	0	0	1	0	82
0	0	0	1	1	1	1	0	30	0	1	0	1	0	1	1	0	86
0	0	1	1	1	0	1	0	58	0	1	1	1	0	0	1	0	114
0	0	1	1	1	1	1	0	62	0	1	1	1	0	1	1	0	118
1	0	0	1	1	0	1	0	154	1	1	0	1	0	0	1	0	210
1	0	0	1	1	1	1	0	158	1	1	0	1	0	1	1	0	214
1	0	1	1	1	0	1	0	186	1	1	1	1	0	0	1	0	242
1	0	1	1	1	1	1	0	190	1	1	1	1	0	1	1	0	246

第4群									第7群								
111	110	101	100	011	010	001	000	RN	111	110	101	100	011	010	001	000	RN
0	1	0	0	0	1	1	0	70	0	0	0	1	1	1	0	0	28
0	1	1	0	0	1	1	0	102	0	0	1	1	1	1	0	0	60
1	1	0	0	0	1	1	0	198	1	0	0	1	1	1	0	0	156
1	1	1	0	0	1	1	0	230	1	0	1	1	1	1	0	0	188

第5群									第8群								
111	110	101	100	011	010	001	000	RN	111	110	101	100	011	010	001	000	RN
0	1	0	0	1	1	1	0	78	0	1	0	1	1	1	0	0	92
0	1	1	0	1	0	1	0	106	0	1	1	1	1	0	0	0	120
0	1	1	0	1	1	1	0	110	0	1	1	1	1	1	0	0	124
1	1	0	0	1	0	1	0	202	1	1	0	1	1	0	0	0	216
1	1	0	0	1	1	1	0	206	1	1	0	1	1	1	0	0	220
1	1	1	0	1	0	1	0	234	1	1	1	1	1	0	0	0	248
1	1	1	0	1	1	1	0	238	1	1	1	1	1	1	0	0	252

Proposition 2.3 $\forall g \in C_3 \setminus \{106, 202, 234, 120, 216, 248\}, \forall x \in \mathcal{F} \setminus \{0\},$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} l(g^t(x)) = \infty$$

である。より詳細には；

g が第 1,2,3,6 群のいずれかに属すれば

$$l(g^t(\mathbf{x})) = l(\mathbf{x}) + 2t, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F} \setminus \{0\},$$

g が第 4,5,7,8 群のいずれかに属すれば

$$l(g^t(\mathbf{x})) = l(\mathbf{x}) + t, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F} \setminus \{0\},$$

である.

Proof: g が第 1,2,3,6 群のいずれかに属すれば

$$g(0, 0, 1) = 1, \quad g(1, 0, 0) = 1$$

であり, 第 4,5,7,8 群のいずれかに属すれば

$$g(0, 0, 1) = 1, \quad g(1, 0, 0) = 0, \quad g(*, 1, 0) = 1$$

であることに注意すれば, Proposition は明らかである. $g(*, 1, 0) = 1$ は $*$ に 0, 1 のいずれかが代入されても成立することを意味する.

3. ルール 202 と 216

ルール 202 と 216 は互いに対称である. この第 3 節ではルール 202 を考える. ルール番号 202 の local rule g_{202} は, 次の表のように与えられる.

(a, b, c)	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 0)$	$(1, 0, 1)$	$(1, 0, 0)$	$(0, 1, 1)$	$(0, 1, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 0)$
$g_{202}(a, b, c)$	1	1	0	0	1	0	1	0

この第 3 節では g_{202} を簡単に g と書くことにし, $\mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}}$ に対して dynamics $\{g^t(\mathbf{x})\}_{t \geq 0}$ がどのようなようになるかについて調べる.

3.1. ルール 202 の \mathcal{F} 上での dynamics

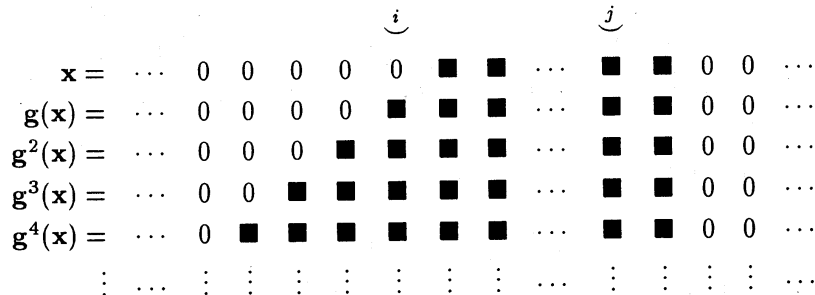
Proposition 3.1.1

$$\mathbf{x} = (0, 1_n, 0) = (\dots, 0, 0, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1, 1}_{n \geq 2}, 0, 0, 0, \dots) \in \tilde{\mathcal{B}}$$

に対して

$$g^t(\mathbf{x}) = (0, 1_{n+t}, 0) = (\dots, 0, 0, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1, 1}_{n+t}, 0, 0, 0, \dots) \in \tilde{\mathcal{B}}, \quad t \geq 0.$$

つまり $\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{B}}$ の g による時間発展は, 次の図のようで, 時間が進むにつれて configuration 中の 1 のブロックの左端が一つづつ延びていく. 状態 1 は, ■ で表現されている.



Proof: 次のことに注意すればよい.

$$g(0,0,1) = 1, g(0,1,1) = 1, g(1,1,1) = 1, g(1,1,0) = 1, g(1,0,0) = 0, g(0,0,0) = 0.$$

Proposition 3.1.2 (1) $\forall \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{U}}, \forall t \geq 0, \mathbf{g}^t(\mathbf{x}) = \sigma_L^t(\mathbf{x}) \in \tilde{\mathcal{U}}$.

(2) $\mathbf{g}(\tilde{\mathcal{V}}) \subseteq \tilde{\mathcal{U}}$ であり, 従って

$$\forall \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{V}}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \tilde{\mathcal{U}}, \mathbf{g}^t(\mathbf{x}) = \sigma_L^{t-1}(\mathbf{g}(\mathbf{x})), \forall t \geq 2.$$

より詳細には, 次の通りである.

$$\mathbf{x} = (0 \overset{0}{0} \overbrace{010 \cdots 010}^{i_1 \text{組}} \overbrace{0 \cdots 010}^{m_1} \overbrace{010 \cdots 010}^{i_2 \text{組}} \overbrace{0 \cdots 010}^{m_2} \cdots \overbrace{0 \cdots 010}^{m_{n-1}} \overbrace{010 \cdots 010}^{i_n \text{組}} 0) \in \tilde{\mathcal{V}}$$

に対して

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (0 \overset{0}{0} \underbrace{100 \cdots 000}_{2i_1-1} \underbrace{0 \cdots 0100 \cdots 000}_{m_1} \underbrace{100 \cdots 000}_{2i_2-1} \underbrace{0 \cdots 0100 \cdots 000}_{m_2} \cdots \underbrace{0 \cdots 0100 \cdots 000}_{m_{n-1}} \underbrace{0 \cdots 0100 \cdots 000}_{2i_n-1}) \in \tilde{\mathcal{U}}.$$

Proof: (1) $\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{U}}$ 中の 0 のブロックの長さが 2 以上であることと次のことに注意すればよい.

$$g(0,0,1) = 1, g(0,1,0) = 0, g(1,0,0) = 0.$$

(2) $m_i \geq 1$ であることと次のことに注意すればよい.

$$g(0,0,1) = 1, g(0,1,0) = 0, g(1,0,1) = 0, g(1,0,0) = 0.$$

Example 3.1.3 $\mathbf{x} = (0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0)$ を初期 configuration としたときの time-space pattern は次の図のようになる. 状態 1 は ■ で表現されている.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \mathbf{x} = & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \cdots \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mathbf{g}^2(\mathbf{x}) = & \cdots & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mathbf{g}^3(\mathbf{x}) = & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mathbf{g}^4(\mathbf{x}) = & \cdots & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}$$

Proposition 3.1.4

$$\mathbf{x} = (0, \overset{i_1}{1}, \overset{i_2}{0_{m_1}}, \overset{i_3}{1}, \overset{i_4}{0_{m_2}}, \cdots, \overset{i_n}{0_{m_{n-1}}}, \overset{i_{n+1}}{1}, \overset{i_{n+2}}{0_{m_n}}, \overset{i_{n+3}}{1_l}, 0) \in \tilde{\mathcal{W}}, \quad n \geq 0$$

に対して,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (0, \overset{i_1-1}{1}, \overset{i_2-1}{0_{m_1}}, \overset{i_3-1}{1}, \overset{i_4-1}{0_{m_2}}, \cdots, \overset{i_n-1}{0_{m_{n-1}}}, \overset{i_{n+1}-1}{1}, \overset{i_{n+2}-1}{0_{m_n}}, \overset{i_{n+3}-1}{1_{l+1}}, 0) \in \tilde{\mathcal{W}}$$

である. $m_1 \geq 2, m_2 \geq 2, \dots, m_n \geq 2, l \geq 2$ であることに注意せよ. また $n = 0$ のとき, $\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{B}}$ である.

Proof 次のことに注意すればよい.

$$\begin{aligned} g(0,0,0) &= 0, g(0,0,1) = 1, g(0,1,0) = 0, g(0,1,1) = 1, \\ g(1,0,0) &= 0, g(1,1,0) = 1, g(1,1,1) = 1. \end{aligned}$$

Example 3.1.5 $x = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$ を初期 configuration としたときの time-space pattern は次の図のようになる. 状態 1 は ■ で表現されている.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 x & = & \cdots & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\
 g(x) & = & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\
 g^2(x) & = & \cdots & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\
 g^3(x) & = & \cdots & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\
 \vdots & & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
 \end{array}$$

Proposition 3.1.6 (1) $\tilde{\mathcal{X}}_2$ の要素について次のことが言える.

$$x = (0, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{i_1 \text{組} \geq 1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_1 \geq 1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_{n-1} \geq 1}, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0}_{i_n \text{組} \geq 1}, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{m_n \geq 2}, \underbrace{1, \dots, 1, 0}_{l \geq 2}) \in \tilde{\mathcal{X}}_2, \quad n \geq 0$$

に対して

$$g(x) = (0, \underbrace{1, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0}_{2i_1-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_1 \geq 1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_{n-1} \geq 1}, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0}_{2i_n-1}, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{m_n-1}, \underbrace{1, 1, \dots, 1, 0}_{l+1}) \in \tilde{\mathcal{W}},$$

ここで $n=0$ の時, $x \in \tilde{\mathcal{B}}$ である.

(2) $\tilde{\mathcal{X}}_1$ の要素について次のことが言える.

$$x = (0, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{i_1 \text{組} \geq 1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_1 \geq 1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_{n-1} \geq 1}, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{i_n \text{組} \geq 1}, \underbrace{1, \dots, 1, 0}_{l \geq 2}) \in \tilde{\mathcal{X}}_1, \quad n \geq 1$$

に対して

$$g(x) = (0, \underbrace{1, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0}_{2i_1-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_1 \geq 1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_{n-1} \geq 1}, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0}_{2i_n-1}, \underbrace{0, 1, \dots, 1, 0}_l) \in \tilde{\mathcal{W}}.$$

Proof: $g(0, 0, 1) = 1$, $g(1, 0, 1) = 0$ であることに注意すれば, (1) (2) いずれも容易に分かる.

Proposition 3.1.7 $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ とする. つまり

$$\begin{aligned}
 x &= (0, \overset{i_1}{a_1}, 0_{m_1}, \overset{i_2}{a_2}, 0_{m_2}, \dots, 0_{m_{n-1}}, \overset{i_n}{a_n}, 0), \\
 &\text{or } (0, \overset{i_1}{a_1}, 0_{m_1}, \overset{i_2}{a_2}, 0_{m_2}, \dots, 0_{m_{n-1}}, \overset{i_n}{a_n}, 0_{m_n}, \overset{j}{v}, 0), \\
 &a_i \in \mathcal{X}_1 \text{ or } \mathcal{X}_2, v \in \mathcal{V}, \\
 &m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, \dots, m_{n-1} \geq 0, m_n \geq 0.
 \end{aligned}$$

ここで, 各 a_k の上に書かれている i_k は, a_k の最後の要素が x 中に占める場所の座標番号を表す. j に関しても同様である. このような x に対して,

$$\forall t \geq 0, g^t(x) = (g^t(0, \overset{i_1}{a_1}, 0)_{-\infty, i_1}, 0, g^t(0, \overset{i_2}{a_2}, 0)_{i_1+2, i_2}, 0, \dots, 0, g^t(0, \overset{i_n}{a_n}, 0)_{i_{n-1}+2, i_n}, 0),$$

または

$$\forall t \geq 0, g^t(x) = (g^t(0, \overset{i_1}{a_1}, 0)_{-\infty, i_1}, 0, g^t(0, \overset{i_2}{a_2}, 0)_{i_1+2, i_2}, 0, \dots, 0, g^t(0, \overset{i_n}{a_n}, 0)_{i_{n-1}+2, i_n}, 0, g^t(0, \overset{j}{v}, 0)_{i_n+2, \infty})$$

である。また

$$2 \leq \forall j \leq n, \exists T_j, \forall t \geq T_j, \quad \mathbf{g}^t(\mathbf{0}, \mathbf{a}_j, \mathbf{0})_{i_{j-1}+2, i_j} = \mathbf{1}_{i_j - i_{j-1} - 1},$$

$$\exists T, \forall t \geq T, \quad \mathbf{g}^t(\mathbf{0}, \mathbf{v}, \mathbf{0})_{i_n+2, \infty} = \mathbf{0}$$

であるから

$$\forall t \geq \max\{\max_{2 \leq j \leq n} T_j, T\}, \quad \mathbf{g}^t(\mathbf{x}) = (\mathbf{g}^t(\mathbf{0}, \mathbf{a}_1, \mathbf{0})_{-\infty, i_1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}_{i_2 - i_1 - 1}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{1}_{i_n - i_{n-1} - 1}, \mathbf{0}),$$

$$\mathbf{g}^t(\mathbf{0}, \mathbf{a}_1, \mathbf{0}) \in \widetilde{\mathcal{W}}$$

となる。

Proof: $g(1, 0, \star) = 0$, $g(0, 1, 0) = 0$, $g(0, 1, 1) = 1$ に注意し, Propositions 3.1.4 and 3.1.6 を用いればよい。

Example 3.1.8 $\mathbf{x} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$ を初期 configuration としたときの time-space pattern は次の図のようになる。状態 1 は ■ で表現されている。

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccccc} \mathbf{x} = & \cdots & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\ \mathbf{g}^2(\mathbf{x}) = & \cdots & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\ \mathbf{g}^3(\mathbf{x}) = & \cdots & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\ \mathbf{g}^4(\mathbf{x}) = & \cdots & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\ \mathbf{g}^5(\mathbf{x}) = & \cdots & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\ \mathbf{g}^6(\mathbf{x}) = & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\ \mathbf{g}^7(\mathbf{x}) = & \cdots & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}$$

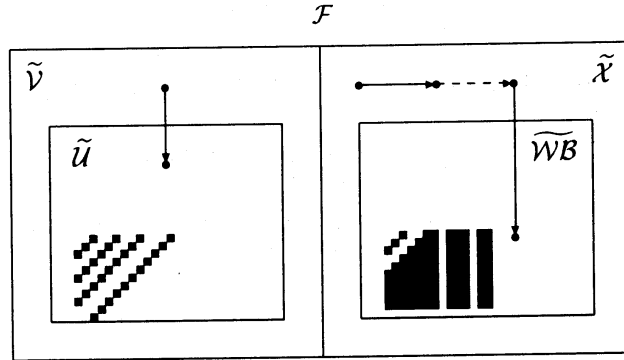
以上の Propositions から次の Theorem 3.1.9 が成立する。

Theorem 3.1.9 ルール 202 の \mathcal{F} 上の dynamics に関して次のことが成立する。 $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{V}} \cup \widetilde{\mathcal{X}}$, $\widetilde{\mathcal{V}} \cap \widetilde{\mathcal{X}} = \emptyset$ が成立していたことに注意せよ。

$$\forall \mathbf{x} \in \widetilde{\mathcal{V}}, \forall t \geq 1, \quad \mathbf{g}^t(\mathbf{x}) = \sigma_L^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \in \widetilde{\mathcal{U}},$$

$$\forall \mathbf{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}, \exists T, \forall t \geq T, \quad \mathbf{g}^t(\mathbf{x}) \in \widetilde{\mathcal{WB}}.$$

$\widetilde{\mathcal{U}}$ に入ってから動きは, Proposition 3.1.2(1) で述べられていて, $\widetilde{\mathcal{WB}}$ に入ってから動きは, Proposition 3.1.4 で述べられている。以上でルール番号 202 を持つセルオートマトンが 0-finite configurations 全体の集合である \mathcal{F} 上でどのような dynamics を描くかについては完全に解明できたことになり, またその time-space pattern も明らかにされたことになる。 \mathcal{F} 上では 0 以外不動点も周期点も存在せず, $\widetilde{\mathcal{U}}$ 上では σ_L と同等であり, $\widetilde{\mathcal{WB}}$ 上では次の 3.2.1 節で述べられている ftp6 の型の不動点に収束していく。次の図を参照すること。

Dynamics of Rule 202 on \mathcal{F} 

ルール番号 202 の length of pattern については次の Corollary が成立する.

Corollary to Theorem 3.1.9

$$\forall \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{V}}, \forall t \geq 2, \quad l(\mathbf{g}^t(\mathbf{x})) = l(\mathbf{g}(\mathbf{x})),$$

$$\forall \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}, \exists T, \forall t \geq T, \quad l(\mathbf{g}^t(\mathbf{x})) = l(\mathbf{g}^T(\mathbf{x})) + (t - T).$$

3.2. ルール 202 と 216 の $S^{\mathbb{Z}}$ 上での dynamics

ルール 202 と 216 は対称である. 本節ではルール 202 を考える. Theorem 3.1.9 よりルール 202 は \mathcal{F} 中には 0 以外不動点も周期点も持たず, 生成される time-space pattern はすでに述べた通りである.

$\mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\}$ は, $\mathbf{x}_{-\infty, k} = 0, \exists k \in \mathbb{Z}$ であれば, 周期点でも不動点でもない. このような configuration を左 0-finite であると呼ぶ. 同様にして右 0-finite configuration も定義できる.

3.2.1. 不動点

不動点の型は次の通りである.

$$\begin{aligned} fpt1 &: (\dots, 0, 1_{m_{-k}}, 0, 1_{m_{-k+1}}, \dots, 0, 1_{m_{k-1}}, 0, 1_{m_k}, 0, \dots), \quad m_i \geq 2, \quad -\infty < i < \infty, \\ fpt2 &: (1, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, \dots, 0, 1_{m_k}, \dots), \quad m_i \geq 2, \quad 1 \leq i < \infty, \\ fpt3 &: (\dots, 0, 1_{m_{-k}}, 0, 1_{m_{-k+1}}, \dots, 0, 1_{m_{-1}}, 0, 1), \quad m_i \geq 2, \quad -\infty < i \leq -1, \\ fpt4 &: (\dots, 0, 1_{m_{-k}}, 0, 1_{m_{-k+1}}, \dots, 0, 1_{m_{-1}}, 0), \quad m_i \geq 2, \quad -\infty < i \leq -1, \\ fpt5 &: (1, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, \dots, 0, 1_{m_k}, 0, 1), \quad m_i \geq 2, \quad 1 \leq i \leq k, \quad k \geq 0, \\ fpt6 &: (1, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, \dots, 0, 1_{m_k}, 0), \quad m_i \geq 2, \quad 1 \leq i \leq k, \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

つまり, 長さ 2 以上の 1 のブロックが一つの 0 をはさんで隣り合っているような configuration で左 0-finite でないようなものが不動点である.

$\mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}}$ が

長さ 2 以上の 1 のブロックを右側に可算個持つ,

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{x}_{k, \infty} = 1$$

長さ 2 以上の 1 のブロックを少なくとも一つ持ち右 0-finite である、
のいずれかであれば $g^t(x)$ は、上記のいずれかの不動点に収束していく。このことは Proposition 3.1.7
を参照すれば明らかである。

また、Proposition 3.1.2 の証明に注意すれば、 $x \in S^Z$ が長さ 2 以上の 1 のブロックを持たなければ、

$$\forall t \geq 2, \quad g^t(x) = \sigma_L^{-1}(g(x))$$

となることが分かる。つまりこのような x は、 $\sigma_R \circ g$ の不動点である。ここで、 $\sigma_R \circ g$ は σ_R と g の
合成関数である。

3.2.2. 周期点

(1) 長さ 2 以上の 1 のブロックを含まない場合。1 が孤立していて、1 と 1 との間の 0 の個数が
2 以上であるような configuration の中に周期点が存在し得るが、左 0-finite 及び finite configuration
は、周期点になり得ない。従って次のような型の configuration を考える。

$$x = (\dots, 0_{m_{-k}}, 1, 0_{m_{-k+1}}, 1, \dots, 1, 0_{m_{k-1}}, 1, 0_{m_k}, 1, \dots), \quad m_i \geq 2, \quad -\infty < i < \infty \quad (3.2.1)$$

Proposition 3.1.2 (1) の証明に注意すれば、このような x に対して

$$\forall t \geq 0, \quad g^t(x) = \sigma_L^t(x) \quad (3.2.2)$$

である。従って、このことから、次の定理が成立する。

Proposition 3.2.2.1

(3.2.1) の型の $x \in S^Z$ が p 周期点になるための必要十分条件は、次の条件を満たすことである：

$$\begin{aligned} \exists i \in \mathbf{Z}, \exists k \geq 1, \quad & m_{i+1} + 1 + \dots + m_{i+k} + 1 = p, \\ & \dots = m_{i-2k} = m_{i-k} = m_i = m_{i+k} = m_{i+2k} = \dots, \\ & \dots = m_{i-2k-1} = m_{i-k-1} = m_{i-1} = m_{i+k-1} = m_{i+2k-1} = \dots, \\ & \dots = m_{i-2k-2} = m_{i-k-2} = m_{i-2} = m_{i+k-2} = m_{i+2k-2} = \dots, \\ & \dots \\ & \dots = m_{i-3k+1} = m_{i-2k+1} = m_{i-k+1} = m_{i+1} = m_{i+k+1} = \dots, \end{aligned}$$

Proof: 十分性は明らかである。必要性を示す。

$$x = (\dots, \overset{j_{i-k-1}}{1}, 0_{m_{i-k}}, \overset{j_{i-k}}{1}, 0_{m_{i-k+1}}, \overset{j_{i-k+1}}{1}, \dots, \overset{j_{i-1}}{1}, 0_{m_i}, \overset{j_i}{1}, 0_{m_{i+1}}, \overset{j_{i+1}}{1}, \dots, \\ \dots, \overset{j_{i+k-1}}{1}, 0_{m_{i+k}}, \overset{j_{i+k}}{1}, 0_{m_{i+k+1}}, \overset{j_{i+k+1}}{1}, \dots),$$

とおき、この x が p 周期であるとする。(3.2.2) から $\sigma_L^p(x) = x$ であるから、

$$\exists i \in \mathbf{Z}, \exists k \geq 1, \quad j_{i+k} - p = j_i$$

となる。このことから $\forall m \in \mathbf{Z}, j_{i+k-m} - p = j_{i-m}$ となり、Proposition が成立する。

周期 3 以上の任意の周期点が存在することが分かり,

$$(\dots, 0_p, 1, 0_p, 1, \dots, 1, 0_p, 1, 0_p, 1, \dots)$$

が一つの $p+1$ 周期点である.

(2) 長さ 2 以上の 1 のブロックを含む場合. 長さ 2 以上の 1 のブロックのみから成るような configuration で周期になるものは, $fpt1$, $fpt2$, $fpt3$, $fpt4$, $fpt5$ のいずれかの型であり, これらは不動点である.

長さ 2 以上のブロックと孤立した 1 とが混在する configuration の場合, あるところから左側に長さ 2 以上のブロックが, 右側に可算個の孤立した 1 が二つ以上の 0 をはさみながら存在しなければ周期点になり得ない. そこで次のような型の configuration を考える

$$(\dots, 0, \overset{j_i}{1}m_{-i}, 0, \overset{j_{i-1}}{1}m_{-i+1}, \dots, 0, \overset{j_{i-2}}{1}m_{-1}, \overset{j_{i-1}}{0}n_1, 1, \dots, 1, \overset{j_i}{0}n_{i-1}, 1, \overset{j_i}{0}n_i, 1, \dots), \quad (3.2.3)$$

$$m_i \geq 2, \quad -\infty < i \leq -1, \quad n_1 \geq 1, \quad n_i \geq 2, \quad 2 \leq i < \infty$$

$$(1, 0, \overset{j_i}{1}m_{-i}, 0, \overset{j_{i-1}}{1}m_{-i+1}, \dots, 0, \overset{j_{i-2}}{1}m_{-1}, \overset{j_{i-1}}{0}n_1, 1, \dots, 1, \overset{j_i}{0}n_{i-1}, 1, \overset{j_i}{0}n_i, 1, \dots), \quad (3.2.4)$$

$$m_i \geq 2, \quad 1 \leq i \leq l, \quad l \geq 0, \quad n_1 \geq 1, \quad n_i \geq 2, \quad 2 \leq i < \infty$$

このような configurations が周期になるかどうかは, n_1, n_2, \dots の間の関係で決まる. $g(1, 0, 1) = 0$, $g(0, 1, 0) = 0$ であることに注意すると, 次の Proposition が容易に得られる.

Proposition 3.2.2.2 (2.4.3) または (2.4.4) の型の configuration が $p \geq 3$ 周期点になるための必要十分条件は, 次の条件を満たすことである;

$$\begin{aligned} \exists i \in \mathbf{Z}, \exists k \geq 1, \quad i \leq k, \\ n_1 + n_2 + 1 + \dots + n_i + 1 \leq p, \\ n_{i+1} + 1 + \dots + n_{i+k} + 1 = p, \\ n_{i+1} = n_{i+k+1} = n_{i+2k+1} = \dots, \\ n_{i+2} = n_{i+k+2} = n_{i+2k+2} = \dots, \\ n_1 - 1 \leq n_{k+1} = n_{2k+1} = n_{3k+1} = \dots, \\ n_2 = n_{k+2} = n_{2k+2} = n_{3k+2} = \dots, \\ \dots\dots\dots \\ n_i = n_{i+k} = n_{i+2k} = n_{i+3k} = \dots, \end{aligned}$$

ルール 202 の周期 3 以上の周期点は, (3.2.1), (3.2.3) または (3.2.4) の型以外に存在しない. また, 周期 2 の周期点は存在しない. これは $g(1, 0, 1) = 0$, $g(0, 1, 0) = 0$ であることから言えるが, このことから次の Corollary も成立する.

Corollary (1) 3 周期点は,

$$(\dots, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots),$$

$$(\dots, 0, \overset{j_i}{1}m_{-i}, 0, \overset{j_{i-1}}{1}m_{-i+1}, \dots, 0, \overset{j_{i-2}}{1}m_{-1}, \overset{j_{i-1}}{0}n_1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots),$$

$$m_i \geq 2, \quad -\infty < i \leq -1, \quad 1 \leq n_1 \leq 3$$

$$(1, 0, \overset{j_i}{1}m_{-i}, 0, \overset{j_{i-1}}{1}m_{-i+1}, \dots, 0, \overset{j_{i-2}}{1}m_{-1}, \overset{j_{i-1}}{0}n_1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots),$$

$$m_i \geq 2, \quad 1 \leq i \leq l, \quad l \geq 0, \quad 1 \leq n_1 \leq 3$$

の型に限る.

(2) 4 周期点は,

$$\begin{aligned}
 & (\dots, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots), \\
 & (\dots, 0, 1_{m_i}, 0, 1_{m_{i+1}}, \dots, 0, 1_{m_{-1}}, 0_{n_1}, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots), \\
 & \quad m_i \geq 2, \quad -\infty < i \leq -1, \quad 1 \leq n_1 \leq 4 \\
 & (1, 0, 1_{m_{-l}}, 0, 1_{m_{-l+1}}, \dots, 0, 1_{m_{-1}}, 0_{n_1}, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots), \\
 & \quad m_i \geq 2, \quad 1 \leq i \leq l, \quad l \geq 0, \quad 1 \leq n_1 \leq 4
 \end{aligned}$$

の型に限る.

3.2.3 ルール 202 の少し変わった動き

ルール 202 は, ウルフラムの分類によるとクラス II に属し, configuration の時間発展はいずれ安定した動きになるとされている. しかしながら, 以上の考察から次の例で示されるような動きをするものが存在し, ウルフラムの主張は必ずしも成立しないと予想され得る.

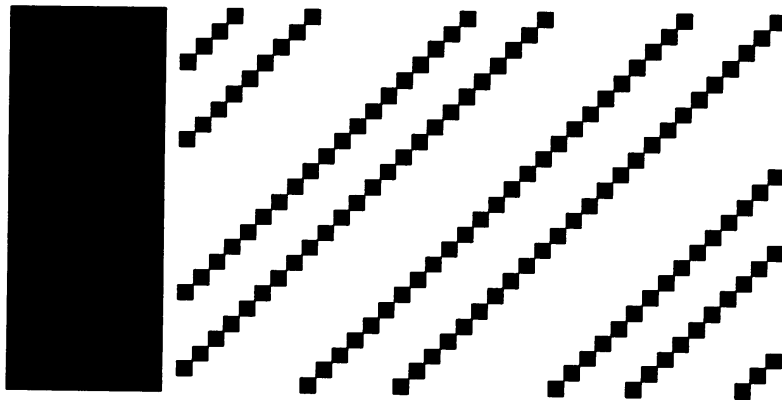
次のような configuration x を考える. この configuration の右側には, 少なくとも二つ以上の 0 をはさんだ孤立した 1 が可算個存在する.

$$x = (1, 0_{m_1}, 1, 0_{m_2}, 1, \dots, 1, 0_{m_i}, 1, \dots), \quad m_i \geq 2, \quad 1 \leq i \leq \infty$$

このような configuration の時間発展は, 例えば次の図のようになる. 状態 1 は ■ で表されている.

左側にある 1 のブロックが壁のようになり, 右側から押し寄せてくる 1 が壁の丁度一つ手前で消え去るといった現象が時間発展と共に無限に生じることになる. まるで高速道路を走行中の自動車のフロントガラスに次々と向かってくるラブバックのようではないか. 1 と 1 の間の 0 の個数がランダムに与えられていれば, このような動きは安定しているとは考えにくく, もちろん周期的ではないし, 不動点にも収束しない.

ウルフラムの分類は, 一概には成立せず, 初期 configuration によって, 描かれる時空間パターンが大きく異なるであろうことが予想され得る.



4. ルール 234 と 248

ルール 234 と 248 は対称である。第 4 節でルール 234 が生成する時空間パターンについて述べる。ルール番号 234 の local rule g_{234} は、次の表のように与えられる。

(a, b, c)	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 0)$	$(1, 0, 1)$	$(1, 0, 0)$	$(0, 1, 1)$	$(0, 1, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 0)$
$g_{234}(a, b, c)$	1	1	1	0	1	0	1	0

この第 4 節では g_{234} を簡単に g と書くことにし、 $\mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}}$ に対して dynamics $\{g^t(\mathbf{x})\}_{t \geq 0}$ がどのようなようになるかについて調べる。 g_{202} との違いは、 $g_{202}(101) = 0$ に対して $g_{234}(101) = 1$ であることであり、その他の対応関係は同じであることに注意する。

4.1. ルール 234 の \mathcal{F} 上での dynamics

$$g(0, 0, 1) = 1, g(0, 1, 1) = 1, g(1, 1, 1) = 1, g(1, 1, 0) = 1, g(1, 0, 0) = 0, g(0, 0, 0) = 0$$

に注意すれば、

$$\mathbf{x} = (0, 1_n, 0) = (\dots, 0, 0, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1, 1}_{n \geq 2}, 0, 0, 0, \dots) \in \tilde{\mathcal{B}}$$

に対して

$$\forall t \geq 0, g^t(\mathbf{x}) = (0, 1_{n+t}, 0) = (\dots, 0, 0, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1, 1}_{n+t}, 0, 0, 0, \dots) \in \tilde{\mathcal{B}},$$

である。つまり、

$$\forall \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{B}}, g_{202}(\mathbf{x}) = g_{234}(\mathbf{x})$$

であり、 $\tilde{\mathcal{B}}$ 上では g_{202} と g_{234} とは同じ dynamics を描く。

また、

$$g(0, 0, 1) = 1, g(0, 1, 0) = 0, g(1, 0, 1) = 1, g(1, 0, 0) = 0$$

であることに注意すれば、

$$\forall \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{V}}, \forall t \geq 0, g^t(\mathbf{x}) = \sigma_L(\mathbf{x})$$

となる。ルール番号 202 の場合は、

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{U}}, \forall t \geq 0, g_{202}^t(\mathbf{x}) &= \sigma_L^t(\mathbf{x}), \\ g_{202}(\tilde{\mathcal{V}} \setminus \tilde{\mathcal{U}}) &\subset \tilde{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

であったが、ルール番号 234 の場合は、 $\tilde{\mathcal{V}}$ 上で $g_{234} = \sigma_L$ となる。

以上ことから次の Proposition 4.1.1 が得られる。

Proposition 4.1.1

$$\mathbf{x} = (0, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{i_1 \text{ 組} \geq 1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_1 \geq 1}, \dots, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_{n-1} \geq 1}, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{i_n \text{ 組} \geq 1}, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{m_n \geq 1}, \underbrace{0, 1, \dots, 1, 0}_{l \geq 2}, 0) \in \tilde{\mathcal{X}}_1 \cup \tilde{\mathcal{X}}_2, \quad n \geq 0$$

に対して

$$\forall t \geq 0, g^t(\mathbf{x}) = \sigma_L^t(\mathbf{x}_{-\infty, p}, \mathbf{0}) \oplus (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{l+t}, 0)$$

である. $n = 0$ の時は, $\mathbf{x} = (0, 1, 0) \in \tilde{B}$ であり, すでに述べたように $\forall t \geq 0, g^t(\mathbf{x}) = (0, 1_{l+t}, 0) \in \tilde{B}$ である.

$g_{234}(1, 0, 1) = 1$ であることに注意すると, \mathcal{F} 上の g_{234} の dynamics に関する次の Theorem 4.1.2 が得られる.

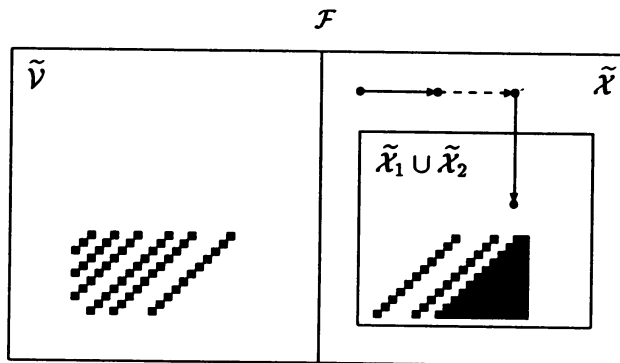
Theorem 4.1.2

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{V}}, \forall t \geq 0, \quad g^t(\mathbf{x}) &= \sigma_L^t(\mathbf{x}) \in \tilde{\mathcal{V}}, \\ \forall \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}, \exists T, \forall t \geq T, \quad g^t(\mathbf{x}) &\in \tilde{\mathcal{X}}_1 \cup \tilde{\mathcal{X}}_2 \end{aligned}$$

である.

$\tilde{\mathcal{X}}_1 \cup \tilde{\mathcal{X}}_2$ 上でのルール 234 の動きは, Proposition 4.1.1 で述べられている. ルール 202 の \mathcal{F} 上での動きに比べ単純に成っていることが分かるが, これは $g_{234}(1, 0, 1) = 1$ と $g_{202}(1, 0, 1) = 0$ の違いによるものである. 次の図を参照せよ.

Dynamics of Rule 234 on \mathcal{F}



ルール番号 234 の length of pattern については次の Corollary が成立する.

Corollary to Theorem 4.1.2

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{V}}, \forall t \geq 0, \quad l(g^t(\mathbf{x})) &= l(\mathbf{x}), \\ \forall \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}, \exists T, \forall t \geq T, \quad l(g^t(\mathbf{x})) &= l(g^T(\mathbf{x})) + (t - T) \end{aligned}$$

4.2. ルール 234 と 248 の $S^{\mathbb{Z}}$ 上での dynamics

ルール 234 の $S^{\mathbb{Z}}$ 上での dynamics は simple で, $\forall \mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\}$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g^t(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1, 0), & \mathbf{x} \text{ は右 } 0\text{-finite} \text{ で長さ } 2 \text{ 以上の } 1 \text{ のブロックを少なくとも一つ持つ,} \\ (1), & \mathbf{x} \text{ は右 } 0\text{-finite} \text{ でなく長さ } 2 \text{ 以上の } 1 \text{ のブロックを少なくとも一つ持つ,} \end{cases}$$

または

$$\forall t \geq 0, \quad g^t(\mathbf{x}) = \sigma_L^t(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \text{ は長さ } 2 \text{ 以上の } 1 \text{ ブロックを持たない}$$

となる. (0) は不動点であるから, ルール 234 においては, 不動点の型は (0), (1, 0), (1) 以外に存在せず, 任意の $\mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}}$ は長さ 2 以上のブロックを少なくとも 1 つ持てば, 不動点もしくは究極的不動点である. これは, ルール 202 との大きな違いであり, このことが $g_{234}(1, 0, 1) = 1$ と $g_{202}(1, 0, 1) = 0$ との違いによってのみ引き起こされていることに注意すべきである.

周期点は, 右 0-finite でも左 0-finite でもなく, 1 が可算個存在するような configuration でなければならない. 次のような型でなければならない.

$$\mathbf{x} = (\dots, 0_{m_{-k}}, 1, 0_{m_{-k+1}}, 1, \dots, 1, 0_{m_{k-1}}, 1, 0_{m_k}, 1, \dots), \quad m_i \geq 1, \quad -\infty < i < \infty \quad (4.2.1)$$

Proposition 3.2.2.1 の証明と同様にして次の Proposition が成立する.

Proposition 4.2.1 $\mathbf{x} \in S^{\mathbb{Z}}$ が $p \geq 2$ 周期点になるための必要十分条件は, \mathbf{x} が (4.2.1) の型でありかつ次の条件を満たすことである;

$$\begin{aligned} \exists i \in \mathbb{Z}, \exists k \geq 1, \quad & m_{i+1} + 1 + \dots + m_{i+k} + 1 = p, \\ & \dots = m_{i-2k} = m_{i-k} = m_i = m_{i+k} = m_{i+2k} = \dots, \\ & \dots = m_{i-2k-1} = m_{i-k-1} = m_{i-1} = m_{i+k-1} = m_{i+2k-1} = \dots, \\ & \dots = m_{i-2k-2} = m_{i-k-2} = m_{i-2} = m_{i+k-2} = m_{i+2k-2} = \dots, \\ & \dots \\ & \dots = m_{i-3k+1} = m_{i-2k+1} = m_{i-k+1} = m_{i+1} = m_{i+k+1} = \dots, \end{aligned}$$

Corollary to Proposition 4.2.1 (1) 2 周期点は, $(\dots, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ の型以外に存在しない.
 (2) 3 周期点は $(\dots, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ 以外に存在しない.

ルール 234 では, 全ての周期点が存在する. 周期点に関するルール 204 との違いは, 2 周期点が存在するかどうかである.

REFERENCES

- [1] G.Braga, G.Cattaneo, P.Flocchini and C.Quaranta Vogliotti, Pattern growth in elementary cellular automata, Theoretical Computer Science, **145**(1995), 1-26.
- [2] G. Cattaneo and L. Margara, Generalized sub-shifts in elementary cellular automata: the "strange case" of chaotic rule 180, Theoretical Computer Science, **201**(1998), 171-187.
- [3] C. G. Langton, STUDYING ARTIFICIAL LIFE WITH CELLULAR AUTOMATA, Physica **22D**(1986), 120-149.
- [4] C. G. Langton, Life at the Edge of Chaos, ARTIFICIAL LIFE II, PROCEEDINGS OF THE WORKSHOP ON ARTIFICIAL LIFE HELD FEBRUARY, 1990 IN SANTAFE, NEW MEXICO, edited by Christopher G.Langton, Charles Taylor, J.Doyle Farmer and Steen Rasmussen, Addison-Wesley Publishing Company, 41-91.
- [5] F. Ohi and Y. Takamatsu, Time-Space Pattern and Periodic Property of Elementary Cellular Automata - Sierpinski Gasket and Partially Sierpinski Gasket -, Journal of Industrial and Applied Mathematics, **18**(2001), 59-73.
- [6] S. Wolfram, Statistical mechanics of cellular automata, Review of Modern Physics, **55**(1983),

[7] S. Wolfram, UNIVERSALITY AND COMPLEXITY IN CELLULAR AUTOMATA, *Physica* **10D**(1984),1-35.