数理解析研究所講究録 1267 巻 2002 年 5-13



# 双対曲線の幾何学

都立大学 理学研究科 岡 睦雄

## 1. 双対曲線とは

1.1. **定義.** 射影空間 : $\mathbf{P}^2$ の点 $\iff (X,Y,Z)$, 直線 $\iff UX+VY+WZ=0 \iff (U,V,W)$

双対射影空間 : $\mathbf{P}^{*2}$, 点 $\iff (U,V,W)$, 直線 $\iff XU+YV+WZ=0$

$C\subset \mathbf{P}^2$ : 既約平面曲線、とし $F(X,Y,Z)=0\}$ を定義斉次多項式、$f(x,y)=F(x,y,1)$ をアフィン定義多項式 とする.

$P=(\alpha,\beta)\in C\cap \mathbf{C}^2$ : 単純点, 接線 $T_PC$ は $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)(x-\alpha)+\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)(y-\beta)=0$.

斉次座標では $(\alpha,\beta) \iff (\alpha,\beta,\gamma)$

$$\frac{\partial F}{\partial X}(\alpha,\beta,\gamma)(X-\alpha)+\frac{\partial F}{\partial Y}(\alpha,\beta,\gamma)(Y-\alpha)+\frac{\partial F}{\partial Z}(\alpha,\beta,\gamma)(Z-\gamma)=0$$

対応する双対座標は $T_PC=(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta),\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta),-\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)-\beta\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta))$.

この像はまた双対射影空間の曲線となる。これを $C^*$ とかいて双対曲線という。

1.2. **双対射影曲線の定義式.** $(x(t),y(t))$ アフィンパラメーター表示

注意 : $t$ は 局所パラメーターだが $(x,y)$ は与えられた線形座標

$$T_PC:\quad y-y(t)=\frac{y'(t)}{x'(t)}(x-x(t)) \iff U(t)=y'(t),\quad V(t)=-x'(t),\quad W(t)=x'(t)y(t)-x(t)y'(t)$$

大域的には イデアル $(F,F_X-U,F_Y-V,F_Z-W)$ から $(X,Y,Z)$ を消去したイデアルの生成元となる斉次多項式。

再帰性 : $(C^*)^*=C$.

1.3. **G:= PSL(3, C) の右作用.** $\mathbf{P}^2\times G\to \mathbf{P}^2$, $((X,Y,Z),A)\mapsto (X,Y,Z)A$.

**Lemma 1.1.** 作用は次の性質を持つ。 $(C^A)^*=(C^*)^{{}^tA^{-1}}$.

*If $C^*$ is defined by $G(U,V,W)=0$, $(C^A)^*$ is defined by $\varphi^*_{{}^tA}G(U,V,W)=G((U,V,W)^tA)$.*

1.4. **類数 (Class) 公式.** $C$ は次数 $n$ の既約曲線、特異点 $\{P_1,\dots,P_k\}$ $m_i$ 多重度, $\mu_i$ : Milnor 数、$g$ 種数。

双対曲線 $C^*$ の次数 $n^*$ を $C$ の 類数、 $n^*$ は次の公式であてられる。

$$n^*=2(g-1+n)-\sum_{i=1}^k(m_i-r_i)=n(n-1)-\sum_{i=1}^k(\mu_i+m_i-1) \tag{1.2}$$

2番目の等式は 次の (modified) Plücker formula より従う。

$$2-2g = 3n - n^2 + \sum_{i=1}^{k}(\mu_i + r_i - 1)$$

1.5. **定義多項式の計算.** 一般に消去法による計算は無駄が多い。

**Lemma 1.3.** まず無限直線 $Z=0$ を一般にとる。$P_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, \ldots, k$ を特異点として $\mu_i$ を *Milnor number*、$m_i$ を多重度とする。$p$ を *generic constant* とし、$f_1(x_1, p, y_1) := f(x_1 - py_1, y_1)$、$h(x_1, p) := \Delta_{y_1}(f_1)$ を $f_1$ の $y_1$ の多項式としての判別式とする。$h(x_1,p)$ は次数 $n(n-1)$ の多項式で $\tilde{g}(u,v) := h(-1/u, v/u)u^{n(n-1)}$ と置く。そのとき $\tilde{g}(u,v) = g(u,v)L(u,v)$ とかけ $L$ は特異点からくる線形項で $L(u,v) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i u + \beta_i v + 1)^{\mu_i + m_i - 1}$ で与えられる。このとき多項式 $g(u,v)$ が求める $C^*$ の定義多項式。ここで $u = U/W, v = V/W$.

**Corollary 1.4.** $n^* = n(n-1) - \sum_{i=1}^{k}(\mu_i + m_i - 1)$.

*Proof.*

$$h(a,p) = 0 \iff \text{直線}\ x + py - a = 0:\ \text{tangent to}\ C \iff (-1/a, -p/a) \in C^*$$

**Example 1.5.** 1. $C$: $n=2$, $k=0 \implies C^*$: 2次曲線 $f(x,y) = x^2+y^2-1$, $f_1 = (x_1 - py_1)^2 + y_1^2 - 1$. $\Delta_{y_1}(x_1,p) = 4p^2 - 4x_1^2 + 1$. $h(u,v) = 4(u^2+v^2) - 4$.

2. $C$ 3次非特異 $\implies C^*$ 6次曲線、9カスプ例えば $C = \{f := y^2 * x + 2 * x^3 + 1 = 0\}$ とすれば $C^* = \{-27x^4y^2 + 4x^3 - 108x^2y^4 + 72y^2x - 108y^6 - 8 = -108g_2^3 - 1/2g_3^2 = 0\}$ where

$$g_2 := y^2 - 1/6 * x^2, \quad g_3 := x^3 + 18y^2x - 4$$

1.6. **Flex points.** 正則点 $P \in C$ が位数 $r$ の *flex* とは交点数 $I(C, T_PC; P)$ が $r+2$. 通常 位数1。

1。 Flex points= $F(X,Y,Z) = H(X,Y,Z) = 0$, ここで $H(X,Y,Z)$ : the Hessian of $F$

**Proposition 1.6.** $\mathcal{F}(f) := f_{x,x}f_y^2 - 2f_{x,y}f_yf_x + f_{y,y}f_x^2$. このとき $C \cap \{H=0\} \cap \mathbf{C}^2 = C \cap \{\mathcal{F} = 0\} \cap \mathbf{C}^2$.

定義：*the flex defect at P* とは交点数 $I(C,H;P)$ のことで $\delta(P;C)$ で表す。
$P_1, \ldots, P_k$ を特異点とする。

**Proposition 1.7.** *Flex* の総数 $i(C)$ は

$$i(C) = 3(n-2)n - \sum_{i=1}^{k}\delta(P_i;C)$$

1.7. **Flex defect formula and flex stratification.** 二つの曲線特異点の芽があったとき、$(C,O) \sim (C',O) \iff \exists C_t,\ C_0 = C, C_1 = C'$ $\mu$-不変族 $\sigma$: 既約特異点の位相同型類

Def. $\sigma$ を与えられた曲線特異点芽とする。We define *the generic flex defect of* $\sigma$, denoted by $\bar{\delta}(\sigma)$, by $\min\{\delta(f;O); f \in \sigma\}$.

$\mathcal{P} = \{(m_1,n_1), \ldots, (m_\ell, n_\ell)\}$ 与えられた Puiseux pairs
$\sigma(\mathcal{P})$ : $\mathcal{P}$ で定まる特異点。$(C,O) \in \sigma(\mathcal{P})$ で $y=0$ 接方向とする。このとき $y = \varphi(x^{1/N})$,

(1.8) $\quad \varphi(x^{1/N}) = \sum_{i=s}^{k_0} a_i x^i + h_1(x^{1/N_1}) + \cdots + h_\ell(x^{1/N_\ell}), \quad N_j := n_1 \cdots n_j,\ N = N_\ell$

where $h_j(x^{1/N_j}) = c_j x^{m_j/N_j} + \sum_{m_j<k<m_{j+1}/n_{j+1}} c_{j,k} x^{k/N_j}$ and $a_s, c_1, c_2, \dots, c_\ell \neq 0$, $k_0 := [m_1/n_1]$, $\gcd(n_i, m_i) = 1$ and $m_i > m_{i-1}n_i$.

$\mathcal{S} := \{j; a_i \neq 0, j \geq 2\}$.

Def: *the Puiseux order* of $f$ とは $\mathrm{ord}_x(\varphi)$ のことである。Puiseux $\mathrm{ord}(f)$ で表す。

Def. Flex Stratification: $\sigma(\mathcal{P})$ に次のようなStratificationを導入する。$\{\sigma(\mathcal{P};2)\dots,\sigma(\mathcal{P};[m_1/n_1]),$ where

$$\sigma(\mathcal{P};s) = \{(C(f),O) \in \sigma(\mathcal{P}); \text{Puiseux order}(f) = s\}.$$

**Theorem 1.9.** *Assume that $f(x,y) \in \sigma(\mathcal{P};s)$. Then we have*

$$\delta(O;f) = (s-2)n_1\cdots n_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} 3(n_j-1)m_j(n_{j+1}\cdots n_\ell)^2 \tag{1.10}$$

*and $f$ is generic if and only if $s \leq 2$, namely if either $s = 2$ or $m_1/n_1 \leq 2$ and $s = m_1/n_1$.*

**Corollary 1.11.** *For flex point $P$ of order $k$, we have $\ell = 0$ and $s = k+2$. Thus $\delta(P;f) = k$.*

$\beta_{p,q}$ : $y^p - x^q = 0$ Brieskorn 特異点の類

**Theorem 1.12.** *Assume that $p < q$ and $f \in \sigma(\beta_{p,q};s)$.* このとき次が成立。

$$\delta(O;f) = 3pq - 3q + (s-2)p, \quad \bar{\delta}(\beta_{p,q}) = \begin{cases} 3pq-3q, & q > 2p \\ 3pq - 2(p+q), & q \leq 2p \end{cases}$$

**Example 1.13.** 1。(2,3)-カスプ : $y^2 - x^3 = 0$, $\delta(\beta_{2,3}) = \bar{\delta}(\beta_{2,3}) = 8$,

2. Node, $y^2 - x^2 + (\mathit{higher}) = 0$, $\bar{\delta} = 6$,
3. (3,4)-カスプ、$y^3 - x^4 = 0$, $\delta = \bar{\delta} = 22$.
4. (2,5)-カスプ : $(y+x^2)^2 + x^5 = 0 \Rightarrow \delta = 15$
   $y^2 - x^5 = 0 \Rightarrow \delta = 16$

1.8. **Dual singularity.** Let $P \in C$ and $P^*$ be the corresponding point of $C^*$.

Well-known: A1. $P$ is a $(k-1,k)$-cusp $\iff$ $P^*$ is a flex of order $k-2$.

A2. $P$ is a generic node, $\iff$ $P^*$ consists of two tangent points with a generic bi-tangent line.

これを含む一般的な特異点の対応を考える。

(1) **Irreducible case.** Let $\mathcal{P} = \{(m_1,n_1),\dots,(m_\ell,n_\ell)\}$ and let $N_j = n_1\cdots n_j$ $(N = N_\ell)$

**Theorem 1.14.** **(Local Duality)** *Let $\sigma(\mathcal{P};s)^* := \{(C^*,O^*);(C,O) \in \sigma(\mathcal{P};s)\}$.* 双対作用は *Flex Stratification* を保つ。正確にいえば、

(1) $\sigma(\mathcal{P};2)^* = \sigma(\mathcal{P},2)$ *and* $\sigma(\mathcal{P};s)^* = \sigma(\mathcal{P}^+;\frac{s}{s-1})$ *if* $s > 2$

(2) $s = m_1/n_1$ なら $\sigma(\mathcal{P};\frac{m_1}{n_1})^* = \sigma(\mathcal{P}^*;\frac{m_1}{m_1-n_1})$, *if* $m_1 - n_1 > 1$ *and* $\sigma(\mathcal{P};\frac{m_1}{n_1})^* = \sigma(\mathcal{P}^-;m_1)$, *if* $m_1 = n_1+1$, *where* $\mathcal{P}^* := \{(m_1,m_1-n_1),(m_2,n_2),\dots,(m_\ell,n_\ell)\}$ *and* $\mathcal{P}^- := \{(m_2,n_2),\dots,(m_\ell,n_\ell)\}$.

$\sigma(\mathcal{P})^*$ が一つの同型類ではないことに注意。 Wall の関連論文あり。

注意 : $\ell = 0$, $s \geq 3$ が A1 に、$\ell = 1$ and $m_1 = n_1 + 1$ が A2 に対応する。

*Proof.* Put $N_j = n_1\cdots n_j$, $N^{(j)} = n_j\cdots n_\ell$ and $N = N_\ell$. $x^{1/N} = t$ とおくと, $C$ はつぎのパラメーター表示を持つ。

$x(t) = t^N$ and $y(t) = \varphi(t) = \sum_j b_j t^j$

$b_k = c_{j,k/N^{(j+1)}}$, if $m_j \leq k/N^{(j+1)} < m_{j+1}/n_{j+1}$ and $k/N^{(j+1)} \in \mathbf{Z}$.

双対曲線 $C^*$ は つぎのパラメーター表示を持つ。

$u(t) = -\sum_j \frac{jb_j}{N} t^{j-N}, \quad w(t) = \sum_j (\frac{j}{N} - 1) b_j t^j$
where $(u, w)$ is the affine coordinates defined by $u = U/V,\ w = W/V$.
$\mathrm{val}_t u(t) = (s-1)N$ だからパラメーターの取り換えで、$u(\tau) = \tau^{(s-1)N}$. とするとあとは計算で従う。
(2) **Reducible case.** 簡単のため Brieskorn singularity $(C, O) \in \beta_{p,q}$、$C = \{f(x, y) = 0\}$ の場合をみる。

**Theorem 1.15.** **(Local Duality-bis)** *Assume that $p < q$ and $(C, O) \in \sigma(\beta_{p,q}; s)$. Then $s = q/p$ and $(C^*, O^*) \in \sigma(\beta_{q-p,q}; \frac{q}{q-p})$ if $q \le 2p$. If $2p < q$ and $s = 2$, then $(C^*, O^*) \in \sigma(\beta_{p,q}; 2)$. If $2p < q$ and $s > 2$, $(C^*, O^*) = \cup_{i=1}^r (C_i^*, O^*)$ and $(C_i^*, O^*) \in \sigma(\mathcal{P}^+; \frac{s}{s-1})$ with $\mathcal{P}^+ = \{(s, s-1), (m_1, n_1)\}$. The Puiseux expansions of $C_i^*$ in $u^{1/(s-1)n_1}, i = 1, \ldots, r$ coincide up to the term $u^{m_1/(s-1)n_1}$.*

## 2. ザリスキー対

$C, C'$ が同次数の射影曲線とする。$(C, C')$ が Zariski-対とは $C$ と $C'$ の特異点の間に１：１対応があり、特異点が局所位相同型であるが、$\mathbf{P}^2 - C$ と $\mathbf{P}^2 - C'$ が位相的に非同値なるときをいう。次の例はザリスキーによって初めて与えられた。
例 (ザリスキー) $C$ をトーラスタイプの一般的な６次曲線 $(f_2(x, y)^3 - f_3(x, y)^2 = 0$ の形の定義式を持つ)、$C'$ をトーラスタイプではないが６このカスプをもつ６次曲線とする。このとき $\pi_1(\mathbf{P}^2 - C) \cong \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_3$ だが $\pi_1(\mathbf{P}^2 - C')$ は同型でない。(多分全て $\mathbf{Z}_6$).
ザリスキー対であることを証明するにはいくつかの方法が知られているが、
(１) $\pi_1(\mathbf{P}^2 - C) \not\cong \pi_1(\mathbf{P}^2 - C')$ を示す。最強だが一般的には難しい。
(２) Alexander 多項式 $\Delta_C(t)$ をつかう。
定義：$\pi : X_\infty \to \mathbf{P}^2$ 無限循環被覆、Branching locus: $\mathbf{C} \cup L_\infty$. このとき $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ は $\Lambda := \mathbf{C}[t, t^{-1}]$-可群であるので、$\Lambda/\lambda_1 \oplus \cdots \Lambda/\lambda_k$, $\lambda_1 | \lambda_2 \cdots | \lambda_k$ の構造を持つ。このとき $\Delta_C(t) = \lambda_1(t) \cdots \lambda_k(t)$.
基本群の生成元 $\rho_1, \ldots, \rho_s$ と関係式 $R_1(\rho), \ldots, R_\nu(\rho)$ が与えられたら、Fox calculus を 使って計算する方法が実際的である。
Alexander 多項式 は位相不変なので、異なる Alexander 多項式 をもてば、補空間が位相同型でないことになる。 但し
$(C, C')$：位相同型 $\Rightarrow \pi_1(\mathbf{P}^2 - C) \cong \pi_1(\mathbf{P}^2 - C') \Rightarrow \Delta_C(t) = \Delta_{C'}(t)$ だが逆は正しくない。
定義：$\Delta_C(t) = \Delta_{C'}(t)$ で $\mathbf{P}^2 - C \not\cong \mathbf{P}^2 - C'$ なとき、Alexander-同値 Zariski 対という。
Alexander 多項式の幾何的意味はつぎで与えられる。$p_m : X_m \to \mathbf{P}^2$ を上の無限被覆を $t^m$ で割ってそれを正規かして、特異点を解消したものとする。

**Theorem 2.1.** [Li1] *Betti* 数 $b_1(X_m)$ は $\sum_i \alpha_i$, ここで $\alpha_i$ は $\lambda_i(t) = 0$ の根で *1*の 相異なる $m$ 乗根の数。

注意：$\Delta_C(t) = 0$ が重根をもたなければ、$b_1(X_m)$ は $\Delta_C(t) = 0$ の m 乗根の数。

### 2.1. Alexander 多項式の計算方法.
Fox Calculus: $F_m$ を $X_1, \ldots, X_m$ を生成元にもつ自由群とする。$\mathbf{C}F_m$ を $\mathbf{C}$ 係数の群環とする。Fox derivation $\frac{\partial}{\partial X_j} : \mathbf{C}F_m \to \mathbf{C}F_m$ は次で特徴づけられる。

$$\frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial X_j} uv = \frac{\partial X_i}{\partial u} + u \frac{\partial X_i}{\partial v}, \quad u, v \in \mathbf{C}F_m$$

今 $\psi : F_m \to \pi_1(\mathbf{C}^2 - C)$ を全射として、核が有限この 単項式 $R_1, \dots, R_s$ で生成されたとする。$\xi : \pi_1(\mathbf{C}^2 - C) \to H_1(\mathbf{C}^2 - C)$ を Hurewicz 写像として、それを群環への環の写像に拡大。$\phi : \mathbf{C}F_m \to \mathbf{C}[t, t^{-1}]$ を上の写像を合成して得られる、準同型写像とする。$m \times s$ 行列 $(\phi(\frac{\partial X_i}{\partial X_j}))$ の $s \times s$ 小行列式たちの最大公約式が Alexander 多項式 $\Delta_C(t)$ を与える。

## 3. Covering Transformation

$C = \{f(x, y) = 0\}$ を与えられた、曲線とし、$L_\infty$ を無限遠直線とする。$L_\infty$ が $C$ と可換とは

$$1 \to \mathbf{Z} \to \pi_1(\mathbf{C}^2 - C) \to \pi_1(\mathbf{P}^2 - C) \to 1$$

がセントラルな完全系列となるときをいう。

**Theorem 3.1.** $L_\infty$ が $C$ と可換とし、$x = 0, y = 0$ が $C$ と横断的に交わるとする。曲線 $f(x^m, y) = 0$, $f(x^m, y^m) = 0$ を $\mathcal{C}_m(C)$, $\mathcal{C}_{m,m}(C)$ で表す。このとき、

*(1)* $\pi_1(\mathbf{C}^2 - \mathcal{C}_m(C)) \cong \pi_1(\mathbf{C}^2 - C)$ で $L_\infty$ は $C$ と可換。

*(2)* $\deg(f, x^m, y) = m \deg f(x, y)$ のときは

$$1 \to \mathbf{Z}_m \to \pi_1(\mathbf{P}^2 - \mathcal{C}_m(C)) \to \pi_1(\mathbf{P}^2 - C) \to 1$$

が完全系列。$\deg f(x^m, y) = \deg f(x, y)$ の時は基本群は同型のままである。

*(3)* 特に $L_\infty$ が一般的なときに、*(1)* を 2 かい適用すれば、$\pi_1(\mathbf{C}^2 - \mathcal{C}_{m,m}(C)) \cong \pi_1(\mathbf{C}^2 - C)$ で

$$1 \to \mathbf{Z}_m \to \pi_1(\mathbf{P}^2 - \mathcal{C}_{m,m}(C)) \to \pi_1(\mathbf{P}^2 - C) \to 1$$

が完全系列。$\mathcal{C}_{m,m}(C), \mathcal{C}_m(C), C$ の *Alexander* 多項式は一致する。

$\mathcal{C}_{m,m}(C), \mathcal{C}_m(C)$ を $C$ の $C$ の一般 m-巡回被覆、一般 (m,m)-巡回被覆という。

## 4. Cuspidal Sextics

**4.1. 自己双対モジュライ.** $\Sigma = \{sA_2 + tA_1\}$ とし、$\mathcal{M}((s, t); n)$ を 次数 $n$ の既約曲線で $s$ 個のカスプと $t$ 個の $A_1$ を持っている曲線のモジュライ空間とする。

定義： $\mathcal{M}((s, t); n)$ が自己双対とは一般的な $C \in \mathcal{M}((s, t); n)$ に対して、$C^* \in \mathcal{M}((s, t); n)$ なるときをいう。$C$ が自己双対曲線とは適当な $A \in \mathrm{PSL}(3, \mathbf{C})$ で $C^* = C^A$ が成立すること。Flex 公式によって、

$$\mathcal{M}((s, t); n) : \text{自己双対} \iff 3s + 2t = n^2 - 2n$$

例：$\mathcal{M}((0, 0); 2), \mathcal{M}((1, 0); 3)$, $\mathcal{M}((2, 1); 4)$, $\mathcal{M}((5, 0); 5)$, $\mathcal{M}((6, 3); 6)$, $\mathcal{M}((8, 0); 6)$.

**4.2. モジュライ空間 $\mathcal{M}(6A_2 + 3A_1; 6)$ の幾何学.** $\Sigma = \{3\beta_{2,2}, 6\beta_{2,3}\}$ とし, $\mathcal{M} := \mathcal{M}(6; \Sigma)$ とおく。簡単な計算で $g(C) = 1, \forall C \in \mathcal{M}$ で $C^*$ の次数も 6 で ($C$ が一般的なら)$C^* \in \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$ の曲線は Flexes の退化によって、つぎの 4 個が考えられる。(0) 6 flexes of order 1, (i) 4 flexes of order 1 and one flex of order 2, (ii) 2 flexes of order 1 and 2 flexes of order 2, (iii) 3 flexes of order 2 and (iv) 3 flexes of order 1 and one flex of order 3.

が考えられる。(iv) はトーラスタイプでは存在しない。これらの (i) $\sim$ (iv) の双対曲線はそれぞれ (1) $\Sigma_1 = \{2\beta_{2,2}, 4\beta_{2,3}, \beta_{3,4}\}$ and let $\mathcal{N}_1 := \mathcal{M}(6; \Sigma_1)$.

(2) Let $\Sigma_2 = \{\beta_{2,2}, 2\beta_{2,3}, 2\beta_{3,4}\}$ and $\mathcal{N}_2 := \mathcal{M}(6; \Sigma_2)$.
(3) Let $\Sigma_3 = \{3\beta_{3,4}\}$ and let $\mathcal{N}_3 := \mathcal{M}(6; \Sigma_3)$.
(4) Finally let $\Sigma_4 = \{\beta_{4,5}, 3\beta_{2,3}\}$ and let $\mathcal{N}_4 = \mathcal{M}(6; \Sigma_4)$.

これらはすべて $g = 1$ なる曲線の族からなる。$\mathcal{T}$ を (2,3)-torus curves of degree 6 とし、and of type (2,3). $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$, $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{T}$ and $\mathcal{N}_i \cap \mathcal{T}$ をそれぞれ $\mathcal{M}_{torus}, \mathcal{M}_{i,torus}, \mathcal{N}_{i,torus}$ で表す。Non-torus 曲線の moduli を $\mathcal{M}_{gen}, \mathcal{M}_{i,gen}, \mathcal{N}_{i,gen}$ で表す。

**Theorem 4.1.** *1.* $\widehat{\mathcal{M}} := \mathcal{M}' \cup_{i=1}^4 \mathcal{M}_i \cup_{i=1}^4 \mathcal{N}_i'$ は双対操作で不変。さらに トーラスタイプは双対操作で変わらない。$\mathcal{M}_\alpha'^{\,*} = \mathcal{M}_\alpha'$, $\mathcal{N}_{i,\alpha}'^{\,*} = \mathcal{M}_{i,\alpha}$ *and* $\mathcal{M}_{i,\alpha}^{\,*} = \mathcal{N}_{i,\alpha}'$ *for* $i = 1, \ldots, 4$ *and* $\alpha$*=torus or gen.*

*2.* (Stratification)$\mathcal{M}_{torus} = \mathcal{M}'_{torus} \cup_{i=1}^3 \mathcal{M}_{i,torus}$ *and* $\mathcal{M}_{gen} = \mathcal{M}'_{gen} \cup_{i=1}^4 \mathcal{M}_{i,gen}$. *Thus* $\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_{4,gen}$ *and* $\mathcal{N}_4 = \mathcal{N}_{4,gen}$. $\mathcal{M}'_{torus}, \mathcal{M}_{i,torus}, \mathcal{N}_{i,torus}$, $i = 1, 2, 3$、$\mathcal{N}_{3,gen}$ は既約。

$$\overline{\mathcal{M}'_{torus}} \supset \overline{\mathcal{M}_{1,torus}} \supset \overline{\mathcal{M}_{2,torus}} \supset \mathcal{M}_{3,torus}, \quad \overline{\mathcal{M}'_{torus}} \supset \overline{\mathcal{N}'_{1,torus}} \supset \overline{\mathcal{N}'_{2,torus}} \supset \mathcal{N}'_{3,torus}$$

*3.* (Alexander polynomial) *For* $C \in \widehat{\mathcal{M}}_{torus}$*, the Alexander polynomial* $\Delta_C(t)$ *is given by* $t^2-t+1$ ([Li1],[D]). *For non-torus curve* $C \in \widehat{\mathcal{M}}_{gen}$*, it is given by 1.*

*4.* (Fundamental groups) $\pi_1(\mathbf{P}^2 - C) \cong \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_3$ *or* $\pi_1(\mathbf{P}^2 - C) \cong \mathbf{Z}_6$ *according to* $C \in \widehat{\mathcal{M}}_{torus}$ *or* $C \in \mathcal{M}_{3,gen}$ *respectively.*

4.3. **Moduli space $\mathcal{M}_{torus}$.** $O = (0,0), A = (1,1), B = (1,-1)$ に $A_1$ をもつトーラスタイプの6次曲線のモジュライ $\mathcal{M}_{torus}$ は $f(x,y) = f_2(x,y)^3 + f_3(x,y)^2$ で

$f_2(x,y) = y^2 + y(a_{1,0} + a_{1,1}x) + a_{0,0} + a_{0,1}x + a_{0,2}x^2$

$f_3(x,y) = b_{3,0}y^3 + y^2(b_{2,0} + b_{2,1}x) + y(b_{1,0} + b_{1,1}x + b_{1,2}x^2) + b_{0,0} + b_{0,1}x + b_{0,2}x^2 + b_{0,3}x^3$

とおくと係数は

$$a_{0,0} = -t_0^2,\ a_{0,1} = -1 - \tfrac{1}{2}t_1^2 - \tfrac{1}{2}t_2^2 + t_0^2 - a_{0,2},\ a_{1,1} = -a_{1,0} - \tfrac{1}{2}t_1^2 + \tfrac{1}{2}t_2^2,\ b_{0,0} = t_0^3$$
$$b_{0,1} = -\tfrac{3}{2}t_0(-1 - \tfrac{1}{2}t_1 - \tfrac{1}{2}t_2 + t_0 - a_{0,2}),\ b_{1,0} = -\tfrac{3}{2}t_0a_{1,0},\quad b_{0,2} = b_{2,1} + \tfrac{3}{2}t_2 - 3t_0 + \tfrac{3}{2}t_1$$
$$-\tfrac{3}{2}t_0a_{1,0} + \tfrac{15}{16}t_1^3 - 3t_0a_{0,2} - \tfrac{9}{4}t_0t_1^2 + \tfrac{3}{4}t_1t_0^2 + \tfrac{3}{4}t_1a_{0,2} + \tfrac{3}{4}t_1a_{1,0} + \tfrac{3}{2}t_1(-a_{1,0} - \tfrac{1}{2}t_1^2 + \tfrac{1}{2}t_2^2)$$
$$-\tfrac{3}{2}t_0(-a_{1,0} - \tfrac{1}{2}t_1^2 + \tfrac{1}{2}t_2^2) + \tfrac{3}{16}t_2 - \tfrac{3}{16}t_1t_2 - \tfrac{3}{4}t_0t_2^2 + \tfrac{3}{4}t_2t_0^2 + \tfrac{3}{4}t_2a_{0,2} + \tfrac{3}{4}t_2a_{1,0} + \tfrac{9}{16}t_2t_1^2,$$

$$b_{0,3} = \tfrac{1}{8}t_2^2 - \tfrac{3}{8}t_1t_2^2 + \tfrac{3}{4}t_0t_2^2 - \tfrac{3}{4}t_2t_0^2 - \tfrac{3}{4}t_2a_{0,2} - \tfrac{3}{4}t_2a_{1,0} - \tfrac{3}{4}t_2 - \tfrac{3}{4}t_1t_0^2 - \tfrac{3}{4}t_1a_{0,2} + \tfrac{3}{4}t_1a_{1,0}$$
$$+\tfrac{3}{2}t_0a_{0,2} + \tfrac{1}{2}t_0^3 - \tfrac{3}{8}t_2t_1^2 + \tfrac{1}{8}t_1^3 - \tfrac{3}{4}t_1 - b_{2,1} + \tfrac{3}{4}t_0t_1^2 + \tfrac{3}{2}t_0,$$
$$b_{1,1} = -\tfrac{3}{4}t_2 + \tfrac{3}{4}t_1 + \tfrac{3}{2}t_0a_{1,0} + \tfrac{3}{8}t_1^3 - \tfrac{3}{4}t_0t_1^2 + \tfrac{3}{4}t_1t_0^2 + \tfrac{3}{4}t_1a_{0,2} - \tfrac{3}{4}t_1a_{1,0}$$
$$-\tfrac{3}{2}t_0(-a_{1,0} - \tfrac{1}{2}t_1^2 + \tfrac{1}{2}t_2^2) - \tfrac{3}{8}t_2^3 + \tfrac{3}{8}t_1t_2^2 + \tfrac{3}{4}t_0t_2^2 - \tfrac{3}{4}t_2t_0^2 - \tfrac{3}{4}t_2a_{0,2} - \tfrac{3}{4}t_2a_{1,0} - \tfrac{3}{8}t_2t_1^2,$$
$$b_{1,2} = -\tfrac{9}{16}t_1^3 + \tfrac{3}{4}t_0t_1^2 - \tfrac{3}{4}t_1t_0^2 - \tfrac{3}{4}t_1a_{0,2} - \tfrac{3}{4}t_1a_{1,0} - \tfrac{3}{2}t_1(-a_{1,0} - \tfrac{1}{2}t_1^2 + \tfrac{1}{2}t_2^2)$$
$$+\tfrac{3}{2}t_0(-a_{1,0} - \tfrac{1}{2}t_1^2 + \tfrac{1}{2}t_2^2) - \tfrac{3}{16}t_2^3 + \tfrac{9}{16}t_1t_2^2 - \tfrac{3}{4}t_0t_2^2 + \tfrac{3}{4}t_2t_0^2 + \tfrac{3}{4}t_2a_{0,2} + \tfrac{3}{4}t_2a_{1,0} + \tfrac{3}{16}t_2t_1^2,$$
$$b_{2,0} = \tfrac{3}{16}t_2^3 - \tfrac{3}{16}t_1t_2^2 - \tfrac{3}{16}t_2t_1^2 - \tfrac{3}{4}t_2 + \tfrac{3}{16}t_1^3 - \tfrac{3}{4}t_1 - b_{2,1},$$
$$b_{3,0} = \tfrac{1}{16}t_2^3 - \tfrac{3}{16}t_1t_2^2 + \tfrac{3}{16}t_2t_1^2 + \tfrac{3}{4}t_2 - \tfrac{1}{16}t_1^3 - \tfrac{3}{4}t_1$$

と与えられる。この表示の良いところは、$\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ がそれぞれ、$t_0 = 0$, $t_1 = t_2 = 0$, $t_0 = t_1 = t_3 = 0$ と代入して得られることである。

$\mathcal{M}_{gen}$ の既約性は分からないがつぎが得られる。

**Theorem 4.2.** *(Moduli space $\mathcal{N}_3$).* $\mathcal{N}_3$ は2つの既約成分を持ち、一つはトーラスタイプ、もう一つは一般型である。$C \in \mathcal{N}_{3,torus}$ または $C \in \mathcal{N}_{3,gen}$ に応じて、$\pi_1(\mathbf{P}^2 - C) \cong \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_3$ または $\cong \mathbf{Z}_6$

4.4. 応用. $C_1 \in \mathcal{N}_{3,torus}, C_2 \in \mathcal{N}_{3,gen}$ をとる。その generic な（2、2）一被覆 $C_i' := \mathcal{C}_{2,2}(C_i)$ をとると、ともに１２次の曲線で、１２個の（3、4）ーカスプをもつ。既に見たように $\pi_1(\mathbf{P}^2 - C_1')$ は $\mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_3$ の $\mathbf{Z}_2$ セントラル拡張、$\pi_1(\mathbf{P}^2 - C_2')$ は $\mathbf{Z}_{12}$. 一方 $C_3$ を一般的な３、４次の多項式 $f_3, f_4$ を使って、$f_3^4 - f_4^3 = 0$ で定義するとやはり１２個の（3、4）ーカスプをもつ。[O1] によって、$\pi_1(\mathbf{P}^2 - C_3) \cong \mathbf{Z}_3 * \mathbf{Z}_4$. $(C_1', C_2', C_3)$ は Zariski triple の例を与える。Alexander 多項式はそれぞれ、$t^2 - t + 1, 1, (t^2 - t + 1)(t^4 - t^2 + 1)$ で与えられる。

## 5. Alexander 同値な Zariski 対の構成

12 個の（2、3）カスプを持つ８次曲線のモジュライ $\mathcal{M}((12,0);8)$ の中に Alexander 同値な Zariski 対を見付けよう。一つは３個のカスプを持つ４次曲線 $Z_3$ から一般的な（2、2）被覆をとって、$C_1 := \mathcal{C}_{2,2}(Z_3)$ として与えられる。具体的な式が欲しければ、例えば $A_1$ を一個もつ３次の曲線、$Z_3 := \{y^3 + x^3 + x * y = 0\}$ から出発して、双対曲線をとる。$Z_4 := \{g(x,y) = -4y^3 - y^2x^2 - 18xy + 27 - 4x^3 = 0\}$ がその定義式である。実際 $g(x,y)$ の判別式は $-16(x+3)^3(x^2 - 3x + 9)^3$ で与えられ、各根のうえに一個ずつカスプがあることがチェックできる。

$C_1$ を $\mathcal{C}_{2,2}(Z_4)$ と置くと、$\pi_1(\mathbf{P}^2 - C_1)$ は位数２４の非可換な群で Alexander 多項式は自明である。

もう一つの８次曲線 $C_2$ は $\pi_1(\mathbf{P}^2 - C_2)$ が可換、従って $\cong \mathbf{Z}_8$ なるものを作りたい。そのために 既約モジュライ $\mathcal{M}((2,0);4)$ から出発する。flex の公式より $i = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 6$ この変曲点を持つ。その中の２つの変曲点を選んで、その接線が $x = 0, y = 0$ となるように線形座標変換をする。この多項式を $f(x,y)$ としよう。この４次曲線を $C_2$ とする。カスぷを $P_1, P_2$, x 軸の変曲点を $A_1$, y 軸の変曲点を $A_2$ とする。

$C_3$ を $f(x^2, y) = 0$ で定義すると 最初のカスプから４このカスプ $P_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}, P_{2,2}$, 更に $A_1$ はカスプに変わる。更に y 軸に変曲点が２個できている。

$C_4$ を $f(x^2, y^2) = 0$ で定義すると 変曲点は全てカスプに変わって、全部で１２個のカスプを持っていることがわかる。

主張： $\pi_1(\mathbf{P}^2 - C_4) = \mathbf{Z}_4$.

注意：$C_1$ と $C_4$ にはともに $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ が作用しているが $C_1$ のほうは、１２個のカスプのうえに自由に作用している。一方 $C_4$ のほうには８個のカスプ（$C_2$ のカスプから来ている）のうえには自由に作用しているが、変曲点に由来するカスプにはアイソトロピーが $\mathbf{Z}_2$ になっている。実際に主張を証明するにはいい方程式を見付けてきて、実際に計算する。まず タイプ（1、2；4）の４次曲線 $D = \{g(x,y) = 0\}$, $g(x,y) = (y - \frac{3}{2}(x-2)^2)^2 + y - 2(x-2)^3 + \frac{3}{4}(x-2)^4$ から出発する。$D$ はカスプを一個と x 軸に変曲点で接線が $y = 0$ なるものがある。$C_2$ を対象２次被覆 $\phi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, $\phi(x,y) = (x+y, xy)$ で引き上げた４次曲線が $C_2$ としてとれる。定義式は

$$f(x,y) := (xy - \frac{3}{2}(x+y-2)^2)^2 + xy - 2(x+y-2)^3 + \frac{3}{4}(x+y-2)^4 = 0$$

あとは Zariski のペンシルの方法でモノドロミーを計算する。

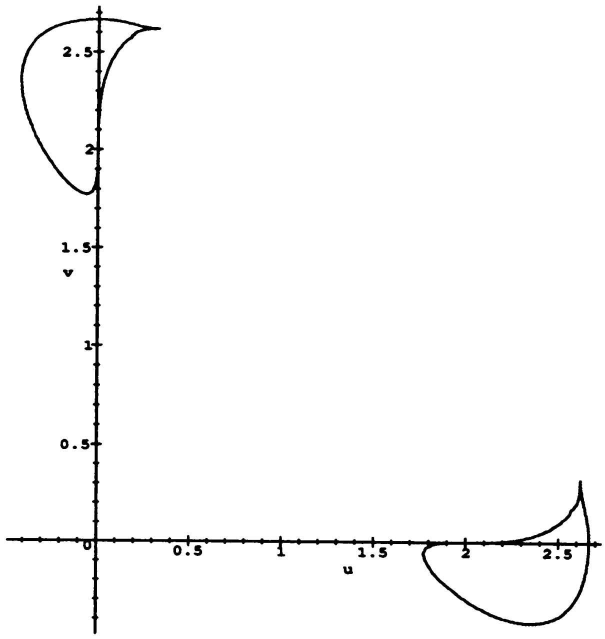


FIGURE 1. Graph of $C_1$

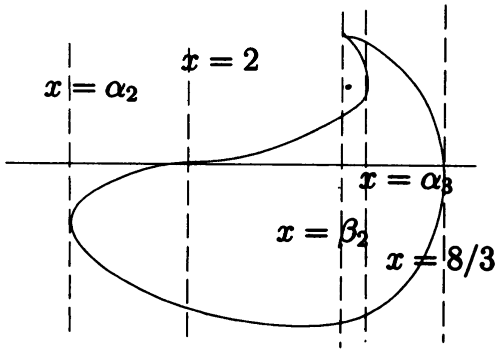


FIGURE 2. Local graph of $C_1$

5.1. **後記.** 以上は 1999 年の日本数学会のトポロジーの総合講演で話した原稿ですが、以後の進展を 2、3 述べます。

1。3 個の (3,4) カスプを持つ 6 次曲線は 2 次変換で自然に 3 次の曲線 (楕円曲線) になる。トーラスタイプなら **Q** 上で定義された族に、non-torus なら $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ 上で定義された族となり、これらは Mordell-Weil 捻れ群が位数 3 の元を持つ全ての普遍族を部分族として持つ。

Oka, M.: Elliptic curves from Sextics, to appear in J. Math. Soc¿ Japan, 2002

2. トーラスタイプの 6 次曲線

$$C : f_2(x,y)^3 + f_3(x,y)^2 = 0$$

が Tame であるとは特異点がすべて $f_2 = f_3 = 0$ の上にあるときをいう。そのような 6 次曲線に関しては特異点が $[C_{3,9}, 3A_2]$ となる例外を除いては全て

$$\pi_1(\mathbf{P}^2 - C) = \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_3$$

となることが示された。

Oka, M. and Phao, D.T.: Fundamental group of sextics of torus type, to appear in Trends in Singularities, Editors A. Libgober and M. Tibar, Birkhäuser, 2002

3. また Tame でないトーラス型の 6 次曲線の特異点は最近全て分類された。

Oka, M. and Pho, D.T.: Classification of sextics of torus type, math.AG/0201035

Oka,M.: Geometry of reduced sextics of torus type, math.AG/0203034

## References


[A1] E. Artal, *Sur les couples des Zariski*, J. Algebraic Geometry, vol 3 (1994), 223-247.

[A2] E. Artal and J. Carmona, *Zariski pairs, fundamental groups and Alexander polynomials*, J. Math. Soc. Japan, vol 50, no. 3, 521-543, 1998.

[B-K] E. Brieskorn and H. Knörrer, *Ebene Algebraische Kurven*, Birkhäuser (1981), Basel-Boston - Stuttgart.

[E] H. Esnault, *Fibre de Milnor d'un cône sur une courbe algébrique plane*, Invent. Math. 68 (1982), 477-496.

[F] R.H. Crowell and R.H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Co. (1963).

[D] A. Degtyarev, *Alexander polynomial of a curve of degree six*, J. Knot Theory and its Ramification, Vol. 3, No. 4, 439-454, 1994

[D-L] I. Dolgachev and A. Libgober, *On the fundamental group of the complement to a discriminant variety*, in: Algebraic Geometry, Lecture Note 862 (1980), 1-25, Springer, Berlin Heidelberg New York.

[G-H] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, 1978 A Wiley-Interscience Publication, New York-Chichester-Brisbane-Toronto.

[K1] Vik. S. Kulikov, *The Alexander polynomials of algebraic curves in* $\mathbf{C}^2$, Algebraic geometry and its applications, Vieweg, Braunschweig, 1994, 105-111

[K2] Vik. S. Kulikov, *On plane algebraic curves of positive Albanese dimension*, preprint.

[Le] D.T. LÊ, *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe*, Ann. Inst. Fourier, vol. 23,4 (1973), 261-270.

[L-O] D.T. Lê and M. Oka, *On the Resolution Complexity of Plane Curves*, Kodai J. Math. Vol. 18, 1995, 1-36

[Li1] A. Libgober, *Alexander invariants of plane algebraic curves*, Proceeding of Symposia in Pure Math., Vol. 40, (1983), 135-143.

[Li2] A. Libgober, *Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes*, Duke Math. J., vol. 49, no. 4 (1982), 833-851.

[M-K-S] W. Magnus, A. Karras and D. Solitar, *Combinatorial group theory*, Dover Publ. 2nd ed., 1976.

[O1] M. Oka, *Some plane curves whose complements have non-abelian fundamental groups*, Math. Ann., vol 218 (1975), 55-65.

[O2] M. Oka, *On the fundamental group of the complement of certain plane curves*, J. Math. Soc. Japan, vol 30 (1978), 579-597.

[O3] M. Oka, *Symmetric plane curves with nodes and cusps*, J. Math. Soc. Japan, vol 44, no. 3 (1992), 375-414.

[O4] M. Oka, *Two transforms of plane curves and their fundamental groups*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, vol 3 (1996), 399-443.

[O5] M. Oka, *Flex curves and their applications*, preprint 1997.

[O6] M. Oka, *Non-degenerate complete intersection singularity*, Hermann, Paris, 1997.

[O7] M. Oka, *A New Alexander-Equivalent Zariski Pair*, preprint 1998.

[N] M. Namba, *Geometry of projective algebraic curves*, Decker, New York, 1984

[R] R. Randell, *Milnor fibers and Alexander polynomials of plane curves*, Proceeding of Symposia in Pure Math., Vol. 40, (1983), part 2, 415-419.

[S] I. Shimada, *A note on Zariski pairs*, Compositio Math., no.104, 125-133, 1996

[T] H. Tokunaga, *(2,3) torus decompositions of plane sextics and their applications*, preprint, 1997.

[W1] R. Walker, *Algebraic curves*, Dover Publ. Inc., New York, 1949.

[W2] C.T.C. Wall, *Duality of singular plane curves*, J. London Math. Soc. (2) 50 (1994), 265-275.

[Z] O. Zariski, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. vol 51 (1929), 305-328.