数理解析研究所講究録 1270 巻 2002 年 11-23

調和的 MAGNUS 展開
HARMONIC MAGNUS EXPANSIONS

河澄響矢 (東大数理)
NARIYA KAWAZUMI
(UNIV. OF TOKYO, DEPT. OF MATH. SCI.)

摘要: 広い意味での Magnus 展開を定義し、自由群の自己同型群全体の上で Johnson 準同型を考える。Riemann 面 C とその上の点 P_0 および点 P_0 での 0 でない接 vector v の三つ組 (C, P_0, v) から canonical に得られる(広い意味での) Magnus 展開を導入する。これを調和的 Magnus 展開とよぶ。調和的 Magnus 展開の擬等角第一変分を具体的な二次微分として与える。

目次:

はじめに.

知られているように種数 $g \geq 2$ の Riemann 面の moduli 空間 $\mathbb{M}_g$ の複素係数コホモロジーと写像類群の群 $\mathcal{M}_g$ の複素係数コホモロジーは自然に同型です:

$$H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{C}) \cong H^*(\mathcal{M}_g; \mathbb{C}).$$

森田 Mumford 類は Riemann 面の moduli 空間の重要なコホモロジー類ですが、これを moduli 空間上の具体的な微分形式として捉えたいということが私の研究のテーマの一つです。森田 Mumford 類 [Mo1] [Mu] を研究する上で Johnson 準同型は重要な役割を果たします。それは森田 [Mo2] [Mo4] 、森田-河澄 [KM1][KM2] 、Hain-Looijenga [HL] などによって明らかにされてきました。

調和的 Magnus 展開の第一変分は (理屈の上では) 森田 Mumford 類およびその高次の関係式の微分形式表示を統一的に与えるものになっています。通常、Magnus 展開とは Fox の自由微分を用いて定義される自由群のある種の非可換代数への埋め込みのことをいいます [Ma]. $g \geq 1$ とします。種数 g の compact Riemann 面 C とその上の相異なる 2 点 P_0, P_1 があたえられたとき、基本群 $\pi_1(C - \{P_0\}, P_1)$ は階数 $2g$ の自由群です。通常の Magnus 展開と Johnson 準同型の関係は北野 [Ki] によって既に解明されています。しかしここで我々は Magnus 展開の概念を拡張し、北野とはやや異なる直接的なアプローチをとることにします。それによって、中村-Garoufalidis [NG] が提唱し森田-河澄 [KM2] が証明した Johnson 準同型の IH 関係式の簡単な別証が得られます。また、Johnson 準同型への複素解析的アプローチが可能になり、森田 Mumford 類およびその高次関係式を表示する微分形式が得られます。

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Johnson 準同型への複素解析的アプローチの鍵が表題の「調和的 Magnus 展開」というわけです。このノートでは、(広い意味での) Magnus 展開と Johnson 準同型の関係を概観したあと、「調和的 Magnus 展開」を導入し、その擬等角第一変分を具体的な二次微分として与えます。

調和的 Magnus 展開の構成には Chen の反復積分 [C] を開区間上で実行したものを用います。Hain による 代数多様体の基本群の混合 Hodge 構造の理論 [H] をもちいると、相異なる二つの基点 P_0, P_1 をもつ Riemann 面 C について基本群 $\pi_1(C-\{P_0\}, P_1)$ に混合 Hodge 構造が入ります。これについては Kaenders の研究 [Kae] があります。調和的 Magnus 展開は、概念的には、この混合 Hodge 構造について P_1 を接 vector v の方向で P_0 に近付けた極限と考えられますが、厳密には極限ではありません。z を P_0 を中心とする C の複素座標とするとき、混合 Hodge 構造は対数微分形式 dz/z のみを考えるわけですが、その場合、極限は収束しません。広義積分を収束させるためには対数微分形式の複素共役 $d\bar{z}/\bar{z}$ も加味する必要があるのです。

調和的 Magnus 展開は、三つ組 (C, P_0, v) の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_{g,1}$ 上の函数とみなすことができます。このノートでは調和的 Magnus 展開の擬等角第一変分を与えます。ご存じのとおり Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_{g,1}$ の三つ組 (C, P_0, v) における余接空間は、基点 P_0 のみで高々二位の極を持つ C 上の有理型二次微分全体の空間に他なりません。したがって、調和的 Magnus 展開の第一変分も $\widehat{T}$ に値をもつ C 上の有理型二次微分として与えられることになります(定理 4.1)。この二次微分は写像類群の代数的構造の複素解析的手法による研究の鍵となるのではないか？と思っています。

1. Magnus 展開と Johnson 準同型.

簡単のため複素数体 $\mathbb{C}$ 上で議論するが、ほとんどすべての議論は単位可換環上で成り立つ。tensor 積 $\otimes$ はとくに断らない限り複素数体 $\mathbb{C}$ 上のもの $\otimes_{\mathbb{C}}$ を考える。幾つか記号を固定させておく。この §では $n \geq 2$ とする。F_n を n 個の文字 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の生成する階数 n の自由群とする。H を群 F_n の複素係数 1-次元ホモロジー群、つまり、群 F_n の可換化 ${F_n}^{\mathrm{abel}}$ に複素数体 $\mathbb{C}$ を tensor したものとする:

$$H := H_1(F_n; \mathbb{C}) = {F_n}^{\mathrm{abel}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}.$$

文字 x_i の定めるホモロジー類 $[x_i]$ を $X_i \in H$ と表す。文字 X_i に関する非可換形式的巾級数環 $\mathbb{C}\langle\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle\rangle$ つまり H の完備 tensor 積を $\widehat{T}$ と表す:

$$\widehat{T} := \prod\nolimits_{p=0}^{\infty} H^{\otimes p}.$$

非可換代数 $\widehat{T}$ には $m \geq 0$ について

$$\widehat{T}_m := \prod\nolimits_{m \leq p} H^{\otimes p} \ \subset \ \widehat{T}$$

によって定義される両側 ideals の 減少 filtration $(\widehat{T}_*)$ が入っている。$u \in \widehat{T}_1$ について形式的巾級数 $(1+u)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty}(-u)^p \in \widehat{T}$ を考えることにより、$1+\widehat{T}_1$ が $\widehat{T}$ の乗法群の部分群であることがわかる。(広い意味での) Magnus 展開を定義しよう。

定義. 写像 $\theta : F_n \to 1 + \widehat{T}_1$ が <u>*Magnus* 展開</u>であるとは、これが群の準同型であって、各 i, $1 \leq i \leq n$, について $\theta(x_i) \equiv 1 + X_i \pmod{\widehat{T}_2}$ が成り立つことをいう。

このような θ の存在は自由群 F_n の普遍性から分かる。例えば $\theta(x_i) = 1 + X_i$ を充たすものが、Fox の自由微分を用いた通常の Magnus 展開である。

任意の Magnus 展開 θ は単射であり、自由群の完備群環 $\widehat{\mathbb{C}[F_n]}$ から $\widehat{T}$ の上への環同型

$$\theta_* : \widehat{\mathbb{C}[F_n]} \xrightarrow{\cong} \widehat{T}$$

を誘導する。ここで完備群環 $\widehat{\mathbb{C}[F_n]}$ は、群環 $\mathbb{C}[F_n]$ の添加 ideal に関する完備化を指す:

$$\widehat{\mathbb{C}[F_n]} := \varprojlim_{m\to\infty} \left(\mathbb{C}[F_n]/(\text{添加 ideal})^m\right).$$

さらにこの同型は添加 ideal の定める $\widehat{\mathbb{C}[F_n]}$ の 減少 filtration をぴったり減少 filtration $(\widehat{T}_*)$ に写している。

そこで自由群 F_n の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ の $\widehat{\mathbb{C}[F_n]}$ への自然な作用を考えよう。可換化の定める準同型 $\mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{GL}(H)$ は全射であることが知られている。もちろん群 $\mathrm{GL}(H)$ は自然なやり方で $\widehat{T}$ に環同型として作用している。しかし、図式

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}[F_n]} & \xrightarrow{\cong} & \widehat{T} \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ \mathrm{Aut}(F_n) & \twoheadrightarrow & \mathrm{GL}(H) \end{array}$$

は同変 (equivariant) ではない。どれくらい同変ではないかを定量的に測るものが Johnson 準同型なのである。

議論を先に進めるために、簡単にわかる事実を引用する。$\mathrm{Aut}(F_n)$ の $\widehat{\mathbb{C}[F_n]}$ への作用は明らかに添加 ideal の定める $\widehat{\mathbb{C}[F_n]}$ の 減少 filtration を保っている。したがって、Magnus 展開 θ を通した $\mathrm{Aut}(F_n)$ の $\widehat{T}$ への作用は filtration $(\widehat{T}_*)$ を保つ。代数 $\widehat{T}$ の filtration $(\widehat{T}_*)$ を保つ自己同型 $S : \widehat{T} \to \widehat{T}$, $S(\widehat{T}_m) \subset \widehat{T}_m$, 全体のなす群を $\mathrm{Aut}(\widehat{T}, (\widehat{T}_*))$ と表す。

補題 1.1. 群 $\mathrm{Aut}(\widehat{T}, (\widehat{T}_*))$ は集合として直積集合 $\mathrm{Hom}(H, \widehat{T}_2) \times \mathrm{GL}(H)$ に等しい:

$$\mathrm{Hom}(H, \widehat{T}_2) \times \mathrm{GL}(H) \cong \mathrm{Aut}(\widehat{T}, (\widehat{T}_*)).$$

ここで、$(u, A) \in \mathrm{Hom}(H, \widehat{T}_2) \times \mathrm{GL}(H)$, $u = u_1 + u_2 + \cdots$, $u_i \in \mathrm{Hom}(H, H^{\otimes(i+1)})$, の $a \in H$ への作用を $(u, A)a := Aa + u_1(Aa) + u_2(Aa) + \cdots$ によって定義する。これを $\widehat{T}$ 全体で定義された環準同型となるように拡張すると $\mathrm{Aut}(\widehat{T}, (\widehat{T}_*))$ の元が定まる。この対応が全単射を定めるのである。

証明は初等的なので省略する。

この同型によって集合 $\mathrm{Hom}(H, \widehat{T}_2) \times \mathrm{GL}(H)$ には群構造が入る。$(u, A), (v, B) \in \mathrm{Hom}(H, \widehat{T}_2) \times \mathrm{GL}(H)$ について $(u, A)(v, B) = (w, AB)$ とすると $w = w_1 + w_2 + \cdots \in \mathrm{Hom}(H, \widehat{T}_2)$ の最初の項は次のようになる:

$$w_1 = u_1 + Av_1, \tag{1.1}$$

$$w_2 = u_2 + (u_1 \otimes 1 + 1 \otimes u_1)Av_1 + Av_2. \tag{1.2}$$

ただし、$Av_1 = (A \otimes A) \circ v_1 \circ A^{-1}$, $Av_2 = (A \otimes A \otimes A) \circ v_2 \circ A^{-1}$ である。

Magnus 展開 θ を一つ固定する。以上の議論から次の写像の列を考えることが出来る:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Aut}(F_n) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\widehat{T}, (\widehat{T}_*)) &= \mathrm{Hom}(H, \widehat{T}_2) \times \mathrm{GL}(H) \\
&\overset{\text{1st proj.}}{\to} \mathrm{Hom}(H, \widehat{T}_2) = \prod_{p\geq 1} H^* \otimes H^{\otimes(p+1)} \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

ここで $H^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H, \mathbb{C})$ である。一番左側の写像は θ の誘導する準同型で、$\theta : F_n \to \widehat{T}$ が単射であることからこの準同型も単射となる。第一射影 $\mathrm{Hom}(H, \widehat{T}_2) \times \mathrm{GL}(H) \to \mathrm{Hom}(H, \widehat{T}_2)$ は準同型ではない。したがって (1.3) を全て合成することによって得られる写像は準同型ではない。しかしながらこれまでの経緯を考えて、この合成写像の第 p 成分

$$\tau_p : \mathrm{Aut}(F_n) \to H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}$$

を第 p Johnson 準同型とよぶ。$\mathrm{Aut}(F_n)$ を適当な部分群に制限すれば τ_p は準同型であり、通常の第 p Johnson 準同型に一致する。

公式 (1.1) および (1.2) から直ちに τ_1 および τ_2 についての基本的な関係式が導かれる。$\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ とする。$|\varphi| \in \mathrm{GL}(H)$ によって φ が $H = H_1(F_n; \mathbb{C})$ に誘導する自己同型を表わす。まず、(1.1) により

$$d\tau_1(\varphi, \psi) = \tau_1(\varphi) - \tau_1(\varphi\psi) + |\varphi|\tau_1(\psi) = 0$$

となる。これは τ_1 が群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ の $H^* \otimes H^{\otimes 2}$ に値をもつ 1-cocycle であること

$$d\tau_1 = 0 \in C^2(\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes 2}) \qquad (1.4)$$

を意味する。ここで、$C^*(\mathrm{Aut}(F_n); M)$ は $\mathrm{Aut}(F_n)$-加群 M に値をもつ群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ の(正規化された) 標準 chain 複体 である。その cohomology 類 $[\tau_1] \in H^1(\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes 2})$ こそが拡大 Johnson 準同型 [Mo2] である。

次に (1.2) から

$$\tau_2(\varphi\psi) = \tau_2(\varphi) + (\tau_1(\varphi) \otimes 1 + 1 \otimes \tau_1(\varphi))\, |\varphi|\tau_1(\psi) + |\varphi|\tau_2(\psi)$$

となるが、この式は

$$-d\tau_2(\varphi, \psi) = (\tau_1(\varphi) \otimes 1 + 1 \otimes \tau_1(\varphi))\, |\varphi|\tau_1(\psi) = ((\tau_1 \otimes 1 + 1 \otimes \tau_1) \cup \tau_1)\,(\varphi, \psi)$$

と解釈できる。ここで $\cup$ は (正規化された) 標準 chain 複体上の (Alexander-Whitney) cup 積である。したがって

$$-d\tau_2 = (\tau_1 \otimes 1 + 1 \otimes \tau_1) \cup \tau_1 \in C^2(\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes 3}) \qquad (1.5)$$

または

$$(\tau_1 \otimes 1 + 1 \otimes \tau_1) \cup \tau_1 = 0 \in H^2(\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes 3}) \qquad (1.6)$$

が得られる。これが中村-Garoufalidis [GN] の IH 関係式の本質的な部分である。

いま係数体 $\mathbb{C}$ の標数は 0 なので Magnus 展開の値域をより小さくとることが出来る。$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}(H)$ を H の生成する完備自由 Lie 代数とする。環 $\widehat{T}$ は $\widehat{\mathcal{L}}$ の包絡環と考えることができ、自然なやり方で $\widehat{\mathcal{L}} \subset \widehat{T}$ とみなすことができる。また、$\widehat{\mathcal{L}}$ の指数函数 exp による像 $\exp(\widehat{\mathcal{L}})$ は $1 + \widehat{T}_1$ の部分群をなしており、Hausdorff 群と呼ばれている。

Hausdorff 群に値をもつ Magnus 展開 $\theta : F_n \to \exp(\widehat{\mathcal{L}})$ は存在する。たとえば $\theta(x_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} {X_i}^n$ ととればよい。このノートの主題である調和的 Magnus 展開も Hausdorff 群に値をもっている。いずれにせよ、Hausdorff 群に値をもつ Magnus 展開の定める Johnson 準同型は $\mathrm{Aut}(F_n)$ を $\mathrm{Hom}(H, \widehat{\mathcal{L}} \cap \widehat{T}_2) \times \mathrm{GL}(H)$ の中に写像する。

2. 写像類群上の IH 関係式.

ここでは写像類群の上での拡大 Johnson 準同型と森田 Mumford 類の関係 [Mo4] [KM1] [KM2] の大略を述べます。

$g \geq 1$ を整数とし、$\mathcal{M}_{g,*}$ を基点つき種数 g 閉曲面の写像類群とし、$\mathcal{M}_{g,1}$ を種数 g 境界成分 1 の compact 曲面 $\Sigma_{g,1}$ の(境界上 identity であるような)写像類群とする。これらは、それぞれ、moduli 空間 $\mathbb{M}_g$ 上の普遍 Riemann 面 $\mathbb{C}_g$ および相対接束から 0 切断を除いたもの $T^{\times}_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}$ の (V-)基本群になっている。基本群 $\pi_1(\Sigma_{g,1})$ は階数 $2g$ の自由群であるから自由生成系 $\{x_1, x_2, \ldots, x_g, x_{g+1}, x_{g+2}, \ldots, x_{2g}\}$ をとれば準同型

$$\mathcal{M}_{g,1} \to \mathrm{Aut}(F_{2g})$$

が得られる。Nielsen により、この準同型は単射であり、その像は境界の周りを一周する loop を表す語の stabilizer に一致する。簡単のため、生成系を symplectic なものにとりかえて境界の周りを一周する loop が語

$$w_0 := \prod_{i=1}^{g} x_i x_{g+i} {x_i}^{-1} {x_{g+i}}^{-1} \tag{2.1}$$

によって表されるようにしておく。

fibration $\mathbb{C}^{\times} \to T^{\times}_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g} \to \mathbb{C}_g$ に対応して群拡大

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{g,1} \to \mathcal{M}_{g,*} \to 1 \tag{2.2}$$

が得られる。ここで $1 \in \mathbb{Z}$ の $\mathcal{M}_{g,1}$ における像は境界に沿う Dehn twist つまり語 w_0 による共役である。この群拡大の Euler 類(つまり $T^{\times}_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}$ の第 1 Chern 類)を $e \in H^2(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{Z})$ と表す。

普遍族 $\pi : \mathbb{C}_g \to \mathbb{M}_g$ に対応する写像類群の準同型が、基点を忘れる準同型 $\pi : \mathcal{M}_{g,*} \to \mathcal{M}_g$ である。森田 Mumford 類 $e_i \in H^{2i}(\mathcal{M}_g; \mathbb{Z})$, $i \geq 0$, [Mo1] [Mu] とは Euler 類 e の巾 $e^{i+1} \in H^{2i+2}(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{Z})$ の fiber 積分(Gysin 写像、push forward)のことである:

$$e_i := \int_{\mathrm{fiber}} e^{i+1} \in H^{2i}(\mathcal{M}_g; \mathbb{Z}).$$

Johnson 準同型 τ_1 に戻ろう。曲面には交叉形式というものがあって、それは写像類群で不変であるから、$\mathcal{M}_{g,1}$-加群としての同型

$$H = H^*(= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H, \mathbb{C}))$$

が成り立つ。そこで第 1 Johnson 準同型 $\tau_1 : \mathrm{Aut}(F_{2g}) \to H^* \otimes H^{\otimes 2}$ の写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ への制限は $H^{\otimes 3}$ に値をもつが、さらに小さく $\Lambda^3 H$ に値をもつことが分かっている [J] [Mo3]. さらに $\tau_1(w_0) = 0$ であって、w_0 による H への共役作用は明らかに自明であるから、結局 1-cocycle

$$\widetilde{k} : \mathcal{M}_{g,*} \to \Lambda^3 H$$

が得られる。これが森田 [Mo2] による第 1 Johnson 準同型の $\mathcal{M}_{g,*}$ への拡張である。

森田 [Mo4] は、さらに、$\widetilde{k}$ を用いて、trivalent graph から群 $\mathcal{M}_{g,*}$ の自明係数 cocycle を作る対応、すなわち、環準同型(簡単のため同じ記号を用いる)

$$\widetilde{k} : \mathbb{C}[\text{trivalent graphs}] \to Z^*(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{C})$$

を構成し、その cohomology 環 $H^*(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{C})$ における像 $\operatorname{Im}\widetilde{k}$ が Euler 類 e および森田 Mumford 類 e_i の生成する部分環 $\mathbb{C}[e, e_1, e_2, \dots]$ を含むこと

$$\operatorname{Im}\widetilde{k} \supset \mathbb{C}[e, e_1, e_2, \dots]$$

を示した [Mo4] 。実は、像 $\operatorname{Im}\widetilde{k}$ は（非安定的にも）部分環 $\mathbb{C}[e, e_1, e_2, \dots]$ に一致するのである [KM1] [KM2]:

$$\operatorname{Im}\widetilde{k} = \mathbb{C}[e, e_1, e_2, \dots]. \tag{2.3}$$

この事実の最初に得られた証明 [KM1] は、拡大 Johnson 準同型 $\widetilde{k}$ をねじれ係数森田 Mumford 類 [Kaw] として解釈し、それらの縮約公式を用いて得られたのであるが、中村-Garoufalidis [GN] が提唱した（が残念ながら証明は誤り、$\mathcal{M}_{g,*}$ への精密化および正しい証明は [KM2]で与えた）IH relation というものを用いると、事態が明確になる。I, H とはそれぞれ $(\tau_1 \otimes 1) \cup \tau_1$ および $(1 \otimes \tau_1) \cup \tau_1$ の表す cohomology 類のことである。現在 IH relation の証明はいろいろあって [KM2] でも二通りの証明が与えられている。それとは別に、以下のように (1.5) から直ちに導くことができる:

まず、(1.5) により $\mathcal{M}_{g,1} \subset \operatorname{Aut}(F_{2g})$ において $(\tau_1 \otimes 1 + 1 \otimes \tau_1) \cup \tau_1$ は $-\tau_2$ によって cobound されている。この事実は、拡大 (2.2) の定める Gysin 完全列

$$H^0(\mathcal{M}_{g,*}; H^{\otimes 4}) \overset{\cup e}{\to} H^2(\mathcal{M}_{g,*}; H^{\otimes 4}) \to H^2(\mathcal{M}_{g,1}; H^{\otimes 4})$$

において $(\tau_1 \otimes 1 + 1 \otimes \tau_1) \cup \tau_1 \in H^2(\mathcal{M}_{g,*}; H^{\otimes 4})$ が $-\tau_2(w_0) \in H^0(\mathcal{M}_{g,*}; H^{\otimes 4})$ によって hit されている:

$$-\tau_2(w_0) \cup e = (\tau_1 \otimes 1 + 1 \otimes \tau_1) \cup \tau_1 \in H^2(\mathcal{M}_{g,*}; H^{\otimes 4})$$

ということを表している。いま、

$$\theta_1(w_0) = [w_0] = 0$$
$$\theta_2(w_0) = \sum_{i=1}^{g} (X_i X_{g+i} - X_{g+i} X_i) = (\text{intersection form}) \in H^{\otimes 2}$$

であるから

$$\tau_2(w_0) = (\text{intersection form}) \otimes 1_H - 1_H \otimes (\text{intersection form})$$

したがって $H^2(\mathcal{M}_{g,*}; H^{\otimes 4})$ において

$$\begin{aligned}(\tau_1 \otimes 1 + 1 \otimes \tau_1) \cup \tau_1 \\ = -e(\text{intersection form}) \otimes 1_H + e 1_H \otimes (\text{intersection form})\end{aligned} \tag{2.4}$$

となる。これが精密化された IH relation [GN] [KM2] である。

つまり、τ_2 は森田 Mumford 類の関係式を表していることになる。同様に τ_p, $p \geq 3$, は高次の関係式を表しているのである。要するに、Magnus 展開を一つきめると、それへの写像類群の作用を見ることにより Johnson 準同型が得られ、そこから森田 Mumford 類およびその高次関係式が得られるというわけである。

3. 調和的 Magnus 展開.

tangential base point をもつ Riemann 面の基本群について復習する。(C, P_0, v) を種数 g の compact Riemann 面 C とその上の一点 $P_0 \in C$, そして点 P_0 における 0 でない接 vector $v \in T_{P_0}C - \{0\}$ からなる三つ組とする。区分的 C^∞ 写像 $\ell : [0,1] \to C$ であって条件

$$\begin{aligned} &\ell(]0,1[) \subset C - \{P_0\} \\ &\ell(0) = \ell(1) = P_0 \\ &\frac{d\ell}{dt}(0) = -\frac{d\ell}{dt}(1) = v \end{aligned} \tag{3.1}$$

を充たすもの全体の集合を $\Omega(C, P_0, v)$ と表す。ℓ_0, ℓ_1 について、関係 $\ell_0 \sim \ell_1$ を区分的 C^∞ 写像 $L : [0,1] \times [0,1] \to C$ であって、条件

$$\begin{aligned} &L(]0,1[\times[0,1]) \subset C - \{P_0\} \\ &L(0,s) = L(s,1) = P_0, \quad \forall s \in [0,1] \\ &\frac{\partial L}{\partial t}(0,s) = -\frac{\partial L}{\partial t}(1,s) = v, \quad \forall s \in [0,1] \\ &L(t,0) = \ell_0(t), \quad L(t,1) = \ell_1(t), \quad \forall t \in [0,1] \end{aligned} \tag{3.2}$$

を充たすものが存在することとして定義する。この関係 $\sim$ は明らかに同値関係であって、商集合

$$\pi_1(C, P_0, v) = \pi_1(C - \{P_0\}, v) := \Omega(C, P_0, v)/\sim$$

を三つ組 (C, P_0, v) の基本群とよぶことにする。

明らかなやり方で（本当は少し工夫が必要だが）$\pi_1(C, P_0, v)$ には群構造が入り、この群は階数 $2g$ の自由群となる。自由群 $\pi_1(C, P_0, v)$ の可換化は自然に Riemann 面 $C - \{P_0\}$ の整係数第 1 特異 homology 群、したがって Riemann 面 C の整係数第 1 特異 homology 群に同型である:

$$\pi_1(C, P_0, v)^{\mathrm{abel}} = H_1(C - \{P_0\}; \mathbb{Z}) = H_1(C; \mathbb{Z}).$$

次に、Chen の反復積分の理論 [C] を復習する。M を C^∞-多様体、$\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ を M 上の 1-forms、$\ell : [0,1] \to M$ を C^∞-path とすると、Chen の反復積分 $\int_\ell \varphi_1 \cdots \varphi_p$ は ℓ による φ_i の引き戻したちの $\mathbb{R}^p$ 内の単体 $\{0 \le t_1 \le \cdots \le t_p \le 1\}$ 上の積分

$$\int_{0 \le t_1 \le \cdots \le t_p \le 1} (\ell^*\varphi_1)(t_1) \ldots (\ell^*\varphi_p)(t_p)$$

として定義される。いま、ω を代数 $\widehat{T_1}$ に値をもつ接続形式、すなわち $\widehat{T_1}$ に値をもつ M 上の 1-form であって可積分条件

$$d\omega = \omega \wedge \omega \tag{3.3}$$

をみたすものとする。このとき Chen が示したように対応

$$\ell \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_\ell \overbrace{\omega\omega\cdots\omega}^{n} \in \widehat{T}$$

は ℓ の基点をとめる homotopy について不変であり Magnus 展開を定める。また、Chen-Ree [R] が示したように Hausdorff 群 $\exp(\widehat{\mathcal{L}})$ に値をもつ。したがって $\ell \in \Omega(C, P_0, v)$ の loop ℓ について「広義」反復積分を実行すれば望む Magnus 展開が得られるわけである。

そこで、接続形式 ω を構成しよう。ここからは form という代わりに current ということにする。$q \geq 0$ とする。$A^q(C)$ によって C 上の複素係数 q-current 全体の空間をあらわす。そこで接続 1-形式 ω は $A^1(C) \otimes \widehat{T}_1$ の元

$$\omega \in A^1(C) \otimes \widehat{T}_1$$

である。一般に $\widehat{T}$ に係数をもつ C 上の 1-current $\varphi \in A^1(C) \otimes \widehat{T}$ について、その n 次同次成分を $\varphi_{(n)}$ と表わすことにする:

$$\varphi = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \varphi_{(n)}, \quad \varphi_{(n)} \in A^1(C) \otimes H^{\otimes n}.$$

まず $\theta_1(\ell) = [\ell] \in H$ でなければならないから、$\omega_{(1)} \in A^1(C) \otimes H$ は自ずと定まる。$H := H_1(C; \mathbb{C})$ の symplectic basis $\{X_i, X_{g+i}\}_{i=1}^{g}$ をとる。C の調和 1 形式 ξ_i を

$$[\xi_i] \cap [C] = X_i, \quad 1 \leq i \leq 2g$$

を充たすようにとる。$\{-\xi_{g+i}, \xi_i\}_{i=1}^{g}$ の定める $H^1(C; \mathbb{C})$ の基底が $\{X_i, X_{g+i}\}_{i=1}^{g}$ の双対基となる。そこで

$$\omega_{(1)} := \sum_{i=1}^{g} (-\xi_{g+i} X_i + \xi_i X_{g+i}) \tag{3.4}$$

とおく。もちろん、これは symplectic basis $\{X_i, X_{g+i}\}_{i=1}^{g}$ の取り方によらない。

問題は $\omega_{(2)}$ である。$d\omega_{(2)} = \omega_{(1)} \wedge \omega_{(1)}$ をみたす current $\omega_{(2)}$ など存在するわけがない。

$$\int_C \omega_{(1)} \wedge \omega_{(1)} = (\text{intersection form}) \neq 0 \in H^{\otimes 2}$$

だからである。そこで基点 P_0 を犠牲にして無理矢理 $\omega_{(2)}$ を構成する。つまり P_0 における delta current $\delta_0 : C^\infty(C) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(P_0)$, を使えば

$$d\omega_{(2)} = \omega_{(1)} \wedge \omega_{(1)} - (\text{intersection form})\delta_0$$

をみたす $\omega_{(2)}$ は存在する。

そこで Green 作用素について復習しよう。$* : (T^*_{\mathbb{R}}C) \otimes \mathbb{C} \to (T^*_{\mathbb{R}}C) \otimes \mathbb{C}$ を C の Hodge $*$ 作用素とする。これは C の複素構造のみによって決まる。Laplace 作用素

$$d * d : A^0(C) \to A^2(C)$$

はほとんど同型である。kernel は定数函数のはる $A^0(C)$ の 1 次元部分空間 $\mathbb{C}$ であり、cokernel は、積分 $\int_C$ によって $\mathbb{C}$ と同型である。したがって、Green 作用素

$$\Phi = \Phi^{(C,P_0)} : A^2(C) \to A^0(C)/\mathbb{C}$$

が任意の 2-current $\Omega \in A^2(C)$ について

$$d * d\Phi(\Omega) = \Omega - \left(\int_C \Omega\right)\delta_0$$

をみたすものとして一意的に定まる。

かくして $n \geq 2$ について帰納的に $\omega_{(n)}$ を

$$\omega_{(n)} := *d\Phi(\omega \wedge \omega)_{(n)} = *d\Phi\left(\sum\nolimits_{p=1}^{n-1} \omega_{(p)} \wedge \omega_{(n-p)}\right)$$

によって定義する。定義から直ちに

$$d\omega = \omega \wedge \omega - (\text{intersection form})\,\delta_0$$

が成り立つ。

ω の滑らかさを調べておこう。P_0 以外ではもちろん C^∞ である。P_0 の周りを調べるために P_0 を中心とするC の複素座標 z を一つ固定し、z の極座標表示

$$z = re^{\sqrt{-1}\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

をとる。P_0 の近傍で $\frac{1}{2\pi}d\theta$ は、任意の $p < 2$ について L^p であり、

$$\delta_0 = d\left(\frac{1}{2\pi}d\theta\right)$$

をみたす。そこでまず $n = 2$ について $\omega_{(2)} - \frac{1}{2\pi}(d\theta)(\text{intersection form})$ が P_0 の近傍で C^∞ であることが分かる。$n \geq 3$ については、作用素 $\partial/\partial\bar{z}$ と複素領域上の函数 f に関する古典的な二つの結果

(1) $p > 2$ について $f_{\bar{z}}$ が L^p_{local} ならば f は $C^{0+(1-\frac{2}{p})}_{\text{local}}$ である [AB]。

(2) $0 < \alpha < 1$ について $f_{\bar{z}}$ が $C^{n+\alpha}_{\text{local}}$ ならば f は $C^{n+1+\alpha}_{\text{local}}$ である。例えば [B] を参照。

を用いると次が得られる:

補題 3.1. 任意の $n \geq 3$ について P_0 の近傍で

$$\omega_{(n)} = (\log|z|)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\text{有界 1-形式}\right) + \left(C^\infty\text{- 1-形式}\right)$$

と表される。

これを使うと $\ell \in \Omega(C, P_0, v)$ について広義反復積分 $\int_\ell \overbrace{\omega\omega\cdots\omega}^{n}$ が収束することが分かる。Chen [C] の示した homotopy 不変性により Hausdorff 群に値をもつ Magnus 展開

$$\theta = \theta^{(C,P_0,v)} : \pi_1(C, P_0, v) \to \exp(\widehat{\mathcal{L}}), \quad [\ell] \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_\ell \overbrace{\omega\omega\cdots\omega}^{n}$$

が得られる。これを三つ組 (C, P_0, v) の調和的 Magnus 展開とよぶ。

調和的 Magnus 展開 θ の曲面群の基本関係式つまり P_0 を一周する loop w_0 での値は

$$\theta(w_0) = \exp\left((\text{intersection form})\right) \in \widehat{T}$$

で与えられる。

4. 調和的 Magnus 展開の擬等角変分.

$(C_t, {P_0}^t, v_t)$, $t \in \mathbb{R}$, $|t| \ll 1$, を Riemann 面と点と 0 でない接 vector からなる三つ組の C^∞ な family で、$(C_t, {P_0}^t, v_t)\big|_{t=0} = (C, P_0, v)$ をみたすものとする。この family の C^∞ 曲面束としての自明化は C^∞ 微分同相のC^∞ な family

$$f^t : (C, P_0, v) \to (C_t, {P_0}^t, v_t)$$

であって $f^0 = 1_{(C,P_0,v)}$ を充たすものがとれる。ここで $(df^t)_{P_0}(v) = v_t$ であるが、必要なら ${P_0}^t$ を動かさない C_t の C^∞ 微分同相を合成して $(df^t)_{P_0}(*v) = *_{C_t} v_t$ をみたすようにとることができる。このとき z を P_0 を中心とする C の複素座標とすると、すべての t について

$${f^t}_{\overline{z}}(P_0) = 0 \tag{4.1}$$

となる。

以上の前提の下で、Magnus 展開の C^∞ な family

$$\theta_t := (f^t)^* \left(\theta^{(C_t, {P_0}_t, v_t)}\right) : \pi_1(C - \{P_0\}, v) \to \widehat{T}$$

の第一変分

$$\overset{\bullet}{\theta} := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \theta_t : \pi_1(C - \{P_0\}, v) \to \widehat{T}$$

を計算する。一般に、記号の使い方が通常と少し異なるのであるが、$t \in \mathbb{R}$, $|t| \ll 1$, の「函数」$\bigcirc = \bigcirc_t$ について

$$\overset{\bullet}{\bigcirc} := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \bigcirc_t$$

と表すことにする。たとえば微分同相 f^t の複素歪曲係数 $\mu(f^t) \in C^\infty(C; TC \otimes \overline{T^*C})$ について

$$\overset{\bullet}{\mu} := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mu(f^t)$$

と表す。(4.1) により

$$\overset{\bullet}{\mu}(P_0) = 0 \tag{4.2}$$

が成り立つ。

第一変分 $\overset{\bullet}{\theta}$ を具体的に記述するために、幾つか記号を用意する。まず $H = H_1(C; \mathbb{C})$ には交叉形式

$$\cdot : H \otimes H \to \mathbb{C}, \quad X \otimes Y \mapsto X \cdot Y, \quad (X, Y \in H)$$

が与えられていることを思い出す。$u = \sum_i u_i \otimes X_i$, $u_i \in \widehat{T}$, $X_i \in H$, および $Y \in H$ について

$$u \cdot Y := \sum\nolimits_i u_i (X_i \cdot Y)$$

と定義し、$int(u)(1) = 0$ とおき、$Y_j \in H$ について

$$int(u)\,(Y_1 Y_2 \cdots Y_n) := (u \cdot Y_1) Y_2 \cdots Y_n + Y_1 (u \cdot Y_2) \cdots Y_n + \cdots + Y_1 Y_2 \cdots (u \cdot Y_n)$$

と定義すると、$int(u)$ は $\widehat{T}$ の導分となる。

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は $H^{\otimes n}$ に成分入れ替えとして作用する。$\widehat{T}_1$ における自己線型同型 ε を $H^{\otimes n}$ 上で

$$\varepsilon|_{H^{\otimes n}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

とおくことによって定義する。H の symplectic basis $\{X_i, X_{g+i}\}_{i=1}^{g}$ によって intersection form は

$$\sum_{i=1}^{g}(X_iX_{g+i} - X_{g+i}X_i) \in H^{\otimes 2}$$

と表される。直接計算で

$$int(u)(\text{intersection form}) = \varepsilon u - u \tag{4.3}$$

が分かる。これは森田 [Mo5], Proposition 4.6, p.366 に照応している。

線型自己同型 $\varepsilon : \widehat{T}_1 \to \widehat{T}_1$ を用いて $\widehat{T}_1$ における自己線型作用素 N および $\check{N} : \widehat{T}_1 \to \widehat{T}_1$ を $H^{\otimes n}$ 上で

$$N|_{H^{\otimes n}} := 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k \quad \text{および} \quad \check{N}|_{H^{\otimes n}} := \frac{1}{n}N$$

とおくことによって定義する。

$\omega \in A^1(C) \otimes \widehat{T}$ の正則部分を ω'、反正則部分を ω'' とあらわす。また、ω' および ω'' の n 次同次成分を、それぞれ $\omega'_{(n)}$ および $\omega''_{(n)}$ と表す: $\omega = \omega' + \omega''$, $*\omega = -\sqrt{-1}\omega' + \sqrt{-1}\omega''$.

主結果は次の通り。

定理 4.1.

$$\overset{\bullet}{\theta}(\gamma) = int\left(\int_C 2\Re\left(\left(N(\omega'\omega') - 2\omega'_{(1)}\omega'_{(1)}\right)\overset{\bullet}{\mu}\right)\right)\theta(\gamma) \in \widehat{T}.$$

ここで $N(\omega'\omega')$ は $\omega'\omega' \in C^\infty(C - \{P_0\}; (T^*C)^{\otimes 2}) \otimes \widehat{T}_1$ の $\widehat{T}_1$ の部分に作用素 N を施したものである。$N(\omega'\omega')$ の 2 次の成分が $2\omega'_{(1)}\omega'_{(1)}$ である。

補題 4.2 で示すように $N(\omega'\omega')$ は P_0 のみで極をもつ C 上の有理型二次微分である。また、$N(\omega'\omega')\overset{\bullet}{\mu}$ は tensor の縮約によって得られる $\widehat{T}$ に値をもつ C 上の 2-形式である。(4.2) により可積分である。証明は専ら微分の計算なので省略します。もちろん、二つ程、頭を使う所があって、うち一つは $d\overset{\bullet}{\omega}$ に由来する部分、もう一つは (4.3) に由来する部分です。

共変 tensor $N(\omega'\omega')$ が有理型二次微分になっていることを証明しておきます。

補題 4.2. $N(\omega'\omega')$ は P_0 のみで高々 2 位の極をもつ C 上の有理型二次微分である。

証明. まず $C - \{P_0\}$ の上で考える。$d\omega = \omega \wedge \omega$ となる。書き下すと

$$\overline{\partial}\omega'_{(n)} = \frac{1}{2}(\omega' \wedge \omega'' + \omega'' \wedge \omega')_{(n)}$$

となる。これを用いると

$$
\begin{aligned}
4\bar{\partial}N(\omega'\omega')_{(n)} &= 2\bar{\partial}N\sum_{p+q=n}\omega'_{(p)}\omega'_{(q)}\\
&=N\sum_{p_1+p_2+q=n}\left(\omega'_{(p_1)}\wedge\omega''_{(p_2)}\right)\omega'_{(q)}+\left(\omega''_{(p_1)}\wedge\omega'_{(p_2)}\right)\omega'_{(q)}\\
&\quad+N\sum_{p+q_1+q_2=n}\omega'_{(p)}\left(\omega'_{(q_1)}\wedge\omega''_{(q_2)}\right)+\omega'_{(p)}\left(\omega''_{(q_1)}\wedge\omega'_{(q_2)}\right)\\
&=N\sum_{p_1+p_2+q=n}\varepsilon^{-q}\left(\omega'_{(q)}\omega'_{(p_1)}\otimes\omega''_{(p_2)}\right)-\varepsilon^{p_1}\left(\omega'_{(p_2)}\omega'_{(q)}\otimes\omega''_{(p_1)}\right)\\
&\quad+N\sum_{p+q_1+q_2=n}\omega'_{(p)}\omega'_{(q_1)}\otimes\omega''_{(q_2)}-\varepsilon^{-q_2}\left(\omega'_{(q_2)}\omega'_{(p)}\otimes\omega''_{(q_1)}\right)\\
&=N\sum_{a+b+c=n}\left(\varepsilon^{-a}-\varepsilon^{c}+1-\varepsilon^{-a}\right)\omega'_{(a)}\omega'_{(b)}\otimes\omega''_{(c)}=0
\end{aligned}
$$

となる。したがって $N(\omega'\omega')$ は $C-\{P_0\}$ 上で整型である。

z を P_0 を中心とする C の複素座標とする。既に見たように、$s>0$ について $\lim_{z\to 0}|z|^{1+s}\omega=0$ となる。これは $N(\omega'\omega')$ が P_0 において高々 2 位の極であることを含意する。 ■

さいごに、二次微分 $N(\omega'\omega')$ がある Lie 部分代数 $\mathfrak{g}\subset\widehat{T_1}$ に値をとる、つまり

$$N(\omega'\omega')\in H^0(C,\mathcal{O}_C((T^*C)^{\otimes 2}\otimes[P_0]^{\otimes 2})\otimes\mathfrak{g}$$

となっていると仮定する。このとき、写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の(拡大) Johnson (非) 準同型の像は $\exp(\mathfrak{g})$ に含まれることになる。この事実は、今後の研究とくに写像類群の代数構造の複素解析的手法による研究の重要な鍵となると思っています。

文献

[AB] L. V. Ahlfors and L. Bers: "Riemann's mapping theorem for variable metrics," Ann. Math. **72** (1960), pp. 385–404.

[B] L. Bers: 'Riemann Surfaces,' (mimeographed lecture notes), New York University, (1957-58).

[C] K.-T. Chen: "Iterated path integrals," Bull. Amer.Math. Soc. **83** (1977), pp. 831–879.

[GN] S. Garoufalidis and H. Nakamura: "Some IHX-type relations on trivalent graphs and symplectic representation theory," Math. Rex. Lett. **5** (1998) 391–402.

[H] R. M. Hain: "The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group," Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987), pp.247–282.

[HL] R. M. Hain and E. Looijenga: "Mapping class groups and moduli spaces of curves," Proc. Symp. Pure Math. **62-2** (1997), pp.97–142.

[J] D. Johnson: "An abelian quotient of the mapping class group $\mathcal{I}_g$," Math. Ann. **249** (1980) 225–242.

[Kae] R. H. Kaenders: "The mixed Hodge structure on the fundamental group of a punctured Riemann surfaces," Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2000), pp. 1271–1281.

[Kaw] 河澄響矢: "A generalization of the Morita-Mumford classes to extended mapping class groups for surfaces," Invent. math. **131** (1998), pp. 137–149.

[KM1] ——、森田茂之: "The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the stable characteristic classes," Math. Rex. Lett. **3** (1996) 629–641.

[KM2] ——、——: "The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the Mumford-Morita-Miller classes," preprint, 東京大学大学院数理科学研究科 UTMS**2001-13**.

[Ki] 北野晃朗: "Johnson's homomorphism of subgroups of the mapping class group, the Magnus expansion and the Massey higher products of mapping tori," Topology and its appl. **69** (1996), pp. 165–172.

[Ma] W. Magnus: "Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring," Math. Ann. **111** (1935), pp. 259–280.

[Mo1] 森田茂之: "Characteristic classes of surface bundles," Invent. math. **90** (1987), pp. 551–577.

[Mo2] ——: "The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group," Invent. math. **111** (1993), pp. 197–224.

[Mo3] ——: "Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces," Duke Math. J., **70** (1993), pp. 699–726.

[Mo4] ——: "A linear representation of the mapping class group of orientable surfaces and characteristic classes of surface bundles," in: 'Topology and Teichmüller spaces.' World Sci. Publ., River Edge, 1996, pp. 159–186.

[Mo5] ——: "Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect," Geometry and Topology Monographs, **2** (1999), pp. 349–406.

[Mu] D. Mumford: "Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves" in: 'Arithmetic and Geometry.' Progress in Math. 36, Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 271–328.

[R] R. Ree: "Lie elements and an algebra associated with shuffles," Ann. Math. **68** (1958), pp. 210–220.

かわずみなりや
kawazumi@ ms.u-tokyo.ac.jp
東京大学大学院数理科学研究科
〒153-8914 目黒区駒場 3-8-1