数理解析研究所講究録 1263 巻 2002 年 51-71

部分観測可能なマルコフ過程での多段決定問題について

中井　達 (Tōru Nakai)

九州大学大学院経済学研究院
(Faculty of Economics, Kyushu University)

1　不完備情報のシステム

部分観測可能なマルコフ過程における多段決定問題を解析することを考える。そのために、部分観測可能なマルコフ過程の学習プロセスとその性質を 3 節で考える。そのために 2 節では尤度比順序を 2.1 節で定義し、尤度比順序を多変量の場合を含めて一般化した $\mathrm{MTP}_2(\mathrm{GMTP}_2)$ の定義とその性質を 2.2 節で解析する。3 節では、部分観測可能なマルコフ過程について考えるが、はじめに部分観測可能なマルコフ連鎖を 3.1 節で定義し、その学習のプロセスを 3.2 節でまとめる。これらの性質をもとに、3.3 節で部分観測可能なマルコフ過程を定義し、その性質を 2.2 節の GMTP_2(generalized multivariate total positivity of order two) の性質を用いて解析する。

つぎに、部分観測可能なマルコフ過程における多段決定問題を、最適選択問題や取り替え問題などいろいろな問題に応用できるが、ジョブ・サーチと確率的逐次割り当て問題で考える。そのため、4.1 節ではジョブ・サーチを、4.2 節では確率的逐次割り当て問題を簡単に説明する。最後の 5 節では、部分観測可能なマルコフ過程におけるジョブ・サーチ (5.1 節) と確率的逐次割り当て問題 (5.2 節) を考える。

2　TP_2(total positivity of order 2)

部分観測可能なマルコフ連鎖やマルコフ過程の状態に関する情報は、状態空間上の確率分布で表すことができる。これらの情報、すなわち確率分布のあいだに順序を入れることを考えるが、ここでは尤度比順序を考える。この順序関係は、最適政策と事前情報との関係など重要な性質を求めるときに必要となる。その他の確率的順序関係については Stoyan [27], Ross [26] などに詳しく、待ち行列・取り替え問題など、多くの確率的な多段決定問題で応用されている。

2.1 節では、尤度比を用いた順序を考えるが、この順序は一般的な確率順序などに比べ強い順序関係ではあるが、ベイズ学習を解析する上で重要な順序関係で、不完備情報の多段決定問題を含め、多くの問題で扱われている。ベイズの定理に基づいた学習プロセスでの、事前情報 (prior information) と事後情報 (posterior information) の関係についての基本的な性質については、3.1 節で詳しく述べる。2.2 節では、部分観測可能なマルコフ過程での学習を考えるために、2.1 節の確率的順序関係を一般化し、さらにそのために必要な性質を求める。さらに、情報過程を表す確率変数や、状態空間を一般化するため、多変量確率変数にも対応できるようにする。

2.1 尤度比順序

確率変数 X, Y の確率密度関数を、それぞれ $f_X(x), f_Y(x)$ とし、$x \geq y$ であれば、$f_X(y)f_Y(x) \leq f_X(x)f_Y(y)$ とする。このとき、X は Y より尤度比の意味で大きいといい $X \succeq Y$ と表す。この順序は、尤度比 $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(x)}$ を用いたもので尤度比順序という。この順序は、2つの確率変数 X, Y に対して、X が Y より尤度比の意味で大きいことと、尤度比 $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(x)}$ が x に関する増加関数となっていることは等しい。この順序関係は、2つの確率変数 X, Y が確率密度関数を持つ場合だけでなく、離散型の確率変数のときも定義でき、一般的には次のように定義できる。

定義 1 任意の半開区間 $(s,t]$、$(u,v]$ $(s \leq u, t \leq v)$ に対し

$$\frac{\Pr(X \in (u,v])}{\Pr(Y \in (u,v])} \geq \frac{\Pr(X \in (s,t])}{\Pr(Y \in (s,t])} \tag{1}$$

または、$\begin{vmatrix} \Pr(X \in (u,v]) & \Pr(Y \in (s,t]) \\ \Pr(X \in (u,v]) & \Pr(Y \in (s,t]) \end{vmatrix} \geq 0$ とする。このとき、X は Y より尤度比の意味で大きいといい $X \succeq Y$ と表す。

この尤度比順序は確率過程を解析するとき TP_2(total positivity of order 2) といわれ、いろいろな性質が解析されている (Karlin [7], Karlin and Taylor [8] など)。このとき、定義1で定義した順序は半順序となる。このとき、尤度比順序が成り立つ簡単な例として、つぎのようなものがある。

例 1 正整数全体 $\{0,1,2,\cdots\}$ の上での確率分布 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots)$ を考える。このとき、正整数上の確率分布全体の集合を $\mathcal{S}$ とおくと、

$$\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots) \,\middle|\, \mu_s \geq 0\,(s = 0,1,2,\cdots), \sum_{s=0}^{\infty} \mu_s = 1 \right\} \tag{2}$$

となる。$\mathcal{S}$ に含まれる2つの確率分布 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$ に対し、$\boldsymbol{\mu} \succ \boldsymbol{\nu}$ とは、定義より、任意の s, s' $(s \leq s',\ s, s' = 0,1,2,\cdots)$ に対して、$\mu_{s'}\nu_s \geq \mu_s \nu_{s'}$ が成立し、少なくとも1つの s, s' の組み合わせに対し $\mu_{s'}\nu_s > \mu_s\nu_{s'}$ が成り立つことである。任意の $s = 0,1,2,\cdots$ に対し $\mu_s = \nu_s$ のとき、$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}$ である。$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ とは、$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}$ または $\boldsymbol{\mu} \succ \boldsymbol{\nu}$ が成り立つときである。

例 2 マルコフ連鎖で、取りうる状態全体の集合を正整数全体 $\{0,1,2,3,\cdots\}$ とし、これらの状態のあいだの推移確率行列を $\boldsymbol{P} = (p_{s\,s'})_{s,s'=0,1,2,3,\cdots}$ とする。このとき、任意の s, s' に対して $(s \geq s', s, s' = 0,1,2,\cdots)$、$p_{\hat{s}\,s'}\,p_{\bar{s}\,s} \geq p_{\bar{s}\,s'}\,p_{\hat{s}\,s}$ すなわち、$\begin{vmatrix} p_{\bar{s}\,s} & p_{\bar{s}\,s'} \\ p_{\hat{s}\,s} & p_{\hat{s}\,s'} \end{vmatrix} \geq 0$ が、$\hat{s} \leq \bar{s}$ となる任意の $\hat{s}, \bar{s}$ に対して成り立つ $(\hat{s}, \bar{s} = 0,1,2,\cdots)$。

これも尤度比を用いた性質であるが、このような性質を推移確率行列に仮定したマルコフ連鎖は、取り替え問題などで劣化のある場合によく用いられる。すなわち、

$\begin{vmatrix} p_{\bar{s}s} & p_{\bar{s}s'} \\ p_{\hat{s}s} & p_{\hat{s}s'} \end{vmatrix} \geq 0$ だから、このマルコフ連鎖の状態のあいだの推移に関して、ある種の方向性が出てくる。言い換えれば、このマルコフ連鎖の状態が正整数で表されていることから、状態を表す数が大きければ大きいほど、つぎの状態は、その状態を表す数が大きくなる可能性が高くなり、状態を表す数が小さければ小さいほど、つぎの状態は、その状態を表す数が小さくなる可能性が高くなるという性質である。

2.2　一般化した MTP_2 とその性質

まず始めに、前節で定義した TP_2(total positivity of order two) と MTP_2 (multivariate total positivity of order two) の2つを改めて定義する。

定義 2 (TP_2) X, Y を絶対連続な確率変数で、確率密度関数 $f(x), g(y)$ を持つとする。このとき、$f(x)g(y) \geq f(y)g(x) \quad (x \geq y)$ が成り立つとき、$X \succ Y$ とする。

定義 3 (MTP_2) $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ を絶対連続な k 次多変量確率変数で、確率密度関数 $f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})$ を持つとする。このとき、$f(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x})$ が成り立つとき、$\boldsymbol{X} \succ \boldsymbol{Y}$ とする。ただし、$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = (\min(x_1, y_1), \cdots, \min(x_n, y_n))$ および $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} = (\max(x_1, y_1), \cdots, \max(x_n, y_n))$ とする ($\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n_+$)。

これらの定義は、2つの確率変数 X, Y または、$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ が絶対連続の場合の定義である。一般の部分観測可能なマルコフ連鎖では、必ずしもこれらの確率変数の絶対連続性を仮定しない場合もあり、状態についての情報が絶対連続でない場合もある。ここでは、 MTP_2 の概念を一般化した GMTP_2 を定義し、その性質を考える。

まず、$\mathcal{S}$ を完備で可分な全順序の入った距離空間とし、集合 $\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ を空間 $\mathcal{S}$ 上の確率測度全体とすれば、

$$\boldsymbol{P}(\mathcal{S}) = \left\{ \boldsymbol{\mu} \,\middle|\, \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\mu}(ds) = 1, \boldsymbol{\mu}(B) \geq 0 \, (B \in \mathcal{B}) \right\} \tag{3}$$

となる。ここで、$\mathcal{B}$ を距離空間 $\mathcal{S}$ におけるボレル (Borel) 集合族とする。ここでは、確率測度 $\boldsymbol{\mu}(s)$ が絶対連続であることは仮定しない。また、これらの確率測度のあいだに、定義5によって順序を入れる。いま、距離空間 $\mathcal{S}$ には、全順序が入っているので、$\mathcal{S}$ のボレル集合のあいだに、つぎのような順序を導入する。

定義 4 距離空間 $\mathcal{S}$ に含まれる2つのボレル集合を A と B とする。$A \prec B$ とは、任意の $a \in A$ と $b \in B$ に対して、$a \leq b$ が成り立つことである。

定義 5 $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ を $\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ に含まれる2つの確率測度とする。このとき、2つの互いに素なボレル集合 A と B に対して $(A, B \in \mathcal{B})$、$A \prec B$ のとき $\boldsymbol{\mu}(A)\boldsymbol{\nu}(B) \leq \boldsymbol{\mu}(B)\boldsymbol{\nu}(A)$ が成り立ち、少なくとも1つの A と B の組み合わせに対して $\boldsymbol{\mu}(B)\boldsymbol{\nu}(A) > \boldsymbol{\mu}(A)\boldsymbol{\nu}(B)$ が成り立てば、$\boldsymbol{\mu} \succ \boldsymbol{\nu}$ とする。任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して、確率1で $\boldsymbol{\mu}(A) = \boldsymbol{\nu}(A)$ であれば、$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}$ とする。また、$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}$ または、$\boldsymbol{\mu} \succ \boldsymbol{\nu}$, のとき、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ とする。

定義5において、確率測度$\boldsymbol{\mu}$と$\boldsymbol{\nu}$が絶対連続で、確率密度$\mu(s)$および$\nu(s)$を持てば、定義5は、$\mu(t)\nu(s) \geq \mu(s)\nu(t)$と同値となり$(s,t \in \mathcal{S}, s < t)$、$\mathrm{TP}_2$の定義（定義2）と等しい。また、2.1節の尤度比順序と同じように、定義5による順序が半順序となる。つぎに、$\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$で定義された関数$u(\boldsymbol{\mu})$が、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \succeq \boldsymbol{\mu})$となる任意の$\boldsymbol{\mu}$と$\boldsymbol{\nu}$に対して、$u(\boldsymbol{\mu}) \geq u(\boldsymbol{\nu})(u(\boldsymbol{\mu}) \leq u(\boldsymbol{\nu}))$のとき、この関数を$\boldsymbol{\mu}$に関する非減少関数(非増加関数)という。このとき、つぎの性質が成り立つ。

補題 1 $\boldsymbol{\mu}$と$\boldsymbol{\nu}$を$\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$に含まれる2つの確率測度で、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$とする。このとき、$(\mathcal{S}\times\mathcal{S}, \mathcal{B}\times\mathcal{B})$での確率測度$\boldsymbol{\delta}$で次の性質を満たすものが存在する。すなわち、任意の$A \in \mathcal{B}$に対して$\boldsymbol{\delta}(A\times\mathcal{S}) = \boldsymbol{\mu}(A)$であり、任意の$B \in \mathcal{B}$に対して$\boldsymbol{\delta}(\mathcal{S}\times B) = \boldsymbol{\nu}(B)$である。また、$\boldsymbol{\delta}(\{(s,t)|(s,t) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}, s \geq t\}) = 1$である。

定理 1 $\boldsymbol{\mu}$と$\boldsymbol{\nu}$を、$\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$に含まれる2つの確率測度で、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$とする。いま、関数$h : S \to \boldsymbol{R}_+$を、有界で$\mathcal{B}$-可測かつ非減少関数とすれば、$\int_S h(s)d\boldsymbol{\mu}(s) \geq \int_S h(s)d\boldsymbol{\nu}(s)$である。

つぎに、距離空間$\mathcal{S}$の直積空間$\mathcal{S}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{S}$と、直積ボレル集合族$\mathcal{B}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}$を考える。ただし、$\mathcal{S}^1 = \mathcal{S}$および、$\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}$とする。つぎに、$\boldsymbol{\mu}_n$を直積測度空間$(\mathcal{S}^n, \mathcal{B}^n)$での確率測度とし、$\boldsymbol{P}(\mathcal{S}^n)$を$(\mathcal{S}^n, \mathcal{B}^n)$での確率測度の集合とすれば、

$$\boldsymbol{P}(\mathcal{S}^n) = \left\{\boldsymbol{\mu}_n \middle| \int_{\mathcal{S}^n} \boldsymbol{\mu}_n(ds^n) = 1, \boldsymbol{\mu}_n(B^n) \geq 0, (B^n \in \mathcal{B}^n)\right\} \tag{4}$$

となる。

はじめに直積ボレル集合族$\mathcal{B}^n$に含まれる直積ボレル集合のあいだに、順序を導入する。

定義 6 $\mathcal{S}^n$に含まれる2つの集合$\boldsymbol{A}^n = \prod_{i=1}^n A_i$と$\boldsymbol{B}^n = \prod_{i=1}^n B_i$で、$A_i, B_i \subset \mathcal{S}, i = 1,\cdots,n$とする。このとき、$\boldsymbol{A}^n \prec \boldsymbol{B}^n$とは、$A_i \cap B_i = \emptyset$であり$A_i \prec B_i$が任意の$i = 1,\cdots,n$に対して成り立つときとする。

つぎに、直積ボレル集合族$\mathcal{B}^n$に含まれる直積ボレル集合のあいだの演算として、$\vee$と$\wedge$の2つの演算を定義する。まず、$\mathcal{S}^n$に含まれる2つの集合$\boldsymbol{A}^n = \prod_{i=1}^n A_i$と$\boldsymbol{B}^n = \prod_{i=1}^n B_i$を考える。このとき、ある$i = 1,\cdots,n$に対して、$A_i \prec B_i$であれば、$A_i \vee B_i = B_i$かつ$A_i \wedge B_i = A_i$とする。つぎに、これらの2つの集合$\boldsymbol{A}^n$と$\boldsymbol{B}^n$で、$A_i, B_i \subset \mathcal{S}$であり、任意の$i = 1,\cdots,n$に対して$A_i \cap B_i = \emptyset$となる$\boldsymbol{A}^n$と$\boldsymbol{B}^n$に対して、演算$\vee$と$\wedge$を、$\boldsymbol{A}^n \vee \boldsymbol{B}^n = \prod_{i=1}^n A_i \vee B_i, \boldsymbol{A}^n \wedge \boldsymbol{B}^n = \prod_{i=1}^n A_i \wedge B_i$と定義する。このとき、$\mathrm{GMTP}_2$はつぎのように定義できる。

定義 7 (GMTP_2) $\boldsymbol{\mu}_n$と$\boldsymbol{\nu}_n$を$(\mathcal{S}^n, \mathcal{B}^n)$上の2つの確率測度とする。互いに素なボレル集合$\boldsymbol{A}^n = \prod_{i=1}^n A_i$と$\boldsymbol{B}^n = \prod_{i=1}^n B_i$で、任意の$i = 1,\cdots,n$に対して$\boldsymbol{A}^n, \boldsymbol{B}^n \in \mathcal{B}^n, A_i, B_i \subset \mathcal{S}, A_i \cap B_i = \emptyset$であれば、

$$\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^n \vee \boldsymbol{B}^n)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^n \wedge \boldsymbol{B}^n) - \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^n)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^n) \geq 0, \tag{5}$$

が成り立ち、少なくとも1つの A^n と B^n の組み合わせに対して、$\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^n \vee \boldsymbol{B}^n)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^n \wedge \boldsymbol{B}^n) > \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^n)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^n)$ のとき、$\boldsymbol{\mu}_n \succ \boldsymbol{\nu}_n$ とする。任意の $A^n \in \mathcal{B}^n$ に対して、$\boldsymbol{\mu}_n(A^n) = \boldsymbol{\nu}_n(A^n)$ が確率1で成り立つとき、$\boldsymbol{\mu}_n = \boldsymbol{\nu}_n$ とする。また、$\boldsymbol{\mu}_n = \boldsymbol{\nu}_n$ または $\boldsymbol{\mu}_n \succ \boldsymbol{\nu}_n$ のときを、$\boldsymbol{\mu}_n \succeq \boldsymbol{\nu}_n$ とする。

ここで、$(\mathcal{S}^n, \mathcal{B}^n)$ での確率測度のあいだに、(5) 式によって、順序を入れると半順序となる。また、確率変数 X_s が絶対連続で確率密度関数を持てば、定義3の MTP_2 と等しく、この点から定義7で定義した順序を一般化した $MTP_2(GMTP_2)$ という。この $GMTP_2$ は2つの基本的な性質を持つ (補題2と3)。また、確率変数 X_s が絶対連続で確率密度関数を持ち MTP_2 であれば、FKG不等式として知られている性質が導かれることが知られている (Fortuin, Kasteleyn and Ginibre[5], Preston[24]etc)。同じように、$GMTP_2$ を仮定すれば、同様の性質が成り立ち、その1つの場合が定理2で示される。

補題 2 $\boldsymbol{\mu}_n$ と $\boldsymbol{\nu}_n$ を、$\boldsymbol{P}(\mathcal{S}^n)$ に含まれる確率測度で、$\boldsymbol{\mu}_n \succeq \boldsymbol{\nu}_n$ とし、$\boldsymbol{\mu}_{n-1}, \boldsymbol{\nu}_{n-1}$ を、$\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}) = \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S})$ かつ $\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1}) = \boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S})$ とする $\boldsymbol{\mu}_n$ と $\boldsymbol{\nu}_n$ の周辺確率測度とする $(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S}, \boldsymbol{B}^{n-1} \times \mathcal{S} \in \mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S} = \mathcal{S}^n)$。このとき $\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1})\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}) - \boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1})\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1}) \geq 0$ となる。

証明 最初に、直積空間 $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ を、$D = \{(s,t)|s < t, s, t \in \mathcal{S}\}, E = \{(s,t)|s = t, s, t \in \mathcal{S}\}$ と $F = \{(s,t)|s > t, s, t \in \mathcal{S}\}$ の3つに分割する。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1})\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1}) &= \int_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}} \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, ds)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, dt) \\
&= \int_D \{\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, ds)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, dt) + \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, dt)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, ds)\} \\
&\quad + \int_E \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, ds)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, dt)
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1})\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}) \\
&\quad = \int_D \{\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, ds)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, dt) \\
&\qquad + \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, dt)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, ds)\} \\
&\qquad + \int_E \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, ds)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, dt)
\end{aligned}
$$

より、2つの領域 D と E での値を比較することで、この補題が求まる。

$(s,t) \in E$ のとき、$s = t$ および $(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, s), (\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, t) \in \mathcal{B}^n$ だから、E の定義と (5) 式より $\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, s)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, t) \geq \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, s)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, t)$ が簡単に導ける。

$S \times T \subset D = \{(s,t)|s < t, s, t \in \mathcal{S}\}$ のとき、

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, S)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, T) \\
&\quad + \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, T)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, S) \\
&\quad \geq \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, S)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, T) + \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, T)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, S)
\end{aligned} \tag{6}
$$

を求める。まず、$S \times T \subset D$ より、仮定から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, T)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, S) &\geq \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, S)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, T), \\ \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, T)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, T) &\geq \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, T)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, T).\end{aligned}$$

となる。一方、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, S)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, S) &\geq \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, S)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, S) \\ \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, T)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, S) &\geq \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, T)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, S)\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, S)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, T)\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{B}^{n-1}, T)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \wedge \boldsymbol{B}^{n-1}, S) \\ &\qquad \geq \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, S)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, T)\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1}, T)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1}, S)\end{aligned}$$

となり、Preston[24] の補題 2 より (6) 式が導かれる。□

補題 3 $\boldsymbol{\mu}_n$ と $\boldsymbol{\nu}_n$ を、$\boldsymbol{P}(\mathcal{S}^n)$ に含まれる確率測度で、$\boldsymbol{\mu}_n \succeq \boldsymbol{\nu}_n$ とする。このとき、$(\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n, \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n)$ での確率測度 $\boldsymbol{\delta}$ で、任意の $\boldsymbol{A}^n \in \mathcal{B}^n$ に対して $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{A}^n \times \mathcal{S}^n) = \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^n)$ および、任意の $\boldsymbol{B}^n \in \mathcal{B}^n$ に対して $\boldsymbol{\delta}(\mathcal{S}^n \times \boldsymbol{B}^n) = \boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^n)$ であり、かつ $\boldsymbol{\delta}(\{(\boldsymbol{s}^n, \boldsymbol{t}^n) | (\boldsymbol{s}^n, \boldsymbol{t}^n) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n, \boldsymbol{s}^n \succeq \boldsymbol{t}^n\}) = 1$ となるものが存在する。

証明　n に関する帰納法を用いる。これらの性質が $n-1$ より小さい値に対して成り立つとする。いま、$\boldsymbol{\mu}_{n-1}$ と $\boldsymbol{\nu}_{n-1}$ を、$\boldsymbol{\mu}_n$ と $\boldsymbol{\nu}_n$ の周辺確率測度とする。補題 2 と帰納法の仮定より次のことが成り立つ。$(\mathcal{S}^{n-1}, \mathcal{B}^{n-1})$ 上の確率測度 $\boldsymbol{\mu}_{n-1}, \boldsymbol{\nu}_{n-1}$ に対して、

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S}^{n-1}) &= \boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}) \qquad \boldsymbol{A}^{n-1} \in \mathcal{B}^{n-1} &(7) \\ \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1} \times \boldsymbol{B}^{n-1}) &= \boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}) \qquad \boldsymbol{B}^{n-1} \in \mathcal{B}^{n-1}, &(8) \\ \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n-1}(\{(\boldsymbol{s}^{n-1}, \boldsymbol{t}^{n-1}) | (\boldsymbol{s}^{n-1}, \boldsymbol{t}^{n-1}) &\in \mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S}^{n-1}, \boldsymbol{s}^{n-1} \succ \boldsymbol{t}^{n-1}\}) = 1. &(9)\end{aligned}$$

となる $(\mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S}^{n-1}, \mathcal{B}^{n-1} \times \mathcal{B}^{n-1})$ 上の確率測度 $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n-1}$ が存在する。

ここで、$\mathcal{B}^{n-1}$ の 2 つの部分集合 $\boldsymbol{A}^{n-1}$ と $\boldsymbol{B}^{n-1}$ で、$\boldsymbol{A}^{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} A_i, \boldsymbol{B}^{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} B_i$ かつ $A_i \prec B_i$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ とする。このとき、$\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}) \neq 0$ かつ $\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1}) \neq 0$ ならば、任意の $A, B \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{A}^{n-1}} &= \frac{\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times A)}{\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1})}, &(10) \\ \hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{B}^{n-1}} &= \frac{\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1} \times B)}{\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1})}, &(11)\end{aligned}$$

とおけば、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times A) &= \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{A}^{n-1}}(A)\boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}), &(12) \\ \boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1} \times B) &= \hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{B}^{n-1}}(B)\boldsymbol{\nu}_{n-1}(\boldsymbol{B}^{n-1}), &(13)\end{aligned}$$

となる。ここで、$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{A}^{n-1}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{B}^{n-1}}$ は $(\mathcal{S}^1, \mathcal{B}^1) = (\mathcal{S}, \mathcal{B})$ 上の確率測度となる。

つぎに、$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{A}^{n-1}} \succeq \hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{B}^{n-1}}$ すなわち、$A \prec B$ となる任意の $A, B \in \mathcal{B}$ に対して

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{A}^{n-1}}(A)\hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{B}^{n-1}}(B) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{A}^{n-1}}(B)\hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{B}^{n-1}}(A) \leq 0 \tag{14}$$

となることを示す。(10) 式と (11) 式を (14) 式に代入し、整理すれば

$$\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times A)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1} \times B) - \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times B)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1} \times A) \leq 0$$

となる。一方、$A \prec B$, $(\boldsymbol{A}^{n-1} \times B) \vee (\boldsymbol{B}^{n-1} \times A) = \boldsymbol{A}^{n-1} \times A$ であり $(\boldsymbol{A}^{n-1} \times B) \wedge (\boldsymbol{B}^{n-1} \times A) = \boldsymbol{B}^{n-1} \times B$ である。さらに、$\hat{\boldsymbol{\mu}}_n \succeq \hat{\boldsymbol{\nu}}_n$ より

$$\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times A)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1} \times B) - \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^{n-1} \times B)\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{B}^{n-1} \times A) \leq 0$$

となる。したがって、補題 1 より、

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{B}^{n-1}}(A \times \mathcal{S}) = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{A}^{n-1}}(A) \qquad A \in \mathcal{B} \tag{15}$$

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{B}^{n-1}}(\mathcal{S} \times B) = \hat{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{B}^{n-1}}(B) \qquad B \in \mathcal{B}, \tag{16}$$

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{B}^{n-1}}(\{(s,t) | (s,t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, s \geq t\}) = 1$$

となる $(\mathcal{S} \times \mathcal{S}, \mathcal{B} \times \mathcal{B})$ 上の確率測度 $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{B}^{n-1}}$ が存在する。

ここで、$(\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n, \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n)$ 上の確率測度 $\boldsymbol{\delta}_n$ を $\boldsymbol{\delta}_n((\boldsymbol{A}^{n-1}, A) \times (\boldsymbol{B}^{n-1}, B)) = \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \boldsymbol{B}^{n-1})\hat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{B}^{n-1}}(A \times B)$ とすれば、この $\boldsymbol{\delta}_n$ が補題を満足する。(7) 式より $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1} \times \mathcal{S}^{n-1}) = \boldsymbol{\mu}_{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1})$, であり、(15) 式より $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{B}^{n-1}}(A \times \mathcal{S}) = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{A}^{n-1}}(A)$ だから、$\boldsymbol{\delta}_n(\boldsymbol{A}^n \times \mathcal{S}^n) = \boldsymbol{\delta}_n((\boldsymbol{A}^{n-1}, A) \times (\mathcal{S}^{n-1}, \mathcal{S})) = \boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{A}^n)$ となる。□

補題 2 では、$\boldsymbol{\mu}_n$ と $\boldsymbol{\nu}_n$ のあいだに GMTP_2 の意味で順序がつけば、それらの周辺密度 $\boldsymbol{\mu}_{n-1}, \boldsymbol{\nu}_{n-1}$ に対しても同様の順序関係が保たれることを示している。また、補題 3 は補題 1 を一般化したものである。また、TP_2 や MTP_2 では、非減少関数の期待値に関して、順序関係を保存するという性質が成り立った（補題 4 など）。この性質は、期待値を最大化する多段決定問題を解析する上で基本的な性質であり、特に部分観測可能な確率過程で考える場合にも必要となる。ここで定義した GMTP_2 についても、同様の性質が成り立つ。

いま、k-変数関数 $\varphi : \boldsymbol{R}_+^k \to \boldsymbol{R}_+$ が、$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して、$\varphi(\boldsymbol{x}) \leq \varphi(\boldsymbol{y})$ $(\varphi(\boldsymbol{x}) \geq \varphi(\boldsymbol{y}))$ のとき、この関数は $\boldsymbol{x}$ に関する非減少（非増加）関数ということ。ここで、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}_+^k$ に対して、$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ とは、任意の $i = 1, 2, \cdots, k$ に対して、$x_i \leq y_i$ が成り立つことをいう。ただし、$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ および $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ とする。

定理 2 $\boldsymbol{\mu}_n$ と $\boldsymbol{\nu}_n$ を、$\boldsymbol{P}(\mathcal{S}^n)$ に含まれる確率測度で、$\boldsymbol{\mu}_n \succeq \boldsymbol{\nu}_n$ とする。また、関数 $h : \mathcal{S}^n \to \boldsymbol{R}_+$ が有界で可測な非減少関数ならば、$\int_{\mathcal{S}^n} h(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{s}) \geq \int_{\mathcal{S}^n} h(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{s})$ である。

証明 $E^n = \{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) | (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n, \boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{t}\}$ とおけば、

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}^n} h(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{\mu}_n(\boldsymbol{s}) - \int_{\mathcal{S}^n} h(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{\nu}_n(\boldsymbol{t}) &= \int\int_{\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n} (h(\boldsymbol{s}) - h(\boldsymbol{t}))d\boldsymbol{\delta}_n(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \\ &= \int\int_{E^n} (h(\boldsymbol{s}) - h(\boldsymbol{t}))d\boldsymbol{\delta}_n(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \geq 0\end{aligned}$$

となる。ここで、$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) \in E^n$ のとき、$h(\boldsymbol{s})$ の定義から $h(\boldsymbol{s}) - h(\boldsymbol{t}) \geq 0$ となることを用いた。□

3 不完備情報のシステム

まず、3.1 節では部分観測可能なマルコフ連鎖を考える。たとえば、経済の状態を良い状態から悪い状態まで幾つかに分け、現在の状態がそれらのどれかを直接には知ることができない。しかし、おかれている経済状態としてどのような状態が可能かについて、何らかの情報を持っている場合である。つぎに、このような部分観測可能なマルコフ連鎖の状態について、事前情報と情報過程から得られる情報に対して、学習プロセスとしてベイズ学習を考え、いくつかの条件のもとで、この学習プロセスの性質を考える。第 3.3 節で部分観測可能なマルコフ過程について考える。

3.1 部分観測可能なマルコフ連鎖

有限個または可算無限個の状態のマルコフ連鎖 $\{Y_n|n = 0,1,2,3,\cdots\}$ を考える。このマルコフ連鎖の状態は番号づけられ、正整数の集合 $\{0,1,2,\cdots\}$ で表す。$Y_n = s$ のとき、このプロセスは時点 n で状態 s にあるという。このマルコフ連鎖で、その状態を直接に知ることはできないが、ある情報過程を通して、情報が得られるとき、これを部分観測可能なマルコフ連鎖という。このような部分観測可能なマルコフ連鎖の基本的な性質は、Nakai[13] などで解析され、Nakai[15] などでは部分観測可能なマルコフ連鎖のもとでの確率的な多段決定問題が扱われている。

いま、このマルコフ連鎖の状態空間を簡単のため有限集合とし、$\{0,1,2,\cdots,S\}$ とおく。$\boldsymbol{P} = (p_{s\,s'})_{s,s'=0,1,2,\cdots,S}$ を推移確率行列とする。つぎに、このマルコフ連鎖の状態に依存する確率変数を考え、この確率変数を観測することにより、状態についての情報を得る。このプロセスを情報過程という。いま、マルコフ連鎖の状態が s のとき、この状態で定まる非負確率変数を X_s とおけば、この確率変数の分布関数を $\Pr(X_s \leq x|Y_n = s) = F_s(x)\ (x \in \boldsymbol{R}, s \in \{0,1,2,\cdots,S\}, n \in \{0,1,2,\cdots\})$、確率密度関数を $f_s(x)$ とする。また、このマルコフ連鎖の状態についての情報は、状態空間上の確率分布 $\boldsymbol{\mu}$ で表され、それら確率分布全体の集合は、(2) 式の $\mathcal{S}$ となる。さらに、この集合に例 1 で考えた順序を考える。

3.2 ベイズ学習

前節の部分観測可能なマルコフ連鎖の状態に関して、ベイズの定理を用いて学習を行う。このマルコフ連鎖の状態についての事前情報は、状態空間上の確率分布 $\boldsymbol{\mu}$ で表せる。このマルコフ連鎖の状態についての事前情報が $\boldsymbol{\mu}$ のとき、標本値 $x\,(\in \boldsymbol{R}_+ = (0,\infty))$ が得られたとする。このとき、状態に依存する確率変数からの標本値 x と事前分布 $\boldsymbol{\mu}$ に対し事後分布が存在し、この事後情報を $\overline{\boldsymbol{\mu}}(x)$ とする。ここでは、部分観測可能なマルコフ連鎖の状態についての事前情報が $\boldsymbol{\mu}$ のとき、まず

始めに状態の推移が起こり、そのあとで、推移した状態に依存した確率変数を観測して標本値を得て、そこで状態について学習を行うことにする。もちろん、順序を逆に考えることもできるが、その場合もここでの議論と同様となる。このとき、状態についての事前情報と事後情報の関係について、基本的な性質が成り立つ。

事前情報が $\boldsymbol{\mu}$ のとき、このマルコフ連鎖は推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ にしたがって状態が推移するから、状態についての情報は $\overline{\boldsymbol{\mu}} = (\overline{\mu}_0, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2, \cdots, \overline{\mu}_S)$ となる。ただし、$\overline{\mu}_{s'} = \sum_{s=0}^{S} \mu_s p_{s\,s'}$ である。つぎに、状態に依存する確率変数から標本値 x を観測し、状態についての情報をベイズの定理を用いて $\overline{\boldsymbol{\mu}}(x) = (\overline{\boldsymbol{\mu}}(x)_0, \overline{\boldsymbol{\mu}}(x)_1, \cdots, \overline{\boldsymbol{\mu}}(x)_S)$ と学習する。ここで、$\overline{\boldsymbol{\mu}}(x)_{s'} = \dfrac{\overline{\mu}_{s'} f_{s'}(x)}{\sum_{s=0}^{S} \overline{\mu}_s f_s(x)}$ である。このような、ベイズ学習の性質を考えるために、つぎの2つの仮定を設け、状態に関する事前情報と事後情報の関係を求める。

仮定 1 確率変数 $\{X_s\}_{s=0,1,2,\cdots,S}$ に対し、$s \le s'$ $(s, s' = 0, 1, 2, \cdots, S)$ なら $X_{s'} \succeq X_s$ とする。

仮定 2 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ に例2の性質を仮定する。

仮定1から、部分観測可能なマルコフ連鎖の状態に依存する確率変数 $\{X_s\}$ は、状態を表す値 s が大きくなればなるほど、確率変数の取る値は小さくなりがちである。仮定2から、状態を表す値 s が大きくなればなるほど、大きな値をもつ状態へ推移しやすく、状態を表す値 s が小さくなればなるほど、小さな値をもつ状態へ推移しやすい。また、$\{0, 1\}$ の2つの状態をとるマルコフ連鎖では、仮定2は不等式 $p_{00} \ge p_{10}$ と等しい。この仮定は Ross [25], Monahan [12] などで用いられたもので、仮定2はこの一般化である。

つぎに、情報全体の集合 $\mathcal{S}$ で定義された関数 $u(\boldsymbol{\mu})$ に対して、関数 $u(\boldsymbol{\mu})$ が、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \succeq \boldsymbol{\mu})$ となる $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$ に対し $u(\boldsymbol{\mu}) \ge u(\boldsymbol{\nu})(u(\boldsymbol{\mu}) \le u(\boldsymbol{\nu}))$ のとき、この関数 $u(\cdot)$ のことを $\boldsymbol{\mu}$ に関する非減少関数（非増加関数）という。集合 $\mathcal{S}$ で定義されたこのような関数 $u(\boldsymbol{\mu})$ としては、状態空間上の確率分布 $\boldsymbol{\mu}$ に関する期待値などを考えればよい。これらの仮定のもとで、事後情報の性質を求める。

定理 3 $x \le y$ となる x, y に対し、$\overline{\boldsymbol{\mu}}(y) \succeq \overline{\boldsymbol{\mu}}(x)$ となる $(\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{S})$。

定理 4 $\mathcal{S}$ に含まれる任意の $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$ に対し、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ ならば $\overline{\boldsymbol{\mu}} \succeq \overline{\boldsymbol{\nu}}$ となる。また、$\mathcal{S}$ に含まれる $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ に対し、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ ならば、$\overline{\boldsymbol{\mu}}(x) \succeq \overline{\boldsymbol{\nu}}(x)$ となる $(x \in \boldsymbol{R})$。

定理3から、状態に関する事前情報が同じであれば、観測値の値が大きくなればなるほど、状態に関する事後情報は尤度比順序の意味で良いものとなる。また、定理4から、同じ値を観測しても、事前情報が尤度比順序の意味で良ければ、事後情報もまた尤度比順序の意味で良くなる。

補題 4 $\{f_s(x)\}_{s=0,1,2,\cdots,S}$ を、S 個の絶対連続な確率変数 $X_1, \cdots, X_S$ の仮定1を満たす確率密度関数の列とする。また、$\mathcal{S}$ に含まれる $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\nu}$ に対して $\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ とし、

$a_s = \mu_s - \nu_s$ とおく $(s = 0, 1, 2, \cdots, S)$。このとき、$g(x) = \sum_{s=0}^{S} a_s f_s(x)$ とすれば、任意の非減少関数 $h(x)$ に対して、$\int_0^\infty h(x)\, g(x)\, dx \geq 0$ となる。

いま、関数 $h(x)$ に対して、$E_{\boldsymbol{\nu}}[h(X)] = \int_0^\infty h(x) \sum_{s=0}^{S} \mu_s f_s(x) dx$ だから、この補題より任意の非減少関数 $h(x)$ に対して、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ ならば $E_{\boldsymbol{\nu}}[h(X)] \geq E_{\boldsymbol{\mu}}[h(X)]$ となり、この性質が部分観測可能なマルコフ連鎖での多段決定問題を解析する上で必要となる。

3.3 部分観測可能なマルコフ過程

つぎに、3.1 節の部分観測可能なマルコフ連鎖を、一般の部分観測可能なマルコフ過程に拡張し、多変量確率変数から情報を得る場合にも対応できるように考える。このような問題としては、最適選択問題などがあり (Nakai[16, 17])、部分観測可能なマルコフ連鎖における最適選択問題は Nakai[17] などで考察され、この節の部分観測可能なマルコフ過程のモデルについては、Nakai[20, 21] などで詳しく説明されているので、ここでは主要な結果について触れる。

$\mathcal{S}$ を完備で可分な全順序の入った距離空間とし、部分観測可能なマルコフ過程の状態空間とする。この可測空間における全順序を、$\leq$ で表す。この状態空間 $\mathcal{S}$ に対して、$\mathcal{B}$ を可測空間 $\mathcal{S}$ のボレル集合族とする。さらに、$P(\cdot|s)$ $(s \in \mathcal{S})$ でこのマルコフ過程の推移法則を表し、状態空間 $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への推移を表す。すなわち、任意の状態 $s \in \mathcal{S}$ に対して、$\boldsymbol{p}(\cdot|s)$ は $\mathcal{S}$ 上の確率測度であり、任意の可測集合 $B \in \mathcal{B}$ に対して、$P(B|s) = \int_B d\boldsymbol{p}(t|s)$ とする。

次に、このマルコフ過程の任意の状態 s に対して、それぞれ非負 k-次の多変量確率変数 $\boldsymbol{X}_s$ が対応し、それぞれの期待値は有限で、この部分観測可能なマルコフ過程の状態についての観測過程とする。いま、これらの確率変数の確率分布を、任意の $s \in \mathcal{S}$ とボレル集合 $C \subset \boldsymbol{R}_+^k = (0, \infty)^k$ に対して、$\Pr(\boldsymbol{X}_s \in C) = \int_C dF_k(\boldsymbol{x}|s)$ とする。このとき、3.1 節で考えたような部分観測可能なマルコフ連鎖の状態に関する学習プロセスを、このような部分観測可能なマルコフ過程で考える。

前節と同様に、このマルコフ過程の状態についての情報は、$\mathcal{S}$ 上の確率測度によって表され、$\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ を状態空間上の確率測度の集合とし、(3) 式で定義する。さらに、任意の観測値 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ $(\in \boldsymbol{R}_+^k)$ と事前情報 $\boldsymbol{\mu}$ に対して、事後情報は存在し、ベイズの定理を用いて学習する。

事前情報が $\boldsymbol{\mu}$ のとき、このマルコフ過程は推移法則 $P(\cdot|\cdot)$ にしたがって状態が推移し、マルコフ過程の状態に関する情報は確率測度 $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ となる。すなわち、任意の可測集合 $B \in \mathcal{B}$ に対して、確率測度 $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ は $\overline{\boldsymbol{\mu}}(B) = \int_{\mathcal{S}} P(B|s) d\boldsymbol{\mu}(s)$ となる。つぎに、情報過程から、標本値 $\boldsymbol{x}$ を観測し、任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_+^k$ と $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ に対して、ベイズの定理を用いて $\overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})}$ となる。

3.4 GMTP_2 のベイズ学習への応用

3.3節で定義した部分観測可能なマルコフ過程と、その学習プロセスに対して、2.2節で定義した GMTP_2 の性質を応用して、いくつかの仮定の下で考える。

まず始めに、$\boldsymbol{R}_+$ を標本値の取る値の集合、すなわち正数全体とし、$\mathcal{X}$ を $\boldsymbol{R}_+$ のボレル集合族とする。このとき、$\boldsymbol{R}_+^1 = \boldsymbol{R}_+$ および $\mathcal{X}^1 = \mathcal{X}$ とし、$\boldsymbol{R}_+^k = \prod_{i=1}^{k} \boldsymbol{R}_+$ と $\mathcal{X}^k = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{X}$ を、それぞれ $\boldsymbol{R}_+$ および $\mathcal{X}$ の直積空間および直積ボレル集合族とする。ここで、任意の状態 $s \in \mathcal{S}$ に対して、$\boldsymbol{F}_k(\cdot|s)$ を $(\boldsymbol{R}_+^k, \mathcal{X}^k)$ 上の確率測度とし、この部分観測可能なマルコフ過程の情報過程とする。このとき、つぎの2つの仮定を考える。

仮定 3 互いに素なボレル集合 $\boldsymbol{X}^k = \prod_{i=1}^k X_i$ と $\boldsymbol{Y}^k = \prod_{i=1}^k Y_i$ を考える $(\boldsymbol{X}^k, \boldsymbol{Y}^k \in \mathcal{X}^n, X_i, Y_i \subset \boldsymbol{R}_+, X_i \cap Y_i = \emptyset, i = 1, \cdots, k)$ 。このとき、任意の状態 $s, t \in \mathcal{S}$ に対して、

$$\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{X}^k \vee \boldsymbol{Y}^k|s \vee t)\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{X}^k \wedge \boldsymbol{Y}^k|s \wedge t) \geq \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{X}^k|s)\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{Y}^k|t) \tag{17}$$

である。

仮定 4 任意の状態 $s \in \mathcal{S}$ に対して、この状態からの推移法則を $\boldsymbol{P}(\cdot|s)(s \in \mathcal{S})$ とする。このとき、任意の状態 s と t に対して $(s < t)$、$A \prec B$ ならば

$$\boldsymbol{P}(A|t)\boldsymbol{P}(B|s) \leq \boldsymbol{P}(B|t)\boldsymbol{P}(A|s) \tag{18}$$

である。

ここで、これらの確率測度と推移法則が絶対連続で、確率密度関数がそれぞれ $f_k(\cdot|\cdot), p(\cdot|\cdot)$ あれば、(17) 式と (18) 式は、$u < v$ であれば $(u, v \in \mathcal{S})$、$f_k(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}|s \wedge t)f_k(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}|s \vee t) \geq f_k(\boldsymbol{y}|s)f_k(\boldsymbol{x}|t)$ および、$p(u|s)p(v|t) \geq p(v|s)p(u|t)$ と等しく、これらは MTP_2 となることを示している。このとき、これらの仮定のもとで、事前情報と事後情報の関係が、次の定理5と定理6で示される。これらの性質は、3.1節で求めた性質の一般化となっている。すなわち、すべての確率変数が絶対連続で確率密度関数を持つ場合に Nakai [13, 15, 17] などで示されているが、これらの性質についても同じように求められる (Nakai[20, 21])。

定理 5 $\mathcal{S}$ 上の2つの確率測度 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ に対して、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ ならば、$\overline{\boldsymbol{\mu}} \succeq \overline{\boldsymbol{\nu}}$ である。さらに、任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_+^k$ に対して、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ ならば、$\overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})} \succeq \overline{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})}$ である。

定理 6 任意の確率測度 $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ に対して、$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ ならば、$\overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})} \succeq \overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{y})}$ である。

定理5より、状態に関する事前情報が同じであれば、観測値の値が大きくなればなるほど、状態に関する事後情報は GMTP_2 の意味で良いものとなる。また、定理6より、たとえ同じ値を観測したとしても、事前情報が GMTP_2 の意味で良ければ、事後情報も GMTP_2 の意味で良くなる。

注 1 確率変数が絶対連続で、確率密度を持つ場合には、事後情報$\overline{\mu(\boldsymbol{x})}$もまたMTP$_2$となることが示される。すなわち、任意の$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$に対して、$\overline{\mu(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})}(s\vee t)\,\overline{\mu(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})}(s\wedge t)\geq\overline{\mu(\boldsymbol{y})}(s)\,\overline{\mu(\boldsymbol{x})}(t)$ である (Nakai[17])。

定理1と定理2から、つぎの系が導かれる。この性質は、部分観測可能なマルコフ過程での多段決定過程を解析する上で基本的なものである。

系 1 $\boldsymbol{\mu}_k$と$\boldsymbol{\nu}_k$を、$(\boldsymbol{R}^k_+,\mathcal{X}^k)$での2つの確率測度とする。いま、$\boldsymbol{C}^k=\prod_{i=1}^k C_i$と$\boldsymbol{D}^k=\prod_{i=1}^k D_i$を、2つの互いに素なボレル集合とし$(\boldsymbol{C}^k,\boldsymbol{D}^k\in\mathcal{X}^k, C_i,D_i\subset\boldsymbol{R}_+, C_i\cap D_i=\emptyset, i=1,\cdots,k)$、$\boldsymbol{\mu}_k(\boldsymbol{C}^k\vee\boldsymbol{D}^k)\boldsymbol{\nu}_k(\boldsymbol{C}^k\wedge\boldsymbol{D}^k)-\boldsymbol{\mu}_k(\boldsymbol{C}^k)\boldsymbol{\nu}_k(\boldsymbol{D}^k)\geq 0$とする。もし、$h:\boldsymbol{R}^k_+\to\boldsymbol{R}_+$が有界で可測な非減少関数ならば、$\int_{\boldsymbol{R}^k_+}h(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{\mu}_k(\boldsymbol{x})\geq\int_{\boldsymbol{R}^k_+}h(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{\nu}_k(\boldsymbol{x})$となる。

もし、関数$\varphi(\boldsymbol{x})$が$\boldsymbol{x}$の非減少関数ならば、仮定3と系1より、$\Phi(s)=\mathrm{E}[\varphi(\boldsymbol{X}_s)]$もまた$s$の非減少関数だから、定理1より次の性質が導かれる。

系 2 $\mathcal{S}$上の2つの確率測度$\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\in\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$に対して、$\boldsymbol{\mu}\succeq\boldsymbol{\nu}$であれば、$\boldsymbol{x}$に関する任意の非減少関数$\varphi(\cdot)$に対して、$\mathrm{E}_{\boldsymbol{\mu}}[\varphi(\boldsymbol{X})]=\int_{\mathcal{S}}\left\{\int_{\boldsymbol{R}^k_+}\varphi(\boldsymbol{x})f(d\boldsymbol{x}|s)\right\}\boldsymbol{\mu}(ds)\geq\int_{\mathcal{S}}\left\{\int_{\boldsymbol{R}^k_+}\varphi(\boldsymbol{x})f(d\boldsymbol{x}|s)\right\}\boldsymbol{\nu}(ds)=\mathrm{E}_{\boldsymbol{\nu}}[\varphi(\boldsymbol{X})]$ となる。

これらの性質を用いて、部分観測可能なマルコフ過程における多段決定過程の最適政策や、最適政策にしたがって得られる総期待利得の性質などについて、同じように解析できる。

4 期待値最大化問題について

4.1 ジョブ・サーチ (Job Search)

ある人が仕事を探しているが、現れる仕事の総数nはあらかじめ決められていて、それらのいずれかの仕事につくとする。一方、仕事は一度に1つずつ現れ、これらの仕事が現れる回数を期間と考える。これらの仕事の大きさは、独立で同一の分布にしたがう確率変数Xで表され、現れるごとに、その仕事の大きさを知ることができる。これらの確率変数Xの共通の分布関数を$F(x)$、密度関数を$f(x)$とし、期待値μ_Fは有界とする。また、いったん見送った仕事は選べない (このとき「リコールはない」という)。また、現れたすべての仕事を最後まで見送ったときには、仕事の大きさにかかわらず、最後の仕事に就くものとし、選択の余地はない。このとき、定められた期間内に仕事を1つ選んで、期待利得を最大にする。これは、ジョブ・サーチの簡単な場合である。

いま、計画期間がnで、直面している仕事の大きさがxのとき、最適に振る舞って得られる期待利得を$v_n(x)$とすれば、最適性の原理よりつぎの最適方程式を満足

る。

$$v_n(x) = \max\left\{x, \int_0^\infty v_{n-1}(y)dF(y)\right\} \tag{19}$$

ここで、$T_F(z) = \int_z^\infty (x-z)\,f(x)\,dx$ とおけば、この関数はいくつかの基本的な性質を持つ (DeGroot [3], 中井 [18] など)。この関数を利用して、$\{a_n\}$ を n の増加正数列で、$a_n = a_{n-1} + T_F(a_{n-1})$ により帰納的に定義すれば ($a_0 = \mu_F$)、直面している仕事の大きさが x のとき、$x \geq a_n$ ならばこの仕事を選び、そうでなければ見送ることが最適政策であり、その政策にしたがったときに得られる総期待利得は a_n となる。このように、ジョブ・サーチの最適政策は、'しきい値' (threshold value) あるいは reservation wage と呼ばれる値によって定まることが多い。

つぎに、計画期間が無限のときには、新たな仕事の大きさを知るための探索費用 c、あるいは割引率 β を導入する。このとき、Lippman and McCall[9] では、ジョブの大きさが経済状態に依存し、その経済状態がダイナミックに変動する場合を次のようにモデル化している。いま、$\mathbf{P} = (P_{ij})$ を推移確率行列とするマルコフ連鎖で、状態を $\{1, 2, 3, \cdots, S\}$ とし、これらの状態が経済を表す。このとき経済の状態が i であれば、提示されるジョブの大きさは分布関数 $F_i(x)$ にしたがう確率変数で表される。$v_n(i, x)$ を経済の状態が i で、提示されたジョブの大きさが x とするとき最適に振る舞って得られる総期待利得とすれば、次の最適方程式を満たす。

$$v_{n+1}(i,x) = \max\left\{x, -c + \beta\sum_{j=1}^{S} p_{ij}\int_0^\infty v_n(j,y)dF_j(y)\right\}$$

このとき、(1)$F_i(x)$ は確率的に増加、すなわち、任意の x に対して $F_1(x) \geq F_2(x) \geq \cdots \geq F_n(x)$ であり、(2) 任意の k に対して、$\sum_{j=k}^{K} p_{ij}$ は i に関して非減少である、という2つの仮定のもとで解析している。3節のモデルはこれを一般化したものである。

このようなジョブ・サーチに関して、Lippman and McCall による論文集 [11] や、サーベイ論文 [10] などがある。また、このジョブ・サーチでは仕事の大きさを知ることが出来たが、このような問題は、いろいろな形で一般化でき、そのようなものとして、確率的逐次割り当て問題や最適選択問題 (Nakai[16, 19]) などがある。

4.2 確率的逐次割り当て問題

確率的逐次割り当て問題は Derman, Lieberman and Ross[4] 以来、Albright[1, 2]・Nakai[14, 15, 19] などの研究があり、次のようなものである。

ある企業が持っている人材などを、逐次に現れる仕事に割り当てる。ここで、人材の総数とそれらの能力は既知とする。仕事は一度に1つずつ現れ、それらの大きさは確率変数で表され、仕事が現れたときに、その大きさを知る。一般的には、大きい仕事には、有能な人材を投入するのがよいと思われる。このような問題を確率的逐次割り当て問題という。

いま、大きさ x の仕事に、十分な (perfect) 能力を持った人材を投入すれば x そのものが得られ、不十分ならば x そのものではなく、投入量により変化し px としよ

う。このpが人材によって異なり、$0 \leq p \leq 1$ならば、この人材によって仕事から得られる割合と考える。このとき、割り当てる人材をn人とし、その能力は数値化され、それらを$p_1, p_2, \cdots, p_n$とする。ここで、一般性を失うことなく大きさの順に並べかえられ$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$と仮定する。

また、計画期間nと割り当てる人材の数が等しいとしても一般性を失わない。もし割り当てる人材の数mがnより大きければ、利得がpxだから、大きい方からn人の人材を割り当てることが最適であり、残りの$m-n$人の人材は割り当てられない。また、割り当てる人材の数mがnより小さければ、$n-m$人のpを$p_{m+1} = \cdots = p_n = 0$として付け加えればよい。

このように、n個の仕事の大きさは、独立かつ同一の分布にしたがう確率変数列$\{X_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$で表され、分布関数$F(x)$と確率密度関数$f(x)$を持ち、その期待値は有界とする。いったん割り当てた人材は、ほかの仕事には割り当てられない。このとき、n人の人材をn個の仕事に、どのように割り当てれば、総期待利得を最大にできるだろうか。この問題では、$p_1, p_2, \cdots, p_n$とは独立な、仕事の大きさを表す確率変数の分布関数のみで定まる‘しきい値’で最適政策などが定まる。

まず、良く知られたつぎの性質がある (Hardy, Littlewood and Polya [6])。

補題 5 (Hardy の補題) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0,\ b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$のとき、$\mathcal{S}_n$を$n$次対称群とすれば、$\max_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ である。

この補題から、n個の仕事の大きさを一度に知ることができれば、1番大きい仕事には1番大きなp_1を、2番目に大きい仕事にはp_2を、$\cdots$、1番小さい仕事にはp_nを割り当てればよい。しかし、ここで考えている問題ではn個の仕事が1つずつ現れ、リコールがない。さらに、その大きさが確率変数で表される不確実な量であり、現れるまでその大きさを知ることができない。このことから、この問題はHardyの補題の確率的一般化と考えられる。

計画期間がnで、n個の仕事に$p_1, \cdots, p_n$を割り当てるとき、$(p_1, \cdots, p_n)$をこの確率的逐次割り当て問題の状態とする。このとき、最適政策にしたがって得られる総期待利得を$v(p_1, \cdots, p_n)$とおけば、最適性の原理より、つぎの最適方程式が成り立つ。

$$v(p_1, \cdots, p_n) = \int_0^\infty \max_{1 \leq k \leq n} \{p_k x + v(p_1, \cdots, p_{k-1}, p_{k+1}, \cdots, p_n)\}\, dF(x) \tag{20}$$

ここで、$a_n^0 = \infty$として数列$\{a_n^i\}_{i=0,\cdots,n}$を$a_n^i = S_F\left(a_{n-1}^i\right) - T_F\left(a_{n-1}^{i-1}\right)$で帰納的に定義する。ただし、$S_F(z) = z + T_F(z)$とする。このとき、数列$\{a_n^i\}_{i=0,\cdots,n}$は$i$に関する減少列であり、$a_n^{i-1} \geq a_{n-1}^{i-1} \geq a_n^i$となり ($\forall n = 1, 2, 3, \cdots, \forall i = 1, 2, \cdots, n$)、この数列$\{a_n^i\}_{i=0,\cdots,n}$を用いて次の性質が成り立つ。

定理 7 状態が$(p_1, \cdots, p_n)$の確率的逐次割り当て問題で、大きさxの仕事が現れたとする。$a_n^k < x \leq a_n^{k-1}$ならば、この仕事にk番目のp_kを割り当てることが最適であり、最適政策にしたがって得られる総期待利得$v(p_1, \cdots, p_n)$は、$\sum_{i=1}^{n} p_i a_n^i$ である。

これらの a_n^i は、定義から分布関数 $F(x)$ のみで定まり、$\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ とは無関係である。この $\{a_n^i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ が、この確率的逐次割り当て問題の最適政策を定める'しきい値' である。この確率的逐次割り当て問題で、$p_1 = p_2 = \cdots = p_k = 1, p_{k+1} = \cdots = p_n = 0$ とおけば、この問題は n 個の仕事から k 個を選択することに等しいから、最適政策にしたがって得られる総期待利得は $\sum_{i=1}^{k} a_n^i$ となる。このことから、n 個の仕事の中から $k-1$ 個を選択するとき、最適政策にしたがって得られる総期待利得は、k 個を選択できるときと比べて a_n^k だけ減少する。言い換えれば、この a_n^k は $k-1$ 個選択できる場合に対し、選択する機会が 1 回増えたことによる期待利得の増加分となり、a_n^k は k 番目に付け加えられた選択の機会の価値とみることができる。

この節の確率的逐次割り当て問題をはじめ、最適選択問題などにおいて、仕事の大きさが、3.1 節のような部分観測可能なマルコフ連鎖の状態に依存する場合にも同じように議論することができる (Nakai[13, 15] など)。5.2 節では、このような不完備モデルとして部分観測可能なマルコフ連鎖での確率的逐次割り当て問題を考える。もちろん、部分観測可能なマルコフ連鎖での最適選択問題については Nakai[17, 21] などに詳しい。

5 不完備情報の多段決定問題

4 節で触れた問題などでは、不完備情報の多段決定問題を考えることが多く、この節では、部分観測可能なマルコフ連鎖や部分観測可能なマルコフ過程における問題を考える。5.1 節ではジョブ・サーチを、3.1 節では確率的逐次割り当て問題を考える。このような部分観測可能なマルコフ連鎖や部分観測可能なマルコフ過程における多段決定問題は数多く、最適停止問題 (Monahan[12]) や取り替え問題 (Ohnishi, Kawai and Mine [22]) など、応用範囲は広い。

5.1 不完備情報のジョブ・サーチ

この節では、3.1 節で定義した、状態の数が有限または加算無限の場合の部分観測可能なマルコフ過程でのジョブ・サーチを考える。

4.1 節で触れた Lippman and McCall[9] と同じように、仕事の大きさがマルコフ過程の状態に依存する確率変数で表されているとする。このとき、現れた仕事を知って、状態に関する情報を改良するとともに、この仕事に就くかどうかを決定する。マルコフ過程の状態を、経済の状態などを表すとすれば、仕事の大きさはこれらの状態により変化し、経済の状態が良くなれば良い仕事が多く現れ、そうでなければ良い仕事が現れにくくなる。この状態についての情報は、状態空間上の確率分布で表され、情報全体は $\mathcal{S}$ であり、$\mathcal{S}$ の要素のあいだに尤度比順序を考える。また、推移確率に関して Lippman and McCall[9] での仮定 (4.1 節の (2)) より強い仮定 (仮定 2) のもとで解析するが、これはベイズの定理を用いて学習を行うためである。

n 期間のあいだに、一度に仕事が 1 つずつ現れ、それらの中から 1 つを選び、選ん

だ仕事から得られる期待利得を最大にする。また、リコールはないものとする。このとき、状態についての事前情報を $\boldsymbol{\mu}\,(\in \mathcal{S})$ とすれば、仕事の大きさ x を知ったときの事後情報は $\overline{\boldsymbol{\mu}}(x)$ となる。

ここで、事前情報が $\boldsymbol{\mu}$ のとき、最適政策を用いて得られる期待利得を $v_n(\boldsymbol{\mu})$ とする。現れたが x のとき、この仕事を選べば x を得、見送ればつぎに現れる仕事に直面し、それ以降最適に振る舞うから、最適性の原理よりつぎの最適方程式を満足する。

$$v_n(\boldsymbol{\mu}) = \int_0^\infty \max\{x, v_{n-1}(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x))\}\, dF_{\boldsymbol{\mu}}(x) \tag{21}$$

ここで、$F_{\boldsymbol{\mu}}(x) = \sum_{s=0}^{S} \mu_s F_s(x)$ であり、$v_1(\boldsymbol{\mu}) = \int_0^\infty x\, dF_{\boldsymbol{\mu}}(x)$ である。

まず、非負 (可測) 関数 $u\,(x), v\,(x)$ に対し $U_F\,(\,u\,(x), g\,(x)\,)$ と $V_F\,(u\,(x), g\,(x))$ を、

$$\begin{aligned} U_F\,(u\,(x), g\,(x)) &= \int_0^\infty (u\,(x) - g\,(x))^+\, dF(x) & (22)\\ V_F\,(u\,(x), g\,(x)) &= \int_0^\infty g\,(x)\, dF(x) + U_F\,(u\,(x), g\,(x)) & (23) \end{aligned}$$

とすれば $(h\,(x)^+ = \max\{h\,(x), 0\})$、これらの $U_F\,(u\,(x), g\,(x))\,, V_F\,(u\,(x), g\,(x))$ は、$T_F(z), S_F(z) = z + T_F(z)$ の一般化となっている。したがって、これらの関数を用いて、$v_n(\boldsymbol{\mu})$ は帰納的に

$$v_n(\boldsymbol{\mu}) = \int_0^\infty \left\{(x - v_{n-1}(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x)))^+ + v_{n-1}(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x))\right\} dF_{\boldsymbol{\mu}}(x) = V_{F_{\boldsymbol{\mu}}}\,(x, v_{n-1}(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x))) \tag{24}$$

と求めることにより、非負関数の列 $\{v_n(\boldsymbol{\mu})\}_{\{n=1,2,\cdots\}}$ として生成できる ($\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{S}$)。このとき、$v_1(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{s=0}^{S} \mu_s \int_0^\infty x\, dF_s(x)$ だから、(24) 式で生成した関数列は、帰納的に定義可能である。また、$S_n(\boldsymbol{\mu}) = \{x \mid v_{n-1}(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x)) \le x\}$ とし、$C_n(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{R}_+ - S_n(\boldsymbol{\mu})$ とすれば、$S_n(\boldsymbol{\mu})$ は残りの計画期間が n で、部分観測可能なマルコフ過程の状態についての情報が $\boldsymbol{\mu}$ のとき、現れた仕事に就くことが最適となる仕事の集合であり、$C_n(\boldsymbol{\mu})$ は、見送る方がよい仕事の集合である。このとき、つぎの性質が成り立つ。

定理 8 n を任意の正整数とすれば、$v_n(\boldsymbol{\mu})$ は $\boldsymbol{\mu}$ の増加関数である。また、$\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{S}$ とすれば、$v_n(\boldsymbol{\mu})$ は n の増加関数である。

すなわち、状態についての情報 $\boldsymbol{\mu}$ が、尤度比の意味で良くなればなるほど、最適に振る舞って得られる期待収益は大きくなる。また、最適に振る舞って得られる期待収益は、計画期間が長くなればなるほど、大きくなる。また、$v_n(\boldsymbol{\mu})$ と $v_{n+1}(\boldsymbol{\mu})$ には、つぎの関係がある。

系 3 $h_{n+1}\,(\boldsymbol{\mu}|x)$ を $h_{n+1}\,(\boldsymbol{\mu}|x) = x\, I_{S_{n+1}(\boldsymbol{\mu})}(x) + v_n(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x)) I_{C_{n+1}(\boldsymbol{\mu})}(x)$ とすれば、
$v_{n+1}(\boldsymbol{\mu}) = \int_0^\infty h_{n+1}\,(\boldsymbol{\mu}|x)\, dF_{\boldsymbol{\mu}}(x)$ となる。

つぎの定理 9 は、最適政策と部分観測可能なマルコフ過程の状態についての情報 $\boldsymbol{\mu}$ との関係を示すものである。

定理 9 $\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{S})$ とすれば $S_{n+1}(\boldsymbol{\mu}) \subset S_{n+1}(\boldsymbol{\nu})$ となる。任意の $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{S}$ に対し $S_{n+1}(\boldsymbol{\mu}) \subset S_n(\boldsymbol{\mu})$ となる。

すなわち、状態についての情報 $\boldsymbol{\mu}$ が、尤度比の意味で良くなればなるほど、現れた仕事に就くことが最適となる仕事の集合 $S_n(\boldsymbol{\mu})$ が小さくなる。また、状態についての情報が同じであれば、計画期間が長くなればなるほど、現れた仕事に就くことが最適となる仕事の集合が大きくなる。これらの定理 8 と定理 9 の性質の証明は省略するが（詳しくは中井 [18] 参照)、以上の性質をまとめればつぎのようになる。

定理 10 部分観測可能なマルコフ過程の状態についての事前情報が $\boldsymbol{\mu}$ のとき、現れた仕事の大きさが x とする。もし、$x \in S_n(\boldsymbol{\mu})$ ならば、この仕事を選ぶことが最適であり、$x \in C_n(\boldsymbol{\mu})$ ならば見送ることが最適となる。この最適政策によって得られる期待収益 $v_n(\boldsymbol{\mu})$ は、(24) 式によって帰納的に求められる。

以上述べてきたことをまとめれば、つぎのようになる。部分観測可能なマルコフ過程の状態についての事前情報が $\boldsymbol{\mu}$ のとき、集合 $S_n(\boldsymbol{\mu})$ はこのジョブ・サーチモデルの停止領域になる。すなわち、現れた仕事から得られる収益がこの集合に含まれればこの仕事を選び、そうでなければ見送ることが最適となる。したがって、この集合がこのジョブ・サーチの問題の最適政策を決定する。定理 9 の後半よりこの集合は残りの決定期間が、長くなればなるほど小さくなる。また、定理 9 の前半より状態についての事前情報が、尤度比の意味で良くなればなるほどこの集合は小さくなることがわかる。すなわちこれら 2 つの定理が、このジョブ・サーチの問題の最適政策の性質を決定することになる。また、(24) 式で定義した $v_n(\boldsymbol{\mu})$ がこのジョブ・サーチの問題で最適政策によって得られる期待収益だから、定理 8 がこの値の性質を表している。

5.2 不完備情報の確率的逐次割り当て問題

4.2 節の確率的逐次割り当て問題を、これまで考えてきた部分観測可能なマルコフ過程で考える。ここでの部分観測可能なマルコフ過程の状態に関する情報過程、学習方法などは、すべてこれまでと同様とする。

いま、それぞれの期に現れる投資対象から得られる収益を表す確率変数は、互いに独立とするが、部分観測可能なマルコフ過程の状態に依存し、それらの状態についての事前情報を、$\boldsymbol{\mu}\,(\in \mathcal{S})$ とする。残り計画期間 n のあいだに現れる投資対象に、n 個に分けられた資本 $\{p_1, \cdots, p_n\}$ を割り当てるとき $1 \geq p_1 \geq \cdots \geq p_n \geq 0$、この確率的逐次割り当て問題の状態を $(p_1, \cdots, p_n; \boldsymbol{\mu})$ と表す。

このとき、大きさが x の仕事が現れたとする。このとき、この仕事の大きさから状態についての情報を得るとともに、n 人なかから 1 人を割り当てる。k 番目の人を大きさが x の仕事に割り当てれば、利得 $p_k x$ を得て、つぎの仕事に直面する。このとき、この x を用いてベイズの定理によって情報を改良して事後情報は $\overline{\boldsymbol{\mu}}(x)$ となるから、この確率的逐次割り当て問題の状態は、$(p_1, \cdots, p_{k-1}, p_{k+1}, \cdots, p_n; \overline{\boldsymbol{\mu}}(x))$ と

状態が $(p_1,\cdots,p_n;\boldsymbol{\mu})$ の確率的逐次割り当て問題で、最適政策にしたがって得られる総期待利得を $v\,(p_1,\cdots,p_n;\boldsymbol{\mu})$ とすれば、最適性の原理から、つぎの最適方程式を満足する。

$$v\,(p_1,\cdots,p_n;\boldsymbol{\mu}) = \int_0^\infty \max_{1\le k\le n}\{p_k\,x+v(p_1,\cdots,p_{k-1},p_{k+1},\cdots,p_n;\overline{\boldsymbol{\mu}}(x))\}dF_{\boldsymbol{\mu}}(x) \quad (25)$$

また、$n=1$ のときは $v\,(p_1;\boldsymbol{\mu}) = p_1\int_0^\infty x\,dF_{\boldsymbol{\mu}}(x)$ となる。

つぎに、(22) 式と (23) 式を用いて、非負関数列 $\{\,g_{n,i}\,(\boldsymbol{\mu})\}$ を帰納的に定義する ($\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S},\ i=1,2,\cdots,n$)。まず、$g_{n,i}\,(\boldsymbol{\mu}) = V_{F_{\boldsymbol{\mu}}}(x,g_{n-1,i}\,(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x))) - U_{F_{\boldsymbol{\mu}}}(x,g_{n-1,i-1}(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x)))$ とし、$g_{n,0}(\boldsymbol{\mu})=\infty, g_{n,n+1}(\boldsymbol{\mu})=0$ とする $(n=0,1,2,\cdots)$。また、

$$S_{n,i}\,(\boldsymbol{\mu}) = \{x\,|g_{n-1,i}(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x)) \le x < g_{n-1,i-1}(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x))\}$$

とし、$U_{n,i}\,(\boldsymbol{\mu}) = \bigcup_{k=1}^{i-1} S_{n,k}(\boldsymbol{\mu}), L_{n,i}\,(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{R}_+ - U_{n,i+1}(\boldsymbol{\mu})$ とする。ただし、$U_{n,1}(\boldsymbol{\mu}) = L_{n,n}(\boldsymbol{\mu}) = \emptyset$、$U_{n,n+1}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{R}_+$ とおく。また、$g_{1,1}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{s=0}^{S}\phi_s\int_0^\infty x\,dF_s(x)$ から、これらの関数列が定義可能である。このとき、非負関数の列 $\{\,g_{n,i}\,(\boldsymbol{\mu})\}$ は $(\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}, i=1,2,\cdots,n)$、次のような性質を持つ（Nakai[15]・中井 [18])。

定理 11 n,i を任意の正整数とすれば、$g_{n,i}\,(\boldsymbol{\mu})$ は $\boldsymbol{\mu}$ 増加関数である。n を任意の正整数とし $\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}$ とすれば、$g_{n,i}\,(\boldsymbol{\mu})$ は i の減少関数である。また、i を任意の正整数とし $\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}$ とすれば、$g_{n,i}\,(\boldsymbol{\mu})$ は n の増加関数である。

また、非負関数列 $\{\,g_{n,i}\,(\boldsymbol{\mu})\}$ を用いて定義した、3 つの集合 $S_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu}), U_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})$ と $L_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})$ の関係について、つぎの系が成り立ち、系 5 によって、$v_n(\boldsymbol{\mu})$ と $v_{n+1}(\boldsymbol{\mu})$ の関係が示される。

系 4 集合 $S_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu}), U_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})$ と $L_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})$ は互いに素で $S_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})\cup U_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})\cup L_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu}) = R_+$ となる。

系 5 $h_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu}|x)$ を

$$h_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu}|x) = g_{n,i-1}(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x))\,I_{U_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})}(x) + x\,I_{S_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})}(x) + g_{n,i}(\overline{\boldsymbol{\mu}}(x))\,I_{L_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})}(x)$$

とすれば、$g_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})$ は $g_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu}) = \int_0^\infty h_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu}|x)\,dF_{\boldsymbol{\mu}}(x)$ となる。

ここで、2 つの領域 $U_{n,k+1}(\boldsymbol{\mu}), L_{n,k}(\boldsymbol{\mu})$ は、一般には連結な領域となるとは限らない。このような例は Monahan [12]、Ohnishi, Kawai and Mine [22] などの取り替え問題などではよく現れる現象である。

このとき、$S_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})$ は大きい方から i 番目の p_i を割り当てることが最適となる x の領域であり、$U_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})$ が、p_i より大きい p、すなわち大きさが p_1 から p_{i-1} までのどれかを割り当てることが最適となる x の領域を示している。反対に、$L_{n+1,i}\,(\boldsymbol{\mu})$ は、p_i より小さい p、すなわち p_{i+1} から p_n までのどれかを割り当てることが最適となる x の領域を示している。したがって、次の 2 つの定理は最適政策の性質を間接的に示している。

定理 12 任意の $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{S}$ と $i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ に対し $U_{n+1,i}(\boldsymbol{\mu}) \subset U_{n,i}(\boldsymbol{\mu})$ となる。また、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ とすれば $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{S})$、$i = 1, 2, \cdots, n+1$ のとき $U_{n+1,i}(\boldsymbol{\mu}) \subset U_{n+1,i}(\boldsymbol{\nu})$ となる。

これら定理 11 と定理 12 の性質をもとに、部分観測可能なマルコフ過程での確率的逐次割り当て問題の最適政策と $v(p_1, \cdots, p_n; \boldsymbol{\mu})$ は、次の定理のようになる。これら定理 11 と定理 12 の証明は中井 [18] の付録に詳しく、定理 13 の証明についても同書に詳しい。

定理 13 確率的逐次割り当て問題で状態が $(p_1, \cdots, p_n; \boldsymbol{\mu})$ のとき、現れた投資対象から得られる収益を x とする。$x \in S_{n,k}(\boldsymbol{\mu})$ ならば、この投資対象に k 番目の大きさの資本 p_k を割り当てることが最適となる。また、最適政策によって得られる総期待利得 $v(p_1, \cdots, p_n; \boldsymbol{\mu})$ は $v(p_1, \cdots, p_n; \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, g_{n,i}(\boldsymbol{\mu})$ となる。

定理 11 の非負関数列 $\{g_{n,i}(\boldsymbol{\mu})\}$ の性質から、最適政策を用いたときの総期待収益の性質が示される。すなわち、$v(p_1, \cdots, p_n; \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, g_{n,i}(\boldsymbol{\mu})$ だから、$v(p_1, \cdots, p_n; \boldsymbol{\mu})$ は状態についての情報が尤度比の意味で良くなれば大きくなる。また、$v(p_1, \cdots, p_n; \boldsymbol{\mu})$ と計画期間 n との関係も求められる。また、最適政策が集合 $\{S_{n,k}(\boldsymbol{\mu})\}$ により定まるから、定理 12 がその性質を表している。

注 2 収益が x の投資対象に割り当てたときに x そのものではなく、一般の利得関数 $u(\boldsymbol{\mu}, x)$ でも考えることができる。いま、利得関数を $u(\boldsymbol{\mu}, x) = u(\boldsymbol{\mu}) \cdot x$ とし、$u(\boldsymbol{\mu})$ を $\boldsymbol{\mu}$ に関する非減少凸関数で、非負で有限な値をとる関数とすれば、同様の議論ができる (Nakai [15])。

たとえば、$u(\boldsymbol{\mu}, x) = \mu_1$ とすればよい。このとき、次のようなモデルを考える。いま、S 個の箱があり、これらの箱の中のどれかに、1 つの目的物が隠されているとし、この目的物を探す。一方、目的物は S 個の箱のあいだを、部分観測可能なマルコフ連鎖にしたがって移動する。このとき、事前情報は S 個の箱の中の目的物の存在確率ベクトルとして与えられ、情報は箱を探索することで目的物のいる場所についての情報を得る。すなわち、箱の中を探索して発見すれば探索は終了するが、発見しなくても目的物の存在確率を学習し更新する。また、見逃し確率がある場合も考えられる。このような探索モデルも、部分観測が可能なマルコフ連鎖の上での多段決定問題といえる (Pollock [23])。

状態が $(p_1, \cdots, p_n; \boldsymbol{\mu})$ の確率的逐次割り当て問題において、4.2 節と同じように、$p_1 = \cdots = p_k = 1$ とし $p_{k+1} = \cdots = p_n = 0$ とする。このとき、この確率的逐次割り当て問題は、逐次に現れる n 個の投資対象から k 個を選んで、総期待利得を最大にすることになり、定理 13 より、最適政策にしたがって得られる総期待収益は $\sum_{i=1}^{k} g_{n,i}(\boldsymbol{\mu})$ となる。このとき、$g_{n,i}(\boldsymbol{\mu})$ は、この選択モデルで $k-1$ 個の投資対象が選択できるとき、この選択できる機会が 1 回増えることによる総期待収益の増加分を表している。すなわち、n 個の投資対象から k 個を選択するモデルで、k 番目に付け加えられた選択の機会で増加する期待収益を表している。

参考文献

[1] S. C. Albright, Optimal Sequential Assignments with Random Arriving Time, *Management Science*, vol. 21, 60–67, 1974.

[2] S. C. Albright, A Markov-Decision-Chain Approach to a Stochastic Assignment Problem, *Operations Research*, vol. 22, 61–64, 1974.

[3] M. H. DeGroot, *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill, New York, New York, 1970.

[4] C. Derman, G. J. Lieberman and S. M. Ross, A Sequential Stochastic Assignment Problem, *Management Science*, vol. 18, 349–355, 1972.

[5] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn and J. Ginibre, Correlation Inequalities on Some Partailly Ordered Sets, *Communications on Mathematical Physics*, vol. 22, 89–103, 1971.

[6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequality*, Cambridge University Press, 1934.

[7] S. Karlin, *Total Positivity*, Stanford University Press, Stanford, California, 1968.

[8] S. Karlin and H. M. Taylor, *A Second Course in Stochastic Processes : Second Edition*, Academic Press, New York, 1981.

[9] S. A. Lippman and J. J. McCall, Job Search in a Dynamic Economy, *Journal of Economic Theory*, vol. 12, 365–390, 1976.

[10] S. A. Lippman and J. J. McCall, The Economics of Job Search : A Survey, *Economic Inquiry*, vol. 14, 347–368, 1976.

[11] S. A. Lippman and J. J. McCall (ed), Studies in the Economics of Search, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[12] G. Monahan, Optimal Stopping in a Partially Observable Markov Processes with Costly Information, *Operations Research*, vol. 28, 1319–1334, 1980.

[13] T. Nakai, The Problem of Optimal Stopping in a Partially Observable Markov Chain, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 45, 425–442, 1985.

[14] T. Nakai, Optimal Assignment for a Random Sequence with an Unknown Number of Jobs, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 28, 179–194, 1985.

[15] T. Nakai, A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Partially Observable Markov Chain, *Mathematics of Operations Research*, vol. 11, 230–240, 1986.

[16] T. Nakai, An Optimal Selection Problem with a Random Number of Applicants per Period, *Operations Research*, vol. 34, 478–485, 1986.

[17] T. Nakai, An Optimal Selection Problem on a Partially Observable Markov Chain, *Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing* (Eds. A. H. Christer, S. Osaki and L. C. Thomas), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 445, Springer-Verlag, Berlin, 140–154, 1996.

[18] 中井　達, 不完備情報の動的決定モデル, 九州大学出版会, 福岡, 1996.

[19] T. Nakai, An Optimal Assignment Problem for Multiple Objects per Period – Case of a Partially Observable Markov Chain, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, vol. 31, 23–34, 1999.

[20] T. Nakai, A Generalized MTP_2 and a Sequential Stochastic Model on a Partially Observable Markov Process, *Proceedings of the First Western Pacific and Third Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology and Management*, (Eds. R. J. Wilson, S. Osaki and M. J. Faddy), The University of Queensland, Australia, 387–396, 1999.

[21] T. Nakai, Learning Procedure for a Partially Observable Markov Process and its Applications, *Discussion Paper Series*, No. 2001-5, Kyushu University, 1–30, 2001.

[22] M. Ohnishi, H. Kawai and H. Mine, An Optimal Inspection and Replacement Policy under Incomplete State Information,*European Journal of Operations Research*, vol. 27, 117–128, 1986.

[23] S. M. Pollock, A Simple Model of Search for a Moving Target, *Operations Research*, vol. 18, 883–903, 1970.

[24] C. J. Preston, A Generalization of the FKG Inequaliteis, *Communications on Mathematical Physics*, vol. 36, 233–241, 1974.

[25] S. M. Ross, Quality Control under Markovian Deterioration, *Management Science*, vol. 17, 587–596, 1971.

[26] S. M. Ross, *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, New York, New York, 1983.

[27] D. Stoyan, *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, John Wiley & Sons, New York, New York, 1983.