数理解析研究所講究録 1267 巻 2002 年 66-69

Topic on Mixed Hodge fundamental groups

東京都立大　川原 行人 (Yukihito Kawahara)
Department of Mathematics,
Tokyo Metropolitan University

本稿は基本群上の混合 Hodge 構造 (MHS on π_1) のトピックの 1 つとして、複素射影空間内の超平面たちの補集合の場合について考察する. 詳しい内容は論文 [5] を参照されたい.

1 基本群上の混合 Hodge 構造 (MHS on π_1)

MHS on π_1 の一般論は Morgan [6], Hain [3] を参照されたい. ここでは、反復積分 (K.T.Chen) による Bar construction を用いた Hain の方法で考える.

複素数体上の代数多様体 M とある基点 b に対して、基本群の群環 $\mathbb{Z}\pi_1(M,x)$ を augmentation ideal J のべきで割った $\mathbb{Z}\pi_1(M,x)/J^{s+1}$ の双対空間は長さが s 以下で homotopy functional な反復積分の空間 $H^0(B_s(M),b)$ と同型となる. Bar construction から $H^0(B_s(M),b)$ に Hodge filtration と weight filtration が定義されて、$\mathbb{Z}\pi_1(V,x)/J^{s+1}$ に混合 Hodge 構造 (MHS on π_1) が誘導される. たとえば、1 次射影空間から n 点を抜いたものでは、偏極を込めて同型であることと双正則が同値となるので、これを超平面配置の補集合だと考え、一般化を試みる.

2 超平面配置と cross ratio

複素射影空間 $\mathbb{P}^N$ $(N \geqq 2)$ 内の有限個の超平面の集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ を超平面配置という. その補集合を $M = M(\mathcal{A})$ とし、基点 $b \in M(\mathcal{A})$ をとる. この pair $(\mathcal{A}, b)$ を点付き超平面配置と呼ぶことにする.

超平面配置 $\mathcal{A}$ の組合せを表すものとして、$\mathcal{A}$ の超平面たちの空でない交わりからなる集合 $L = L(\mathcal{A})$ を考え, L の要素で余次元 p のものからなる集合を $L_p = L_p(\mathcal{A})$ とする. $L = \cup_p L_p$ となる. また、L には逆包含関係による順序により半順序集合となる (組合せ論で poset と呼ばれる). 組合せ的に L は 最大元が同じランク (=余次元) を持つことで特徴付けられる ([7] 参照). 一方、L によってコホモロジー $H^i(M,\mathbb{Z})$

と同型な Orlik-Solomon 代数が構成できる ([7] 参照). 逆に、コホモロジーから L は一般に決定されないことに注意しておく. 2つの配置 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ が $\cup_{i\leq p}L_i$ が半順序集合の同型となるとき L_p 同値と呼ぶことにする.

一方、射影空間において、$X = H_1 \cap H_2 \cap H_3$ の余次元が2となる3つの超平面 H_1, H_2, H_3 とそれらの上にない基点 b に対して cross ratio $\lambda = \lambda(H_1, H_2, H_3, b)$ を次のように定義する. 双対射影空間上で、その超平面に対応する3点 H_1^*, H_2^*, H_3^* は直線 X^* 上にあり、基点に対応する超平面 b^* とその直線の交点 $X^* \cap b^*$ をとる. その射影直線上の4点の cross ratio $\lambda = [H_1^*, H_2^*, H_3^*, X^* \cap b^*]$ で定義する. そして、2つの点付き配置 $(\mathcal{A}, b)$ と $(\mathcal{A}', b')$ が L_2 同値であり、定義できる cross ratio すべてが等しいとき、cross ratio 同値と呼ぶことにする.

3 主定理

2つの点付き超平面配置 $(\mathcal{A}, b)$, $(\mathcal{A}', b')$ に対して、混合 Hodge 構造の同形を誘導し、$(J/J^2)^*$ 上の polarization を保つ環同形

$$\varphi : \mathbb{Z}\pi_1(M(\mathcal{A}), b)/J^3 \to \mathbb{Z}\pi_1(M(\mathcal{A}'), b')/J^3$$

が存在することと、$(\mathcal{A}, b)$ と $(\mathcal{A}', b')$ が cross ratio 同値であることが同等となる.

例 超平面配置が一般の位置にあるとき、cross ratio 同値である配置は超平面の枚数が等しい.

例 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の一般的な4点を結ぶことによってできる6本の直線の配置 $\mathcal{A}$ を考える. $\mathcal{A}$ が $xyz(x-y)(y-z)(z-x) = 0$ で定義されているとき、基点 $b = [x : y : z]$ に対して, 各4点 $[0:0:1], [0:1:0], [1:0:0], [1:1:1]$ に対応した cross ratio が

$$\lambda_{[001]} = \frac{x}{y}, \quad \lambda_{[010]} = \frac{z}{x}, \quad \lambda_{[100]} = \frac{y}{z}, \quad \lambda_{[111]} = \frac{x-y}{z-y}$$

となる. したがって、 polarized MHS on π_1 によって双正則であることを除いて $(\mathcal{A}, b)$ が定まることがわかる.

4 証明の outline

射影空間の超平面配置 $\mathcal{A}$ の補集合 $M = M(\mathcal{A})$ と基点 b に対して、混合 Hodge 構造の短完全列

$$0 \to H^1(M) \to Hom(J/J^3, \mathbb{Z}) \to K \to 0$$

が存在する．ここで、K は cup 積 $H^1 \otimes H^1 \to H^2$ の核であり、各射は反復積分で与えられる．混合 Hodge 構造の extension の理論 (Carlson [1]) を用いると、$H^1(M)$ は pure で重み 2 であることから、$Ext(K, H^1)$ を H^1 による K の extension の同型類の集合とすると群同型

$$\psi : Ext(K, H^1) \to Hom(K, H^1)_{\mathbf{C}}/Hom(K, H^1)_{\mathbf{Z}}$$

が存在する．そこで、H^1、K の基底を具体的にかき、対数形式の反復積分を計算することにより、$(J/J^3)^*$ の像 $\psi((J/J^3)^*)$ を計算していく．

アファイン空間の超平面配置として考え、各超平面の定義多項式による対数形式 $\omega_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} d\log(h_i)$ たちは 1 次コホモロジー H^1 の基底となる．余次元 2 の各交叉、すなわち L_2 の各要素に対して、コサイクル関係式が出てくる．超平面たちの番号付けを指定することによって、L_2 の各要素に対してそれを含む超平面たちの中で一番大きい番号のものを固定することにより、独立な関係式を抽出する．そして、超平面配置の理論から Möbius 関数をもちいて 2 次のコホモロジーの次元が計算でき、それらが、K の基底になることがわかる．

一方、複素平面上において $\omega_i = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \dfrac{dz}{z - z_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ とし、z_0 を基点とする z_1 を反時計回りにまわる十分小さいループを γ_1 とするとき、反復積分の実際の計算と性質から

$$\int_{\gamma_1} \{\omega_1\,\omega_2 + \omega_2\,\omega_3 + \omega_3\,\omega_1\} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log\left(\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_0 - z_3}\right)$$

となる．本質的にこの計算から $\psi((J/J^3)^*)$ の上の基底における係数は、超平面配置の cross ratio で表現される．したがって、cross ratio 同値であるならば MHS on π_1 は同型であることがわかる．また、cross ratio の考察から超平面たちの番号付け (基底の取り方) によらないことがわかる．

次に、Torelli 型の問題を考える．まず、1 次のコホモロジー $H^1(M)$ の自然な偏極を次のように考えることができる．Gysin 写像から、完全列 $0 \to H^1(M) \to H^0(\cup_i H_i)$ があり、$H^0(\cup_i H_i)$ は、Poincaré 双対性から $\oplus_i H_{2(N-1)}(H_i)$ と同型であり a_i を $H_{2(N-1)}(H_i)$ のホモロジー類とすれば、a_i^* たちが基底となる．それらによる pairing を考え、誘導される $H^1(M)$ の pairing を偏極とする．また、$H^1(M)$ の $\omega_{i,j} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} d\log(h_i/h_j)$ たちは A_n 型のルートシステムとなる．したがって、2 つの超平面配置に対して $H^1(M)$ の同型で偏極を保つものがあるとき、それはルートシステムの同型となるので、それは基底を基底に移す同型である．よって、$\mathbb{Z}\pi_1(M, b)/J^3$ の環同型があり、$(J/J^2)^* = H^1(M)$ の偏極を保つとき、超平面配置は L_2 同値となる．このことから主定理を得る．

ちなみに証明の中から、2つの超平面配置 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ が、1次コホモロジーの偏極を保つ補集合上のコホモロジーの同型があることと L 同値であることが同等になることがわかる. 一般にはコホモロジーが同型となるが L が同型とならない例がある ([7] 参照).

参考文献

[1] J. A. Carlson, Extensions of mixed Hodge structures, *Journées de Géometrie Algébrique d'Angers* (A. Beauville, ed.), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, (1980), 77–105.

[2] K. T. Chen, Algebras of iterated path integrals and fundamental groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **156** (1971), 359–379.

[3] R. M. Hain, The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group, *Proc. Symp. Pure Math.* **46** (1987), 247–282.

[4] Y. Kawahara, The mixed Hodge structure on the fundamental group of the fiber type 2-arrangement, *Nagoya Math. J.* **147** (1997), 113– 136.

[5] Y. Kawahara, The mixed Hodge structure on the fundamental group of a complement of hyperplanes, *Arrangement in Boston: A conference on hyperplane arrangements, Topology and its Applications*, **118** (2002), 131–145.

[6] J. W. Morgan, The algebraic topology of smooth algebraic varieties, *Publ. Math. I. H. E. S.* **48** (1978), 137–204.

[7] P. Orlik and H. Terao, Arrangements of Hyperplanes, Springer-Verlag, (1992).