数理解析研究所講究録 1265 巻 2002 年 152-161

解析関数の多項式因子を求める方法
A method for finding polynomial factors of analytic functions

筑波大学電子・情報工学系　櫻井鉄也 (Tetsuya Sakurai)
名古屋大学工学研究科情報工学専攻　杉浦洋 (Hiroshi Sugiura)

1 はじめに

反復解法を用いて非線形方程式の解を求めるときに，多重解や近接解は反復回数の増大や計算途中でのオーバーフローの原因となる．また，解の精度保証を行うときにも区間内に唯一の解の存在を仮定する場合が多く，そのような方法では近接解に対して精度保証を与えることが困難である．

任意次数の多項式因子を求める方法を用いると近接解や多重解を一つの多項式因子として求めることができるため，多重解に対しても収束次数の低下が起こらず近接解と多重解を区別する必要もなくなる．また，因子の係数は近接解を個別に求める場合に比べて精度良く求めることが可能である．多項式因子を求める方法を適用するには近接した解のクラスタを分離して初期近似因子をあらかじめ求める必要がある．本論文ではクラスタを求める方法によって初期近似因子を求めることを考える．

関数 $f(z)$ は複素平面上の単位円単位円を含む単純閉領域 W で解析的とする．f は単位円周上に零点を持たないとする．n を単位円内の $f(z)$ の相異なる零点の数とし，$z_1, \ldots, z_n$ をその零点，$\nu_1, \ldots, \nu_n$ をそれぞれの多重度とする．

$$\mu_k := \frac{1}{2\pi i}\int z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

とする．Delves, Lyness [2] はこの値を用いて $z_1, \ldots, z_n$ を求める方法を示した．このような積分の値を利用して関数の零点を求める方法は数値積分を用いた方法と呼ばれている．

Torii, Sakurai [9] は拡張ユークリッド算法を利用して (1) の値から多項式の零点を求める方法を示した．Sakurai ら [8] は，$f(z)$ が近接した零点のクラスタを持つ場合に [9] の方法を適用しクラスタを分離する方法を示した．Kravanja, Sakurai, Van Barel [4] は (1) の値から生成される形式的直交多項式を利用してクラスタの重心を求める方法を示した．重複した零点や近接した零点をひとまとまりのクラスタとして分離する方法の初期近似因子を求めることや，因子を求める方法の収束性の改善にもクラスタを求める方法が利用できる [1, 6, 7].

数値積分を用いた方法によって零点を十分な精度で求めるためには，$\mu_0, \mu_1, \ldots$ の値を十分な精度で求める必要がある．本論文では，数値積分を単位円周上の等間隔点での関数値を利用して求めたときに積分誤差がどのような影響を与えるかを考察し，文献 [4] で示された方法では数値積分を必ずしも十分な精度で求める必要はないことを示す．

2 積分誤差の影響

W は単位円を含む複素平面上の領域とする．$f(z)$ は W で解析的とし，単位円周上に零点を持たないとする．$z_1, \ldots, z_n$ は単位円内部にある f の相異なる零点とし，$\nu_1, \ldots, \nu_n$ はその多重度とする．N は多重度も含めた単位円内部の零点の数とする．

N 次の多項式 $P_N(z)$ を

$$P_N(z) := \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{\nu_k}$$

とする．複素関数 $g : W \to \mathbb{C}$ は $f = P_N g$ を満たすとする．g は W で解析的で，単位円内部および周上に零点を持たない．このとき

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{P'_N(z)}{P_N(z)} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{z - z_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

となる．

式 (1) で与えられる μ_k を用いて n 次の Hankel 行列を

$$H_n := \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n-2} \end{bmatrix}, \quad H_n^{<} := \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_2 & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ \mu_n & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \end{bmatrix}$$

とする．このとき以下の定理が成り立つ．

定理 1 行列束 $H_n^{<} - \lambda H_n$ の固有値は $z_1, \ldots, z_n$.

数値積分により求めた μ_p を利用して Hankel 行列を作ることにより，$f(z) = 0$ の近似解を得ることができる．

関数 f との依存関係を示すために μ_p の代わりに $\mu_p(f)$ のように表記する．$\mu_p(P_N)$ と $\mu_p(g)$ の定義から次の性質がある．

$$\mu_p(f) = \mu_p(P_N) + \mu_p(g), \qquad \mu_p(g) = 0.$$

これより，P_N のみが結果に影響を与えることが判る．

K は正の整数とし，

$$\omega_j := e^{\frac{2\pi i}{K} j}, \qquad j = 0, 1, \ldots, K-1$$

とする．μ_p を求める積分を K 点の台形公式で近似すると，μ_p に対して以下の近似を得る．

$$\hat{\mu}_p = \hat{\mu}_p(f) := \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \omega_j^{p+1} \frac{f'(\omega_j)}{f(\omega_j)}.$$

この近似値を用いたときに，その誤差がどのように結果に影響を与えるかについて考察

ここで P'_N/P_N と g'/g のそれぞれの影響について分離して考察する．P'_N/P_N の無限遠点における Laurent 級数展開は

$$\frac{P'_N(z)}{P_N(z)} = \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} + \cdots$$

となる．この級数は $|z| > \rho_I$ で収束するとする．ここで

$$\rho_I := \max_{1\le k\le n} |z_k| \ < \ 1.$$

g'/g は単位円の内部および上で解析的であるので，

$$\frac{g'(z)}{g(z)} =: \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots$$

と表せる．この級数は $|z| < \rho_E$ で収束するとする．これらの級数をあわせることで $\rho_I < |z| < \rho_E$ について以下の関係を得る．

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \cdots + \frac{\mu_2}{z^3} + \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_0}{z} + \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots.$$

$\hat{\mu}_p(P_N)$ と $\hat{\mu}_p(g)$ について以下の関係が成り立つ．

$$\hat{\mu}_p(f) = \hat{\mu}_p(P_N) + \hat{\mu}_p(g).$$

まず $\hat{\mu}_p(P_N)$ について考える．

定理 2

$$\hat{\mu}_p(P_N) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu_{p+rK}, \qquad 0 \le p \le K-1.$$

証明　$0 \le p \le K-1$ について以下の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_p(P_N) &= \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} \omega_j^{p+1} \frac{P'_N(\omega_j)}{P_N(\omega_j)} = \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} \omega_j^{p+1} \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mu_l}{\omega_j^{l+1}}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{+\infty} \mu_l \left(\frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} \omega_j^{p-l}\right) \\
&= \sum_{r=0}^{+\infty} \mu_{p+rK}.
\end{aligned}$$

最後の変形は以下の関係を利用している．

$$\frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} \omega_j^{p-l} = \begin{cases} 1, & \text{if } p-l = rK \text{ for } r \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

これにより定理の結果を得る. □

P_N の部分について以下の評価を得る.

$$\hat{\mu}_p(P_N) - \mu_p(P_N) = \hat{\mu}_p(P_N) - \mu_p = \mu_{p+K} + \mu_{p+2K} + \mu_{p+3K} + \cdots. \tag{3}$$

ρ_I の定義より

$$\hat{\mu}_p(P_N) - \mu_p = \mathcal{O}(\rho_I^{p+K}) \tag{4}$$

を得る.

つぎに $\hat{\mu}_p(g)$ について考える.

定理 3

$$\hat{\mu}_p(g) = \sum_{r=1}^{+\infty} \gamma_{rK-p-1}, \qquad 0 \le p \le K-1.$$

証明 以下の関係がある.

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_p(g) &= \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} \omega_j^{p+1} \frac{g'(\omega_j)}{g(\omega_j)} = \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} \omega_j^{p+1} \Big(\sum_{l=0}^{+\infty} \gamma_l \omega_j^l\Big) \\
&= \sum_{l=0}^{+\infty} \gamma_l \Big(\frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} \omega_j^{p+l+1}\Big) \\
&= \sum_{r=1}^{+\infty} \gamma_{rK-p-1}.
\end{aligned}$$

これにより定理の結果を得る. □

g'/g は単位円内部で解析的であるので $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le \rho\}$, $1 < \rho < \rho_E$ において

$$|\gamma_j| \le \frac{M}{\rho^j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

となる. ここで

$$M := \max_{|z|=\rho} \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|.$$

これより

$$|\hat{\mu}_p(g)| \le \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{M}{\rho^{rK-p-1}} = M \frac{(\frac{1}{\rho})^{K-p-1}}{1 - (\frac{1}{\rho})^K}.$$

したがって

$$\hat{\mu}_p(g) = \hat{\mu}_p(g) - \mu_p(g) = \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{1}{\rho}\Big)^{K-p-1}\Big) \tag{5}$$

となる. 式 (4), (5) より誤差についての以下の結果を得る.

定理 4 $1 < \rho < \rho_E$ となる $\rho \in \mathbb{R}$ について以下が成り立つ.

$$\hat{\mu}_p(f) - \mu_p = \mathcal{O}(\rho_I^{p+K}) + \mathcal{O}(\rho^{p+1-K}).$$

3 Kravanja-Sakurai-Van Barel 法の誤差解析

本節では Kravanja らの方法 [4] の誤差解析を行う．以下の考察により周回積分を台形則で近似したときに P_N に起因する積分の誤差は方法の結果に影響を与えないことがわかる．すなわち Hankel 行列による一般化固有値問題の結果は $z_1, \dots, z_n$ となる．

以下のように定義する．

$$\hat{H}_n(P_N) := \left[\ \hat{\mu}_{k+l}(P_N)\ \right]_{k,l=0}^{n-1}, \qquad \hat{H}_n^{<}(P_N) := \left[\ \hat{\mu}_{1+k+l}(P_N)\ \right]_{k,l=0}^{n-1}.$$

このとき次の定理を得る．

定理 5 行列束 $\hat{H}_n^{<}(P_N) - \lambda \hat{H}_n(P_N)$ の固有値は $z_1, \dots, z_n$ である．また対応する多重度 $\nu_1, \dots, \nu_n$ は

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{z_k^p}{1 - z_k^K} \right) \nu_k = \hat{\mu}_p(P_N), \qquad p = 0, \dots, n-1 \tag{6}$$

を満たす．

証明　Vandermonde 行列 V_n を

$$V_n := \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_n \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

とする．$z_1, \dots, z_n$ は互いに異なるので V_n は正則である．

式 (3) より $p = 0, 1, \dots$ について

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_p(P_N) &= \sum_{k=1}^{n} \nu_k z_k^p \left(1 + z_k^K + z_k^{2K} + \cdots \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\nu_k}{1 - z_k^K} \right) z_k^p, \end{aligned} \tag{7}$$

となる．

$$\hat{\nu}_k := \frac{\nu_k}{1 - z_k^K}, \qquad k = 1, \dots, n$$

とする．対角行列 $\hat{D}_n$ と Z_n を

$$\hat{D}_n := \mathrm{diag}\,(\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_n), \qquad Z_n := \mathrm{diag}\,(z_1, \dots, z_n)$$

と定義する．このとき関係

$$\hat{\mu}_p(P_N) = \sum_{k=1}^{n} \hat{\nu}_k z_k^p$$

より $\hat{H}_n(P_N)$ と $\hat{H}_n^<(P_N)$ は以下のように分解できることがわかる.

$$\hat{H}_n(P_N) = V_n\hat{D}_nV_n^T, \qquad \hat{H}_n^<(P_N) = V_n\hat{D}_nZ_nV_n^T.$$

これより

$$\hat{H}_n^<(P_N) - \lambda\hat{H}_n(P_N) = V_n\hat{D}_n(Z_n - \lambda I_n)V_n^T.$$

よって定理の前半が証明された.

式 (7) より定理の後半を得る. □

つぎに g の影響について考察する.

$$\varphi_n(z) := \prod_{k=1}^{n}(z - z_k) =: z^n + u_{n-1}z^{n-1} + \cdots + u_1z + u_0$$

とする. 対応するコンパニオン行列 $C_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ を

$$C_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -u_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -u_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -u_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -u_{n-1} \end{bmatrix}$$

とする. 定理 1 と 5 より以下の関係が導かれる.

$$H_n^< = H_nC_n, \qquad \hat{H}_n^<(P_N) = \hat{H}_n(P_N)C_n.$$

行列束 $\hat{H}_n^<(f) - \lambda\hat{H}_n(f)$ の固有値を計算して零点の近似値 $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$ を得る.

$$\hat{\varphi}_n(z) := \prod_{k=1}^{n}(z - \hat{z}_k)$$

とし, $\hat{C}_n$ は対応するコンパニオン行列とする. このとき $\hat{H}_n^<(f) = \hat{H}_n(f)\hat{C}_n$ である.

定理 6 $\hat{H}_n(f)$ が正則であれば $1 < \rho < \rho_E$ であるような任意の $\rho \in \mathbb{R}$ について以下の関係が成り立つ.

$$|\hat{\varphi}_n(z_k)| = \mathcal{O}(\rho^{2n-K}), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

証明 $\hat{C}_n$ と C_n はそれぞれ $\hat{\varphi}_n$ と φ_n に対応したコンパニオン行列であるので

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_n(z_1) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_n(z_n) \end{pmatrix} = -V_n^T\hat{C}_ne_n + \begin{pmatrix} z_1^n \\ \vdots \\ z_n^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_n(z_1) \\ \vdots \\ \varphi_n(z_n) \end{pmatrix} = -V_n^TC_ne_n + \begin{pmatrix} z_1^n \\ \vdots \\ z_n^n \end{pmatrix},$$

ここで $e_n := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. ゆえに

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_n(z_1) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_n(z_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi_n(z_1) \\ \vdots \\ \varphi_n(z_n) \end{pmatrix} = V_n^T(C_n - \hat{C}_n)e_n$$
$$= V_n^T\hat{H}_n^{-1}(\hat{H}_nC_n - \hat{H}_n^{<})e_n.$$

$\hat{H}_n^{<}(P_n) - \hat{H}_n(P_N)C_n = 0$ および $\varphi_n(z_k) = 0$ であるので

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_n(z_1) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_n(z_n) \end{pmatrix} = V_n^T\hat{H}_n^{-1}\Big(\hat{H}_n(g)C_n - \hat{H}_n^{<}(g)\Big)e_n.$$

よって $k = 1, \ldots, n$ について

$$|\hat{\varphi}_n(z_k)| \leq \|V_n^T\|_\infty \, \|\hat{H}_n^{-1}\|_\infty(\|\hat{H}_n(g)\|_\infty\|C_ne_n\|_\infty + \|\hat{H}_n^{<}(g)e_n\|_\infty)$$

となる.

ここで $\hat{H}_n(g)$ のノルムについて考える.

$$\begin{aligned} \|\hat{H}_n(g)\|_\infty &= \max_{0\leq k\leq n-1}\sum_{l=0}^{n-1}|\hat{\mu}_{k+l}(g)| \\ &\leq \frac{M}{1-\rho^{-K}}\max_{0\leq k\leq n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\rho^{k+l+1-K} \\ &\leq \frac{M}{1-\rho^{-K}}\frac{\rho^n-1}{\rho-1}\rho^{n-K} \\ &= \mathcal{O}(\rho^{2n-K}) \end{aligned}$$

である. $\hat{H}_n^{<}(g)$ についても同様に評価できる. よって

$$|\hat{\varphi}_n(z_k)| = \mathcal{O}(\rho^{2n-K}), \qquad k = 1, \ldots, n$$

となり, 定理が証明された. □

$\hat{\varphi}_n - \varphi_n$ の係数からなるベクトルは $-\hat{C}_ne_n + C_ne_n$ で与えられるので

$$\|\hat{\varphi}_n - \varphi_n\| = \|(C_n - \hat{C}_n)e_n\|$$

となる. ここで多項式のノルムはその係数を要素とするベクトルのノルムとして定義される. 定理 6 と同様にして以下の定理を得る.

定理 7 $\hat{H}_n(f)$ が正則の時, $1 < \rho < \rho_E$ であるような任意の $\rho \in \mathbb{R}$ について

$$\|\hat{\varphi}_n - \varphi_n\| = \mathcal{O}(\rho^{2n-K}).$$

4 数値例

いくつかの数値例を示す．実験は Matlab を用い，倍精度計算によって行った．

単位円周上に等間隔分布した K 点の台形則で周回積分を計算し，Delves-Lyness 法によって求めた近似解を $z_{1,K}^{\text{D-L}},\dots,z_{n,K}^{\text{D-L}}$ とする．同様にして周回積分の値を計算し，行列束 $\hat{H}_n^{<}(f)-\lambda\hat{H}_n(f)$ の固有値によって求めた近似解を $z_{1,K}^{\text{K-S-V}},\dots,z_{n,K}^{\text{K-S-V}}$ とする．多重度は線形方程式

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(z_{k,K}^{\text{K-S-V}})^p}{1-(z_{k,K}^{\text{K-S-V}})^K}\right)\nu_k=\hat{\mu}_p(f),\qquad p=0,\dots,n-1$$

を解いて求めた（定理 5 の式 (6) を参照）．

例 1

$$P_N(z)=(z-0.2)^3(z-0.2+0.5i)(z-0.2-0.5i)(z-0.9)^2$$

および

$$g(z)=1$$

とした．

$\rho_I=0.9$ および $\rho_E=\infty$ である．K を変化させて得られた結果を表 1 に示す．

$K=8$ のとき得られた近似解 $z_{1,8}^{\text{K-S-V}},\dots,z_{4,8}^{\text{K-S-V}}$ は

$$\begin{array}{l}
0.20000000000000+0.50000000000000i\\
0.20000000000000-0.50000000000000i\\
0.19999999999999+0.00000000000000i\\
0.90000000000000+0.00000000000000i
\end{array}$$

であり，対応する多重度は

$$\begin{array}{l}
1.00000000000000-0.00000000000001i\\
1.00000000000000+0.00000000000001i\\
2.99999999999999-0.00000000000000i\\
2.00000000000001+0.00000000000000i
\end{array}$$

となった．$g=1$ であるため，定理 5 で示したように積分誤差の影響はなく，$K=8$ であっても近似解の誤差は非常に小さいことがわかる．

例 2

$$P_N(z)=(z-0.2)^3(z-0.2+0.5i)(z-0.2-0.5i)(z-0.9)^2$$

および

$$g(z)=(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)\exp(5z^3+2z^4+z^5)$$

Table 1: Approximation errors for various values of K in Example 1

	$K=8$	$K=16$	$K=32$	$K=64$	$K=128$
$\max_{0\le p\le 2n-1} \lvert\hat{\mu}_p - \mu_p\rvert$	1.50e+00	4.55e-01	7.11e-02	2.36e-03	2.78e-06
$\max_{1\le j\le n} \lvert z_{j,K}^{\text{D-L}} - z_j\rvert$	3.68e-01	3.10e-01	1.53e-01	4.15e-02	4.19e-03
$\max_{1\le j\le n} \lvert z_{j,K}^{\text{K-S-V}} - z_j\rvert$	5.16e-15	2.66e-15	4.61e-15	6.49e-15	5.72e-15

$\rho_I = 0.9$ および $\rho_E = 2$ である．K を変化させたときの結果を表 2 に示す．$K = 16$ のとき得られた近似解は

$$\begin{aligned}
&0.20116264354169 + 0.50032172670692i\\
&0.20116264354169 - 0.50032172670692i\\
&0.19637048394944 + 0.00000000000000i\\
&0.89943464186948 + 0.00000000000000i
\end{aligned}$$

対応する多重度は

$$\begin{aligned}
&0.99381191467514 - 0.00479762188495i\\
&0.99381191467514 + 0.00479762188495i\\
&3.00545283047740 - 0.00000000000000i\\
&2.01018978549059 + 0.00000000000000i
\end{aligned}$$

となった．

$K = 64$ のとき得られた近似解は

$$\begin{aligned}
&0.20000000000000 + 0.50000000000000i\\
&0.20000000000000 - 0.50000000000000i\\
&0.19999999999999 + 0.00000000000000i\\
&0.89999999999999 + 0.00000000000000i
\end{aligned}$$

対応する多重度は

$$\begin{aligned}
&0.99999999999999 - 0.00000000000001i\\
&0.99999999999999 + 0.00000000000001i\\
&2.99999999999998 - 0.00000000000000i\\
&1.99999999999992 + 0.00000000000000i
\end{aligned}$$

となった．

表 2 より，$K = 64$ のときの μ_k の積分誤差は 2×10^{-3} 程度であり，Delves-Lynes 法はその影響を受けて 4×10^{-2} 程度になっている．しかし，Kravanja-Sakura-Van Barel 法は 10^{-14} 程度まで誤差が小さくなっていることがわかる．

Table 2: Approximation errors for various values of K in Example 2

	$K=8$	$K=16$	$K=32$	$K=64$	$K=128$
$\max_{0\le p\le 2n-1} \lvert\hat{\mu}_p - \mu_p\rvert$	1.27e+01	4.55e-01	7.11e-02	2.36e-03	2.78e-06
$\max_{1\le j\le n} \lvert z_{j,K}^{\text{D-L}} - z_j\rvert$	8.80e-01	3.13e-01	1.53e-01	4.15e-02	4.19e-03
$\max_{1\le j\le n} \lvert z_{j,K}^{\text{K-S-V}} - z_j\rvert$	1.57e+00	3.63e-03	5.32e-08	9.66e-15	2.11e-15

References

[1] C. Carstensen and T. Sakurai, *Simultaneous factorization of a polynomial by rational approximation*, J. Comput. Appl. Math. **61** (1995), no. 2, 165–178.

[2] L. M. Delves and J. N. Lyness, *A numerical method for locating the zeros of an analytic function*, Math. Comput. **21** (1967), 543–560.

[3] N. I. Ioakimidis, *Quadrature methods for the determination of zeros of transcendental functions—a review*, Numerical Integration: Recent Developments, Software and Applications (P. Keast and G. Fairweather, eds.), Reidel, Dordrecht, The Netherlands, 1987, pp. 61–82.

[4] P. Kravanja, T. Sakurai, and M. Van Barel, *On locating clusters of zeros of analytic functions*, BIT **39** (1999), no. 4, 646–682.

[5] P. Kravanja and M. Van Barel, *A derivative-free algorithm for computing zeros of analytic functions*, Computing **63** (1999), no. 1, 69–91.

[6] T. Sakurai and H. Sugiura, *Improvement of convergence of an iterative method for finding polynomial factors of analytic functions*, J. Comput. Appl. Math., To appear.

[7] ———, *On factorization of analytic functions and its verification*, Reliable Computing **6** (2000), no. 4, 459–470.

[8] T. Sakurai, T. Torii, N. Ohsako, and H. Sugiura, *A method for finding clusters of zeros of analytic function*, Proc. ICIAM95, Hamburg, 1995, pp. 515–516.

[9] T. Torii and T. Sakurai, *Global method for the poles of analytic function by rational interpolant on the unit circle*, World Sci. Ser. Appl. Anal. **2** (1993), 389–398.