数理解析研究所講究録 1271 巻 2002 年 258-267

高次元可積分方程式の導出に関する考察
–Schwarz 形式を用いて–

富山県大・数理物理　戸田 晃一（Kouichi TODA）* †
Department of Mathematical Physics,
Toyama Prefectural University

概要

本小論では Schwarz 形式をもつ $(1+1)$ 次元可積分方程式に対して 高次元 Schwarz 因子で書き直すことで 可積分性を保持したまま $(2+1)$ 次元に拡張できる可能性について論じる.

1　緒言の代わりに–可積分（性）とは–

そもそも可積分とはどういうことか？ 古典的な定義では求積法によって解けるとき「可積分」であると言われる. しかし,「可積分」の定義は対象とする問題によっても異なり, 一般的な定義は（少なくとも現段階では）無いようである. 例えばソリトン方程式の場合は逆散乱法（またはそれに類する手法）により解析的に厳密解を得ることができる時は「可積分」と云われる. そこで「可積分」の性質についてまとめることからこの小論は書き始めることにしたい.

元来「可積分（性）」とは有限自由度の Hamilton 力学系に対する概念であった. すなわち, Liouville-Arnold の定理 [1]：

自由度 N の Hamiltonian 系に N 個の保存量があり,
それが Poisson 括弧に関して互いに可換ならば, 初期
値問題は有限回の求積[1] によって解ける

が成り立つ系, すなわち初期値問題が求積操作の有限回の繰り返しで解けるのが可積分系である. それではソリトン方程式に代表される無限自由度系に関してはどうだろうか？ 実はかなり怪しくなる. 無限自由度系において, 一般には（少なくとも可積分系の研究者の間では）以下の性質；

1. 線形化可能：
2. 逆散乱法で解ける時 [2]：
3. Lax 対の存在 [3]：
4. **Liouville-Arnold** の意味での「可積分性」：
5. 無限個の保存量・対称性の存在（**recursion** 演算子の存在とほとんど等価）
6. **bi-Hamilton** 構造 [4]：
7. 厳密解や **Bäcklund** 変換の存在 [5]：

*発表時は慶應義塾大学 日吉物理学教室に所属していました.
†kouichi@yukawa.kyoto-u.ac.jp

[1] 求積とは四則演算・微分・積分・逆関数をとること, 微分積分を含まない方程式の解を求める演算のこと.

8. Painlevé 性 [6, 7]：

のどれかが成り立てば「可積分」と考えられている[2] ようである [8]. 上記の性質の中で有限自由度系の類推から最も素直なものは性質 **4** のように思える. しかし実は肝心の初期値問題に関する明言が抜けてしまっている. それでは初期値問題との関連で言えば, 性質 **2** が正統的であるように思える. 無限自由度の可積分系の内で典型的なソリトン方程式の場合には, 例えば, Korteweg-de Vries 方程式などは上記の性質 **1** から **8** の性質が全て満たされていることが知られているが, これはむしろ例外である. ほとんどの可積分方程式はこれらの性質の内で数個しか満たさない場合がほとんどである. これらの性質が厳密な意味で等価であるかどうかは全く証明されていない. また我々の住んでいる世界が $(3+1)$ 次元であるにも関わらず, 現在までに知られている非線形可積分系の多くは $(1+1)$ 次元である. 高次元可積分系はほとんど知られていない. 理由の一つには低次元可積分系を単純に高次元にしてもその「可積分性」は保たれない事が挙げられる. よって, 低次元非線形偏微分方程式の「可積分」という性質（可積分性）を残すような次元拡張法（高次元化法）の構築は, 自然界における「可積分性」の役割を知る上で重要な研究課題である.

本小論の目的は高次元可積分方程式の構成法についての筆者のこれまでの研究の一端を紹介することである. その際の可積分の指針は主に性質３と性質８とする. 次章ではまず以前に筆者と共同研究者が明らかにした Schwarz KdV 方程式と Schwarz 微分 及び その高次元可積分方程式について簡単に紹介する. そしてその際提案した可積分を保持したまま高次元化する方法に関するある 予想の真偽について第３章で紙面が許す限り報告したい.

2 Schwarz KdV 方程式と Schwarz 微分

この章ではまず $(1+1)$ 次元 Schwarz KdV 方程式と Schwarz 微分について, 続いて $(2+1)$ 次元に拡張した結果について簡単に紹介する.

2.1 $(1+1)$ 次元 Schwarz KdV 方程式と Schwarz 微分

浅水波を記述する Korteweg-de Vries（KdV）方程式[3]

$$u_t+\frac{1}{4}u_{xxx}+\frac{3}{2}uu_x=0 \quad (u=u(x,t)) \tag{2.1}$$

は空間変数を x, 時間変数を t とする $(1+1)$ 次元偏微分方程式であり, 可積分であることが広く知られている代表的なソリトン方程式の一つである. Schwarz KdV(SKdV) 方程式とは Schwarz 微分 $S[\phi;x]$

$$2u=S[\phi;x]=\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right)_x-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right)^2 \quad (\phi=\phi(x,t)) \tag{2.2}$$

により KdV 方程式を書き直したものである. その具体的な形は

$$\frac{\phi_t}{\phi_x}+\frac{1}{4}S[\phi;x]=0 \tag{2.3}$$

[2] ちなみに筆者の研究では性質 **3, 6, 7** 及び **8** を「可積分」の指針にしている.

[3] ここでは（そしてこれからも）添え字の x や t 等の文字は偏微分を表す. 例えば $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xt}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$ 等.

で与えられる [9, 10]. Schwarz 微分 (2.2) 及び SKdV 方程式 (2.3) は **Möbius** 変換（一次分数型点変換）

$$\phi \mapsto \frac{a+b\phi}{c+d\phi} \quad (ad-bc \neq 0) \tag{2.4}$$

に対して不変であることが広く知られている. 他に知られている性質を以下にまとめる.

（i） Painlevé テストをパスする:

この小論では略す（詳しくは [9] を参照せよ）. また Painlevé 方程式にリダクションできる [11].

（ii） recursion 演算子が存在する:

SKdV 方程式 (2.3) の recursion 演算子 R_{SKdV} は

$$R_{\mathrm{SKdV}} = \partial_x^{-1}\phi_x\partial_x\phi_x^{-1}\partial_x\phi_x^{-1}\partial_x \tag{2.5}$$

で与えられる [11]. この時 SKdV 階層（hierarchy）は

$$\frac{\phi_t}{\phi_x} + \frac{1}{4}\Big(R_{\mathrm{SKdV}}\Big)^k \phi_x = 0 \quad (k=1,2,\cdots) \tag{2.6}$$

と書ける. SKdV 階層の最低次（$k=1$）が SKdV 方程式 (2.3) である.

（iii） Lax 対が存在する:

Lax 対としては λ をスペクトルパラメータとする微分演算子[4]

$$L = \partial_x^2 + \sigma\frac{1}{w}\partial_x - \frac{1}{4}\frac{1}{w^2} - \frac{1}{2}\sigma\frac{w_x}{w^2} - \lambda, \tag{2.7}$$

$$T = \partial_x\Big(L\Big) + T_0 + \partial_t, \tag{2.8}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\sigma\frac{1}{w}\partial_x^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{w^2}\partial_x - \frac{1}{8}\sigma\frac{1}{w^3} + \frac{1}{4}\frac{w_x}{w^3} - \frac{1}{16}\sigma\frac{w_x^2}{w^3} + \frac{1}{8}\sigma\frac{w_{xx}}{w^2} \tag{2.9}$$

が知られている（ここで $\sigma \equiv \pm i$ である）[12]. 両立条件（Lax 方程式）

$$[L, T] = 0 \tag{2.10}$$

は, スペクトルパラメータに対する条件

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0 \tag{2.11}$$

を課した場合, $(1+1)$ 次元方程式

$$w_t + \frac{1}{4}w_{xxx} - \frac{3}{4}\frac{w_x w_{xx}}{w} + \frac{3}{8}\frac{w_x^3}{w^2} = 0 \tag{2.12}$$

と等価である. ここで $w = \phi_x$ と置き直して, 一度 x で積分すると SKdV 方程式 (2.3) となる. 条件 (2.11) が成立する時 **isospectral** 問題と呼ばれる.

以上から SKdV 方程式 (2.3) は可積分方程式と考えられる.

[4] ここでは（そしてこれからも）微分演算子を $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ 等のように略して書くことにする.

2.2 高次元 Schwarz KdV 方程式と高次元 Schwarz 因子

高次元 Schwarz KdV 方程式とは, Schwarz KdV 方程式 (2.3) の可積分性を保持したまま空間次元を一つ上げた空間二次元・時間一次元の $(2+1)$ 次元方程式である. 筆者は兪成周（S.-J. Yu）氏と可積分性を保持したまま Lax 対を高次元化する方法を提唱している. その方法についての詳細は触れずに結果のみ記す. $w = w(x, z, t)$ として, Lax 対を

$$L = \partial_x^2 + \sigma\frac{1}{w}\partial_x - \frac{1}{4}\frac{1}{w^2} - \frac{1}{2}\sigma\frac{w_x}{w^2} - \lambda, \tag{2.13}$$

$$T = \partial_z\Big(L\Big) + T_1 + \partial_t \tag{2.14}$$

と次元拡張すると, Lax 方程式 (2.10) から微分演算子 T_1 と高次元 SKdV 方程式を構成できる [12]. つまり

$$\begin{aligned} T_1 = &\frac{1}{2}\sigma\partial_x^{-1}\left(\frac{1}{w}\right)_z\partial_x^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{w}\partial_x^{-1}\left(\frac{1}{w}\right)_z\partial_x + \frac{1}{8}\sigma\frac{w_{xz}}{w^2} - \frac{1}{8}\sigma\frac{w_x w_z}{w^3} \\ &-\frac{1}{8}\sigma\frac{1}{w^2}\partial_x^{-1}\left(\frac{1}{w}\right)_z + \frac{1}{4}\frac{w_x}{w^2}\partial_x^{-1}\left(\frac{1}{w}\right)_z + \frac{1}{16}\sigma\frac{1}{w}\partial_x^{-1}\left(\frac{w_x^2}{w^2}\right)_z \end{aligned} \tag{2.15}$$

及び

$$w_t + \frac{1}{4}w_{xxz} - \frac{1}{2}\frac{w_x w_{xz}}{w} - \frac{1}{4}\frac{w_{xx}w_z}{w} + \frac{1}{2}\frac{w_x^2 w_z}{w^2} - \frac{1}{8}w_x\partial_x^{-1}\left(\frac{w_x^2}{w^2}\right)_z = 0 \tag{2.16}$$

を得る[5]．ここで $w = \phi_x$ と置き直して, 一度 x で積分すると高次元 SKdV 方程式

$$\frac{\phi_t}{\phi_x} + \frac{1}{4}S_{\text{高次元}}[\phi; x] = 0 \tag{2.17}$$

となる. ただし, $\phi = \phi(x, z, t)$ として,

$$S_{\text{高次元}}[\phi; x] = \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right)_z - \frac{1}{2}\partial_x^{-1}\left\{\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right)^2\right\}_z \tag{2.18}$$

とする[6]．ここでは $S_{\text{高次元}}[\phi; x]$ を**高次元 Schwarz 因子**と名付けることにする[7]．高次元 SKdV 方程式 (2.17) 及び **高次元 Schwarz 因子** (2.18) は **Möbius** 変換 (2.4) に対して不変である. $z = x$ とすれば, 各 SKdV 方程式 (2.3) 及び Schwarz 微分 (2.2) に帰着する. 高次元 SKdV 方程式 (2.17) について知られている性質を以下にまとめる.

(i) Painlevé テスト をパスする:

この場合もこれ以上はこの小論では略す（詳しくは [12] を参照せよ）. また Painlevé 方程式にもリダクションできる [11].

---

[5] 論文 [12] では **isospectral** 問題として方程式 (2.16) を導出した. しかし λ が条件 (2.11) を満たさない時つまり **non-isospectral** 問題や, $\lambda = 0$ （ weak Lax 対と呼ぶ）の時でも方程式 (2.16) を導出できることが示されている [11].

[6] ここでは（そしてこれからも）$\partial_x^{-1}f = \int f dx$ とする.

[7] これを導出した当初は **高次元 Schwarz** 微分と呼んだ [12]. しかし不評であった. 理由は (2.18) には積分（∂_x^{-1}）を含むからということであった. よって高次元 Schwarz 微積分と呼んだこともあったが, もっと不評であった. 故に最近は**高次元 Schwarz** 因子と呼ぶことにしている [13].

（ii） **recursion 演算子が存在する:**

recursion 演算子 R_{SKdV} は (1+1) 次元の (2.5) と等しくなる．故に高次元 SKdV 階層（hierarchy）は

$$\frac{\phi_t}{\phi_x}+\frac{1}{4}\Big(R_{\mathrm{SKdV}}\Big)^k\phi_z=0 \quad (k=1,2,\cdots) \tag{2.19}$$

で与えられる．高次元 SKdV 階層の最低次（$k=1$）が高次元 SKdV 方程式 (2.17) となる [11].

（iii） **高次元 KdV 方程式との関係：**

高次元 SKdV 方程式 (2.17) は高次元 KdV 方程式（Bogoyavlenskii-Calogero-Schiff 方程式[8] と呼ばれることもある）

$$u_t+\frac{1}{4}u_{xxz}+uu_z+\frac{1}{2}u\Big(\partial_x^{-1}u_z\Big)=0 \tag{2.20}$$

と変換

$$2u(x,z,t)=S_{高次元}[\phi;x]=\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right)_z-\frac{1}{2}\partial_x^{-1}\left\{\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right)^2\right\}_z \tag{2.21}$$

で関係づけられている．この高次元 KdV 方程式 (2.20) はある条件を課すと，ソリトン解の波形が V 字型（V ソリトン）になることが知られている [14]. また modified 系や hierarchy 構造についても明らかになっている [15, 16]. 更に方程式 (2.20) をリダクション可能な方程式のクラスも考察されている [13, 17].

以上から SKdV 方程式 (2.17) は高次元可積分方程式と考えられる．

3 高次元 Schwarz 因子を用いた高次元化

前章では SKdV 方程式，高次元 SKdV 方程式 及び それらの性質を簡単に紹介した．ここで着目したいことは SKdV 方程式 (2.3) と 高次元 SKdV 方程式 (2.17) の方程式の形である．大雑把に見ると $S[\phi;x]$ を $S_{高次元}[\phi;x]$ と書き換えただけである．非常に単純である !! そこで筆者は論文 [12] である予想をしている:

(予想)

Schwarz 形式をもつ (1 + 1) 次元可積分方程式は 高次元 Schwarz 因子で書き直すことで 可積分性を保持したまま (2 + 1) 次元に拡張 (つまり高次元化) できる

というものである．ここで云う <u>Schwarz 形式</u> とは <u>Möbius 変換に不変</u> な形を意味することとする．つまり 高次元 Schwarz 因子が高次元化のツールの一つ（しかも非常に単純なもの）になりえると考えている．このことを確かめるために今までに Lax 対の高次元化により導出したことのある方程式を考察していく．

（例 1） **Harry-Dym 方程式の高次元化:**

---

[8] これ以外の高次元 KdV 方程式としては Kadomtsev-Petviashvili 方程式が有名である．

Harry-Dym 方程式とは

$$u_t + \frac{1}{4}u^3 u_{xxx} = 0 \quad (u = u(x,t)) \tag{3.22}$$

で与えられる．現在までに知られていることは

（i） **(weak) Painlevé テストをパスする．**

（ii） **recursion operator, Lax 対，ソリトン解が知られている．**

（iii） **Schwarz 形式：** [18]

$$\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)^2 + \frac{2}{S[\phi;x]} = 0 \qquad (\phi = \phi(x,t)) \tag{3.23}$$

などが挙げられる．この $S[\phi;x]$ を $S_{\text{高次元}}[\phi;x]$ に入れ替えて得られる高次元方程式，つまり

$$\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)^2 + \frac{2}{S_{\text{高次元}}[\phi;x]} = 0 \qquad (\phi = \phi(x,z,t)) \tag{3.24}$$

は可積分であろうか？ この方程式を場の変数 $u = u(x,z,t)$ で書くと

$$u_t + \frac{1}{4}u^3 u_{xxx}[\,1 + \partial_x^{-1}(u_z/u^2)\,] - \frac{1}{4}uu_x u_{xz} + \frac{1}{4}uu_z u_{xx} + \frac{1}{4}u^2 u_{xxz} = 0 \tag{3.25}$$

となり[9]，

（i） **(weak) Painlevé テストをパスする．**

（ii） **recursion operator, Lax 対が知られている．**

であることが既に研究されている [19]．よって方程式 (3.24) は高次元可積分 Harry-Dym 方程式であるといえる．

<u>つまり予想はこの場合正しいと言える．</u>

（例２） **5th-KdV 方程式（ KdV-hierarchy）の高次元化：**

5th-KdV 方程式とは

$$u_t + \frac{1}{16}u_{xxxxx} + \frac{5}{8}uu_{xxx} + \frac{5}{4}u_x u_{xx} + \frac{15}{8}u^2 u_x = 0 \qquad (u = u(x,t)) \tag{3.26}$$

は KdV-hierarchy の二番目に低い方程式である．KdV 方程式とは recursion operator（すなわち Hamiltonian または 保存量）を共有することが知られている．その他に知られていることは

（i） **Painlevé テストをパスする．**

[9] $z = x$ とすると方程式 (3.25) は方程式 (3.22) にリダクションされる．

（ii） **Lax 対が知られている（ KdV 方程式のものと密接に関係がある）.**

（iii） **Schwarz 形式:** [18]

$$\frac{\phi_t}{\phi_x}+\frac{1}{16}\Big(S[\phi;x]\Big)_{xx}+\frac{1}{16}\Big(S[\phi;x]\Big)^2=0 \qquad (\phi=\phi(x,t)) \tag{3.27}$$

などが挙げられる. この $S[\phi;x]$ を $S_{高次元}[\phi;x]$ に入れ替えて得られる高次元方程式, つまり

$$\frac{\phi_t}{\phi_x}+\frac{1}{16}\Big(S_{高次元}[\phi;x]\Big)_{xx}+\frac{1}{16}\Big(S_{高次元}[\phi;x]\Big)^2=0 \qquad (\phi=\phi(x,z,t)) \tag{3.28}$$

は可積分であろうか？ この方程式を場の変数 $u=u(x,z,t)$ で書き直すと

$$\begin{aligned}&u_t+\frac{1}{16}u_{xxxxz}+\frac{1}{2}uu_{xxz}+\frac{3}{4}u_xu_{xz}+\frac{1}{2}u_{xx}u_z+\frac{1}{8}u_{xxx}(\partial_x^{-1}u_z)\\&+u^2u_z+\frac{3}{4}uu_x(\partial_x^{-1}u_z)+\frac{1}{4}u_x(\partial_x^{-1}uu_z)=0 \qquad (u=u(x,z,t))\end{aligned} \tag{3.29}$$

となる[10]. この方程式 (3.29) について

（i） **Painlevé テスト をパスする.**

（ii） **recursion operator, Lax 対が知られている.**

ということが既に考察されている [15, 16]. よって方程式 (3.28) は高次元可積分 5th-KdV 方程式[11] であるといえる[12].

<u>つまり予想はこの場合正しいと言える.</u>

以上は予想が正しくなる例の代表的なものの二つである. ただし次の例では予想を（少なくとも）修正する必要があることが示される.

（例３） **Burgers 方程式の高次元化:**

Burgers 方程式は

$$u_t+u_{xx}+2uu_x=0 \qquad (u=u(x,t)) \tag{3.30}$$

で与えられる. 現在までに

（i） **線形化可能**

Cole-Hopf 変換[13]

$$u=\frac{f_x}{f} \qquad (f=f(x,t)) \tag{3.31}$$

---

[10] $z=x$ とすると方程式 (3.29) は方程式 (3.26) にリダクションされる.
[11] 5th-Bogoyavlenskii-Calogero-Schiff 方程式とも呼ばれる.
[12] 論文 [20] において高次元 5th-KdV 方程式の Schwarz 形式についての考察があるが間違っている. どうやら論文 [12] の内容を読み違えていたようである.
[13] Bäcklund 変換の一種である.

により方程式 (3.30) は

$$f_t + f_{xx} = 0 \tag{3.32}$$

と線形方程式（拡散方程式）に帰着される．この方程式 (3.32) は厳密解

$$f(x,t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \exp(p_j x + q_j t + r_j) \tag{3.33}$$

を持つ．ただし p_j と r_j は任意の定数であり かつ $q_j = -p_j^2$ を満たさなければならない．

（ii） Painlevé テストをパスする．

（iii） recursion operator が知られている．

という事実が広く知られている．そして Burgers 方程式 (3.30) は

$$\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi_t^2}{\phi_x^2}\right)_x - 2\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)_{xx} + \Big(S[\phi;x]\Big)_x = 0 \qquad (\phi = \phi(x,t)) \tag{3.34}$$

を Schwarz 形式として持つ [18]．この場合でも $S[\phi;x]$ を $S_{\text{高次元}}[\phi;x]$ に入れ替えて得られる高次元方程式，つまり

$$\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi_t^2}{\phi_x^2}\right)_x - 2\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)_{xx} + \Big(S_{\text{高次元}}[\phi;x]\Big)_x = 0 \qquad (\phi = \phi(x,z,t)) \tag{3.35}$$

は可積分であろうか？ 残念ながらそうではない．方程式 (3.35) は場の量 $u = u(x,z,t)$ でうまく書き直すことは出来ず，そのまま Painlevé テストをしてもテストをパスしない．つまりこの例では予想は正しくない．それではこの場合 $S_{\text{高次元}}[\phi;x]$ は何の役にも立たないのか？ いや，そうでもない事を以下で見ていく．

もう一度方程式 (3.35) をよく眺めると次数の違いに気がつく．つまり方程式 (3.35) には 4 つの項があるが，左から三項目の $(\frac{\phi_t}{\phi_x})_{xx}$ だけが残りの項と次数が異なる．そこで次数を揃えるという意味で第三項を $(\frac{\phi_t}{\phi_x})_{xz}$ としたもの つまり

$$\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi_t^2}{\phi_x^2}\right)_x - 2\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)_{xz} + \Big(S_{\text{高次元}}[\phi;x]\Big)_x = 0 \qquad (\phi = \phi(x,z,t)) \tag{3.36}$$

を考える．するとこの方程式 (3.36) は場の量 $u = u(x,z,t)$ を用いて

$$u_t + u_{xz} + uu_z + u_x(\partial_x^{-1} u_z) = 0 \tag{3.37}$$

と書き直すことができる[14]．また，

（i） 線形化可能

Cole-Hopf 変換 (3.31)（ただしこの場合は $f = f(x,z,t)$ である）により方程式 (3.37) は

$$f_t + f_{xz} = 0 \tag{3.38}$$

[14] 実はこの方程式は Cole-Hopf 変換と拡散方程式を Lax 対のようなものだと考えて高次元化することで，以前に得られていた方程式そのものである．

と線形方程式（拡散方程式）に帰着される. この方程式 (3.38) は厳密解

$$f(x,z,t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \exp(p_j x + q_j z + r_j t + s_j) \tag{3.39}$$

を持つ. ただし p_j, q_j そして s_j は任意の定数であり かつ $r_j = -p_j q_j$ を満たさなければならない.

（ii） **Painlevé テストをパスする.**

（iii） **recursion operator が知られている.**

という事実が確かめられる. つまり方程式 (3.36) は Burgers 方程式の可積分性を保持したまま高次元化した方程式 (3.37) を与えることが結論づけられる.

以上より予想が正しくない例が存在することが示された. しかしこの **(予想)** で得られた方程式に近い形[15] で可積分性が保証されるということは, この予想は少し修正すれば正しいのかもしれない.

4 結言

筆者は可積分性を保持したまま低次元から高次元に拡張される際の「世襲される性質」と「消滅する性質」, 及び「新しく生まれる性質」を探求することを研究の目的の一つにしている. この小論では筆者が共同研究者と以前に提案した予想を確かめた研究の現在までに得られた結果の簡単な報告をした. そして残念ながらこの予想のままでは正しくないことが分かった. しかし少しの修正で正しくなる可能性もある. そこで修正した予想を再提案したい.

（修正予想）

Schwarz 形式をもつ $(1+1)$ 次元可積分方程式の Schwarz 微分で書かれた項を高次元 Schwarz 因子で書き直し, 方程式全体の次数を揃えることで可積分性を保持したまま $(2+1)$ 次元に拡張 (つまり高次元化) できる

である. 現在この修正予想が正しいかどうか考察中である. この修正予想が正しければ, Lax 対の高次元化に向いていない $(1+1)$ 次元可積分方程式についての高次元化の一つの有用な道具（ツール）になり得る. ところで「非可換代数で定義されたソリトン方程式」,「超対称性を持つソリトン方程式」及び「半整数階微分演算子をもつ Lax 対から導出されるソリトン方程式」についても応用できる可能性も出てきている. 更にもし修正予想が正しければ, その背後に隠れている数理構造は何か？ Schwarz 形式で書けることと Lax 対や Painlevé 性との間に何か関係があるのか？ 等々追求・考察すべき課題はたくさんある. これらの報告はいずれこの研究集会で行いたい.

謝辞

筆者に本研究集会で発表する機会を下さいました世話人の田中光宏先生（岐阜大・工）に御礼を申し上げます. 第3章で紹介した結果は慶應義塾大学在職中に得られたものであり, 普段自由に研究する環境を提供して下さった表 實先生をはじめ日吉物理学教室の諸先生に感謝します. また論文 [20]

[15] 今の場合は次数を揃えれば良い.

について議論して下さいました S.-Y. Lou 教授（上海）に感謝します．本研究の発想を得た時に貴重な意見を頂きました A. Parker 博士（ニューキャッスル），M. Boiti 教授（レッチェ），R. Conte 教授（パリ），A. Degasperis 教授（ローマ），X.-B. Hu 教授（北京） 及び S.-J. Yu 博士（大阪）に御礼を申し上げます．最後に本研究は平成１３年度笹川科学研究助成（日本科学財団）の補助により進められたものであることを附記しておきます．

参考文献

[1] この定理についての文献はいろいろある．ここでは可積分系について詳しく論述しているものを紹介しておく： 大貫 義郎・吉田 春夫,「力学」(岩波講座現代の物理学１), 岩波書店, 1994.

[2] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095 (1967).

[3] P. D. Lax, *Commun. Pure Appl. Math.* **21**, 467 (1968).

[4] M. Blaszak,「*Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems*」, Springer-Verlag, 1998.

[5] 広田 良吾,「直接法によるソリトンの数理」, 岩波書店, 1992.

[6] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson,「Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering」, Cambridge University Press, 1991.

[7] 川原 琢治,「ソリトンからカオスへ」, 朝倉書店, 1993.

[8] これらの定義についての文献もいろいろある．代表的なものを挙げておく：

- V. E. Zakharov（編），「What Is Integrability?」, Springer-Verlag, 1990,
- 和達 三樹,「非線形波動」(岩波講座現代の物理学１４), 岩波書店, 1992.

[9] J. Weiss, J. Math. Phys. 24, 1405 (1983).

[10] G. Wilson, Phys. Lett. A 132, 445 (1988).

[11] K. Toda, 現在論文作成中.

[12] K. Toda and S.-J. Yu, *J. Maths. Phys.* **41**, 4747 (2000).

[13] K. Toda and S.-J. Yu, *Inverse Problems* **17**, 1053 (2001).

[14] S.-J. Yu, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama, *J. Phys.* A **31**, 3337 (1998).

[15] S.-J. Yu, K. Toda and T. Fukuyama, *J. Phys.* A **31**, 10181 (1998).

[16] S.-J. Yu, K. Toda and T. Fukuyama, *Reps. Maths. Phys.* **44**, 241 (1999).

[17] S.-J. Yu and K. Toda, *J. Nonlinear Maths. Phys.* **7**, 1 (2000).

[18] M. C. Nucci, *J. Phys.* A **22**, 2897 (1989).

[19] S.-J. Yu, K. Toda and T. Fukuyama, *Theor. and Math. Phys.* **122**, 256 (2000).

[20] S.-Y. Lou, X.-Y. Tang, Q. P. Liu and T. Fukuyama, プレプリント Solv-Int 0108045.