数理解析研究所講究録 1273 巻 2002 年 53-77

On the Allocation of Two and Three Treatments in Bernoulli and Normal Trials

筑波大·数理物質科学 大和田章一 (Shoichi Ohwada)
筑波大·数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1. はじめに

医薬学において，薬効実験は極めて重要であるが，臨床試験においては治験者に対して苦痛を伴うことも多い．そこで，複数の薬の効果を調べる際に，治験者に対する薬の効率的な投与方式を理論的に考察することは重要になる (Armitage[A75])．そのような背景の下に，本論では，上記の問題をもっと一般的に，2処理および3処理割り当て実験問題と捉えて考える．

ある未知の成功率を持ついくつかの処理があり，その処理に対象を与えて実験を行い成功率を比較する．このとき，実験計画として，初めに対象全体の一部を割り当てて実験を行い，最も高い成功率を持つ処理 (最良の処理) と判定し，残りの対象はその処理に割り当てるものとする．ここで，対象全体を各処理に均等にすべて割り当てたときが真に最良の処理を選択する確率 (選択確率) が最大となるのだが，これでは最良ではない処理にも数多くの対象を割り当ててしまうので対象の犠牲を考慮した場合にはあまり好ましい割り当て方とは言えない．そこで，本論では対象の犠牲をできるだけ少なくすることに重点をおき，比較実験を行った場合の割り当て方のルールを定める．そして，そのルールの下で，リグレット (regret) を定義し，それに関するミニマックス (minimax) 解を求めることによって，実際の割り当て方を決める．

第2節では，Bather [B85] に基づいて2項試行による2処理割り当て実験において，適当なルールの下で，処理1または処理2を最良と判定する確率について述べた上で，本論ではリグレットのミニマックス解について，数値的評価を含めて考察する．

第3節では，第2節での議論を2項試行に基づく3処理割り当て実験の場合に拡張し (大和田他 [OAT01])，第4節では，Akahira, Takeuchi and Ohwada [ATO02] に従って，正規分布に従う試行 (正規試行) に基づく3処理割り当て実験についてもリグレットのミニマックス解について考察する．

2. 2項試行に基づく2処理割り当て実験

ある実験の対象の数を N とし，その中から2つの処理 $1, 2$ にそれぞれ，対象として，n ずつを割り当てて実験を行う．ただし，$2n \leq N$ とする．本節では，Bather [B85] に基づいて，この実験におけるリグレットのミニマックスについて考察する．いま，各処理 $j = 1, 2$ によって得られる実験結果 $X_{j1}, \cdots, X_{jn}$ は互いに独立にベルヌーイ (Bernoulli) 分布 $Ber(p_1)^{1)}, Ber(p_2)$ に従うものとする，すなわち

$$X_{j1}, \cdots, X_{jn} \overset{i.i.d.^{2)}}{\sim} Ber(p_j) \qquad (j = 1, 2)$$

注 1) $Ber(p) \Leftrightarrow$ 確率関数 $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$ $(x = 0, 1; 0 < p < 1)$ をもつベルヌーイ (Bernoulli) 分布
注 2) $i.i.d.$ は independently and identically distributed の略
注 3) $U(a, b) \Leftrightarrow$ 密度関数 $f(x) = 1/(b-a)$ $(a < x < b); = 0$ (その他) をもつ区間 (a, b) 上の一様分布

とする．このとき，$Y_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ji}$ $(j=1,2)$ とし，次のルールＩを用いて最良の処理を判定する．

ルールＩ： Y_1, Y_2 とは独立に $U_1, U_2 \overset{i.i.d}{\sim} U(-1/2, 1/2)$[3] とし，$Z_j := Y_j + U_j$ $(j=1,2)$ とする．このとき

$$\begin{cases} Z_1 \geq Z_2 \Rightarrow \text{処理 1 を最良,} \\ Z_1 < Z_2 \Rightarrow \text{処理 2 を最良} \end{cases}$$

と判定し，残りの対象 $N-2n$ は最良と判定された処理に割り当てて実験を行う．

このルールＩの下で処理１を最良と判定する確率 (選択確率)$\rho_1 = \rho_1(p_1, p_2)$ は

$$\begin{aligned} \rho_1 &= P\{Z_1 > Z_2\} \\ &= P\{Y_1 > Y_2\} + \frac{1}{2} P\{Y_1 = Y_2\} \\ &= E^{Y_2}\left[P\{Y_1 > Y_2 | Y_2\}\right] + \frac{1}{2} E^{Y_2}\left[P\{Y_1 = Y_2 | Y_2\}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{l} p_1^l (1-p_1)^{n-l} p_2^k (1-p_2)^{n-k} \\ &\qquad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} p_1^k (1-p_1)^{n-k} p_2^k (1-p_2)^{n-k} \end{aligned}$$

となる．また，処理２を最良と判定する確率 $\rho_2 = \rho_2(p_1, p_2)$ は $\rho_2 = 1 - \rho_1$ となる．

このとき，ρ_1, ρ_2 について次のことが成り立つ．

補題 2.1 ([B85]). $\delta := |p_1 - p_2|$ とし，$p_1' := (1+\delta)/2, p_2' := (1-\delta)/2$ とするとき，

$$\rho_2(p_1, p_2) \leq \rho_2(p_1', p_2')$$

が成り立つ．

証明 $p_1 \geq p_2$ のときのみを考えれば十分である．そこで，

$$X_{j1}', \cdots, X_{jn}' \overset{i.i.d.}{\sim} Ber(p_j') \qquad (j=1,2)$$

とし，$Y_j' := \sum_{i=1}^{n} X_{ji}'$ $(j=1,2)$ とする．また，$S_i := X_{2i} - X_{1i}$, $S_i' := X_{2i}' - X_{1i}'$ $(i=1,\cdots,n)$ とおき，$S := \sum_{i=1}^{n} S_i = Y_2 - Y_1$, $S' := \sum_{i=1}^{n} S_i' = Y_2' - Y_1'$ とする．このとき，各 $i = 1, \cdots, n$ について，S_i, S_i' の分布は，それぞれ

$$P\{S_i = s\} = \begin{cases} (1-p_1)p_2 =: u & (s=1), \\ p_1 p_2 + (1-p_1)(1-p_2) =: v & (s=0), \\ p_1(1-p_2) =: w & (s=-1), \end{cases}$$

$$P\{S_i' = s\} = \begin{cases} (1-p_1')p_2' =: u' & (s=1), \\ p_1' p_2' + (1-p_1')(1-p_2') =: v' & (s=0), \\ p_1'(1-p_2') =: w' & (s=-1) \end{cases}$$

となる．ここで，$\eta := (p_1+p_2-1)^2/4$ とおくことにより $u' = u+\eta, v' = v-2\eta, w' = w+\eta$ と表すことができる．そして，各 $i = 1, \cdots, n$ について，S_i を与えたときの条件付分布が

$$P\{M_i = s|S_i = \pm 1\} = \begin{cases} 1 & (s=0), \\ 0 & (s \neq 0), \end{cases}$$

$$P\{M_i = s|S_i = 0\} = \begin{cases} \eta/v & (s=1), \\ 1-2\eta/v & (s=0), \\ \eta/v & (s=-1), \end{cases}$$

となる確率変数 M_i を考えると，$S_i' = S_i + M_i$ となるので，$M := \sum_{i=1}^n M_i$ とおくと $S' = S+M$ となる．このとき，確率変数 R を $S_1, \cdots, S_n$ における 0 の個数として，以下の確率を計算すると

$$\begin{aligned} f(r,s) &:= P\{R=r, S=s\} \\ &= \frac{n!}{\alpha! r! (n-\alpha-r)!} u^\alpha v^r w^{(n-\alpha-r)} \qquad \left(\alpha = \frac{n+s-r}{2}\right), \\ g(r,m) &:= P\{M=m|R=r\} \\ &= \frac{r!}{\alpha!\beta!\gamma!} \left(\frac{\eta}{v}\right)^\alpha \left(1-\frac{2\eta}{v}\right)^\beta \left(\frac{\eta}{v}\right)^\gamma \qquad \left(\begin{array}{c} \alpha+\beta+\gamma = r, \\ \alpha-\gamma = m \end{array}\right), \end{aligned}$$

になる．ただし，$r = 0, 1, \cdots, n,\ s = -n+r, -n+r+2, \cdots, n-r$ とする．これより，$g(r,m) = g(r,-m)$ は明らかであり，また

$$f(r,-s) = \frac{n!}{\alpha'! r! (n-\alpha'-r)!} u^{\alpha'} v^r w^{(n-\alpha'-r)} \qquad \left(\alpha' = \frac{n-s-r}{2}\right)$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{f(r,s)}{f(r,-s)} &= \frac{\alpha'!(n-\alpha'-r)!}{\alpha!(n-\alpha-r)!} \frac{u^\alpha w^{n-\alpha-r}}{u^{\alpha'} w^{n-\alpha'-r}} \\ &= \frac{u^\alpha w^{\alpha'}}{w^\alpha u^{\alpha'}} = \left(\frac{u}{w}\right)^{\alpha-\alpha'} = \left(\frac{u}{w}\right)^s \end{aligned}$$

になる．このとき，$u - w = (1-p_1)p_2 - p_1(1-p_2) = p_2 - p_1 < 0$ であるから，$s > 0$ のときは常に $f(r,s) \le f(r,-s)$ をみたす．よって，$\rho_2(p_1,p_2), \rho_2(p_1',p_2')$ は

$$\begin{aligned} \rho_2(p_1,p_2) &= P\{S>0\} + \frac{1}{2}P\{S=0\} \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{s>0} f(r,s) + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^n f(r,0), \\ \rho_2(p_1',p_2') &= P\{S'>0\} + \frac{1}{2}P\{S'=0\} \\ &= P\{M>-S\} + \frac{1}{2}P\{M=-S\} \\ &= E\left[P\{M>-S|R=r\} + \frac{1}{2}P\{S'=0|R=r\}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{n} \sum_{s} f(r,s) \left\{ \sum_{m>-s} g(r,m) + \frac{1}{2} g(r,-s) \right\} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \sum_{s>0} f(r,s) \left\{ \sum_{m>-s} g(r,m) + \frac{1}{2} g(r,-s) \right\} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n} f(r,0) \left\{ \sum_{m>0} g(r,m) + \frac{1}{2} g(r,0) \right\} \\
&\qquad + \sum_{r=0}^{n} \sum_{s<0} f(r,s) \left\{ \sum_{m>-s} g(r,m) + \frac{1}{2} g(r,-s) \right\} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \sum_{s>0} f(r,s) \left\{ 1 - \sum_{m>s} g(r,m) - \frac{1}{2} g(r,s) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n} f(r,0) + \sum_{r=0}^{n} \sum_{s>0} f(r,-s) \left\{ \sum_{m>s} g(r,m) + \frac{1}{2} g(r,s) \right\}
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
\rho_2(p_1', p_2') - \rho_2(p_1, p_2) &= \sum_{r=0}^{n} \sum_{s>0} \{ f(r,-s) - f(r,s) \} \left\{ \sum_{m>s} g(r,m) + \frac{1}{2} g(r,s) \right\} \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

になる．

補題 2.2 ([B85]). $p_1 := (1+\delta)/2$, $p_2 := (1-\delta)/2$ とする．このとき，n が大きいならば，処理 1 を選択する確率 ρ_1 は

$$
\rho_1 \approx \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{2n}}{\sqrt{1-\delta^2}} \right)
$$

と近似できる．ただし，$\delta := |p_1 - p_2|$ であり，$\Phi(\cdot)$ は $N(0,1)$ の累積分布関数 (c.d.f.) とする．

証明　まず，$Y_j \sim B(n, p_j)$ $(j = 1, 2)$ なので，n が大きいときには

$$
W_j := \frac{Y_j - np_j}{\sqrt{np_j(1-p_j)}} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,1) \qquad (j = 1, 2)
$$

となる．これより，n が大きいとき

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &\approx P\left\{ \frac{Y_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} - \frac{Y_2 - np_2}{\sqrt{np_2(1-p_2)}} \geq \frac{np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} - \frac{np_2}{\sqrt{np_2(1-p_2)}} \right\} \\
&= P\left\{ W_1 - W_2 \geq \frac{2\delta\sqrt{n}}{\sqrt{1-\delta^2}} \right\} \\
&= P\left\{ \frac{W_1 - W_2}{\sqrt{2}} \geq \frac{\delta\sqrt{2n}}{\sqrt{1-\delta^2}} \right\} = \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{2n}}{\sqrt{1-\delta^2}} \right)
\end{aligned}
$$

以下の表1から表4と図1から図4はp_1, p_2を与えたときの各nに対する選択確率$\rho_1(p_1, p_2)$の値と，補題2.1で挙げられているp'_1, p'_2に対する選択確率$\rho_1(p'_1, p'_2)$の値を示している．ここで，常に$\rho_1 + \rho_2 = 1$が成り立っているので，補題2.1より$\rho_1(p_1, p_2) \geq \rho_1(p'_1, p'_2)$となっていることがわかる．

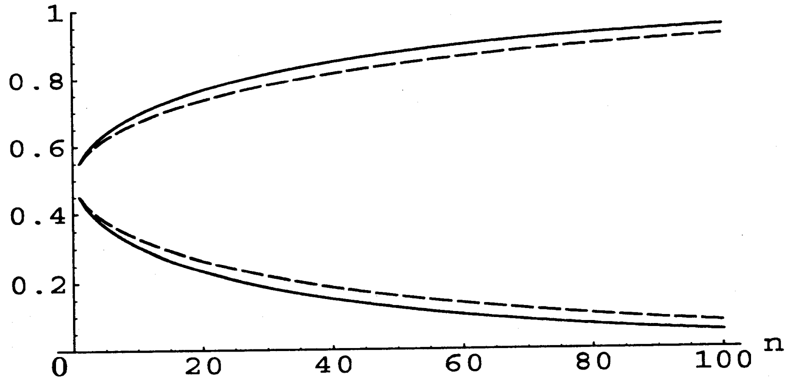

図1 $p_1 = 0.30, p_2 = 0.20$のときの選択確率

———— $\rho_1(p_1, p_2)$ ---- $\rho_2(p_1, p_2)$

------------ $\rho_1(p'_1, p'_2)$ ------- $\rho_2(p'_1, p'_2)$

表1 $p_1 = 0.30, p_2 = 0.20$のときの選択確率

n	1	3	5	10	20	30	50	100
$\rho_1(p_1, p_2)$	0.550	0.604	0.637	0.694	0.766	0.814	0.876	0.949
$\rho_1(p'_1, p'_2)$	0.550	0.593	0.621	0.671	0.736	0.780	0.841	0.922

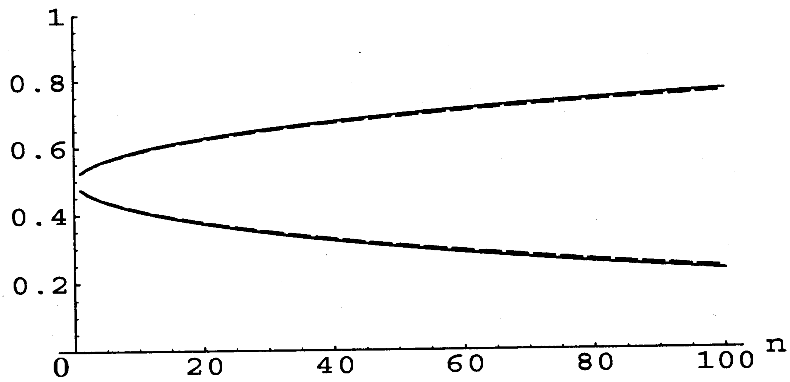

図2 $p_1 = 0.40, p_2 = 0.35$のときの選択確率

———— $\rho_1(p_1, p_2)$ ---- $\rho_2(p_1, p_2)$

------------ $\rho_1(p'_1, p'_2)$ ------- $\rho_2(p'_1, p'_2)$

表2 $p_1 = 0.40, p_2 = 0.35$ のときの選択確率

n	1	3	5	10	20	30	50	100
$\rho_1(p_1, p_2)$	0.525	0.548	0.563	0.590	0.627	0.655	0.697	0.767
$\rho_1(p_1', p_2')$	0.525	0.547	0.561	0.587	0.623	0.650	0.691	0.760

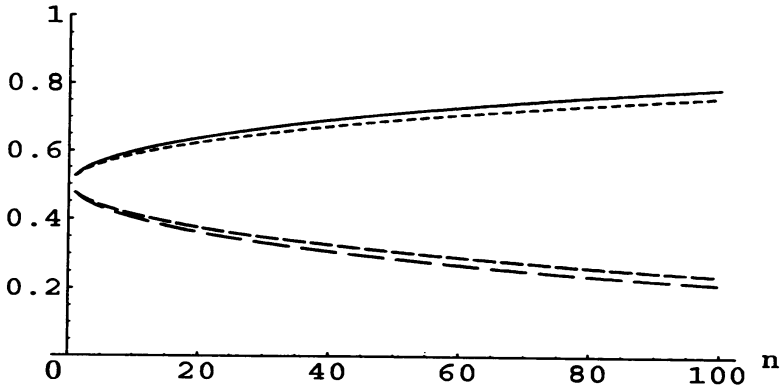

図3 $p_1 = 0.75, p_2 = 0.70$ のときの選択確率

——— $\rho_1(p_1, p_2)$ – – – – $\rho_2(p_1, p_2)$

------- $\rho_1(p_1', p_2')$ — — — $\rho_2(p_1', p_2')$

表3 $p_1 = 0.75, p_2 = 0.70$ のときの選択確率

n	1	3	5	10	20	30	50	100
$\rho_1(p_1, p_2)$	0.525	0.551	0.568	0.597	0.637	0.667	0.712	0.786
$\rho_1(p_1', p_2')$	0.525	0.547	0.561	0.587	0.623	0.650	0.691	0.760

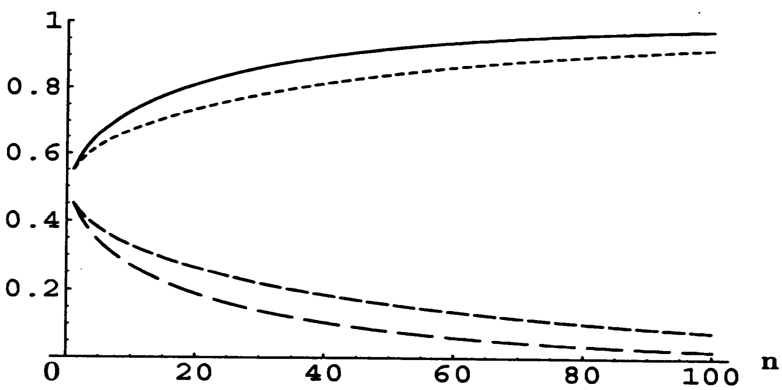

図4 $p_1 = 0.90, p_2 = 0.80$ のときの選択確率

——— $\rho_1(p_1, p_2)$ – – – – $\rho_2(p_1, p_2)$

------- $\rho_1(p_1', p_2')$ — — — $\rho_2(p_1', p_2')$

表 4　$p_1 = 0.90, p_2 = 0.80$ のときの選択確率

n	1	3	5	10	20	30	50	100
$\rho_1(p_1, p_2)$	0.550	0.616	0.659	0.729	0.811	0.861	0.921	0.977
$\rho_1(p'_1, p'_2)$	0.550	0.593	0.621	0.671	0.736	0.780	0.841	0.922

図1から図4より，p_1, p_2 が既知の場合には最良の処理を選択する確率 (今の場合では ρ_1) をある一定以上にするための n の値を決定することができる．例えば，表 1, 図 1 において $\rho_1 \leq 0.8$ とする最小の n の値は $n = 27$ である．この n の値は当然 p_1, p_2 の差が大きいときにはある程度小さく，差が小さくなるに従って大きくなってしまう．差が大きいときには小さな n でも最良の処理を選択してくれるのであまり問題はないが，差が小さいときには数多くの n を割り当てなければ最良の処理を選択しにくくなってしまう．しかし，一方，多くの n を割り当てるということは最良ではない処理にも数多くの対象を割り当ててしまうことになるのであまり好ましくない．また，p_1, p_2 が未知の場合には，このように最良の処理を選択する確率をある一定以上にするように n をとるのは不可能である．

そこで，p_1, p_2 が未知の場合に以下のような意味のあるリグレット (regret) R_n を定義し，R_n がミニマックス (minimax) となるような n の値を求める．

定義 2.1 (リグレット) ルール I に対するリグレット R_n を

$$R_n := n\{2p^* - (p_1 + p_2)\} + (N - 2n)\{(p^* - p_1)\rho_1 + (p^* - p_2)\rho_2\} \tag{2.1}$$

によって定義する．ただし，$p^* = \max_{j=1,2} p_j$ とする．

これは，本来ならば全ての対象を最良の処理に割り当てたいのだが，実際には 2 つの処理に割り当てたために生じてしまった成功数の平均損失と見なされる．ここで，(2.1) の右辺の第 1 項は初めに割り当てた対象 n に対する損失となっていて，第 2 項は最良と判定された処理に割り当てた残りの対象 $N - 2n$ の損失となっている．このとき，R_n のミニマックス (minimax)

$$\inf_n \sup_{p_1, p_2} R_n \tag{2.2}$$

を考えて，これをみたす n を決定する．

まず，R_n は p_1, p_2 に関して対称なので $p_1 \geq p_2$ と仮定して考えてよい．このとき，$\delta := p_1 - p_2$ とおくと，(2.1) は

$$R_n = n\delta + (N - 2n)\delta\rho_2$$

となる．ここで，R_n は補題 2.1 より $p_1 = (1 + \delta)/2, p_2 = (1 - \delta)/2$ のとき最大となるので，(2.2) は

$$\inf_n \sup_\delta \left\{ n\delta + (N - 2n)\delta\rho_2\left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2}\right) \right\} \tag{2.3}$$

となる．また，n が大きいとき，補題 2.2 を用いて

$$\inf_n \sup_\delta \left\{ n\delta + (N - 2n)\delta\Phi\left(-\frac{\delta\sqrt{2n}}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \right\} \tag{2.4}$$

と近似的に表すこともできる．ここで，(2.3) をみたす n, δ を数値的に求めて，表 5 のようにま

表5 リグレット R_n のミニマックス解 n

N	50	100	200	300	500	700	1000
n	4	6	9	11	16	20	25
δ	1.0000	1.0000	0.2048	0.1800	0.1472	0.1302	0.1152
R	4.0000	6.0000	9.0446	11.9876	16.3437	20.2704	25.6480

表3から，p_1, p_2 が未知のときに対象全体 N に対する割り当て数のミニマックス解 n を求めることができる．また，ここで，δ の条件 $\delta \leq c$ $(0 < c \leq 1)$ の下で，ミニマックス解を求めることも意味がある．すなわち

$$\inf_n \sup_{\delta \leq c} \left\{ n\delta + (N - 2n)\delta\rho_2\left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2}\right)\right\}$$

をみたす n を求めることができる．表6は $c = 0.02,\ 0.06,\ 0.10,\ 0.20$ のときのミニマックス解である．

表6 c を与えたときの R_n のミニマックス解 n

$c = 0.02$

N	50	100	200	300	500	700	1000
n	8	17	33	50	82	114	162
δ	0.0200	0.0200	0.0200	0.0200	0.0200	0.0200	0.0200
R	0.4787	0.9317	1.8277	2.6837	4.3217	5.8808	8.1006

$c = 0.06$

N	50	100	200	300	500	700	1000
n	8	16	32	46	74	99	133
δ	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600
R	1.3093	2.4616	4.4996	6.2897	9.3587	11.9442	15.1984

$c = 0.10$

N	50	100	200	300	500	700	1000
n	8	16	29	41	62	79	103
δ	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.9643
R	1.9781	3.5504	6.0746	8.0833	11.1864	13.5460	16.2824

$c = 0.20$

N	50	100	200	300	500	700	1000
n	7	13	22	31	48	62	80
δ	0.2000	0.2000	0.2000	0.1676	0.1215	0.1001	0.0830
R	3.0477	4.8758	7.2493	8.8969	11.5591	13.8387	16.9005

表6より，c の値が小さいか，もしくは N の値が小さいならば，ミニマックスとなる δ は $\delta = c$ となっていることがわかる．また，ミニマックス解 n の値は，N の約1割から2割となってい

て，c, N の値がともに小さいときには，n は N の約6分の1となっていることもわかる．つまり，実験を行う際に N の3分の1の対象を2つの処理に割り当てて実験を行い，残りの3分の2の対象は最良と判定された処理に割り当てるのがよいと言える．

3. 2項試行に基づく3処理割り当て実験

2処理の場合と同様に実験対象全体を N とし，その中から処理1,2,3にそれぞれ n ずつを割り当てて実験を行う．ただし，$3n \leq N$ とする．本節では，この実験におけるリグレットのミニマックスについて考察する ([OAT01])．いま，各処理 $j = 1, 2, 3$ によって得られる実験結果 $X_{j1}, \cdots, X_{jn}$ は互いに独立にベルヌーイ分布 $Ber(p_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ に従うものとする．すなわち，

$$X_{j1}, \cdots, X_{jn} \overset{i.i.d.}{\sim} Ber(p_j) \qquad (j = 1, 2, 3)$$

とする．このとき，$Y_j := \sum_{i=1}^{n} X_{ji}$ $(j = 1, 2, 3)$ とし，次のルールIIを用いて最良の処理を判定する．

ルールII： Y_1, Y_2, Y_3 とは独立に $U_1, U_2, U_3 \overset{i.i.d}{\sim} U(-1/2, 1/2)$ とし，

$$Z_j := Y_j + U_j \ \ (j = 1, 2, 3)$$

とする．このとき，

$$Z_{j^*} = \max_{1 \leq j \leq 3} Z_j$$

となる処理 j^* を最良の処理と判定し，残りの対象 $N - 3n$ は処理 j^* に割り当てて実験を行う．

このルールIIの下で処理1が最良と判定される確率 $\rho_1 = \rho_1(p_1, p_2, p_3)$ は

$$\begin{aligned} \rho_1 &= P\{Y_1 > Y_2 > Y_3\} + P\{Y_1 > Y_3 > Y_2\} \\ &\quad + P\{Y_1 > Y_2 = Y_3\} + \frac{1}{2}P\{Y_1 = Y_2 > Y_3\} \\ &\quad + \frac{1}{2}P\{Y_1 = Y_3 > Y_2\} + \frac{1}{3}P\{Y_1 = Y_2 = Y_3\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

となる．

定理 3.1 処理1が最良を判定される確率 ρ_1 は

$$\begin{aligned} \rho_1 = &\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=k+1}^{n-1} \sum_{m=l+1}^{n} \{g(m, l, k) + g(m, k, l)\} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} g(l, k, k) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \{g(l, l, k) + g(l, k, l)\} + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} g(k, k, k) \end{aligned}$$

である．ただし，

$$g(x_1, x_2, x_3) := \Pi_{j=1}^{3} f_j(x_j), \quad f_j(x) := \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p_j^x (1 - p_j)^{n-x} \quad (j = 1, 2, 3)$$

証明 (3.1) の右辺の第 1 項は

$$\begin{aligned}P\{Y_1 > Y_2 > Y_3\} &= E^{Y_3}\left[P\{Y_1 > Y_2 > Y_3 | Y_3\}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} P\{Y_1 > Y_2 > k\} f_3(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} E^{Y_2}\left[P\{Y_1 > Y_2 | Y_2 > k\}\right] f_2(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1} P\{Y_1 > l\} f_2(l) f_3(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1}\sum_{m=l+1}^{n} f_1(m) f_2(l) f_3(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1}\sum_{m=l+1}^{n} g(m,l,k)\end{aligned}$$

となる．また，右辺の残りの 5 つの項についても同様に計算できる．

系 3.1 n が大きいとき，処理 1 が最良と判定される確率 ρ_1 は

$$\begin{aligned}\rho_1 \approx \frac{1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x+\sqrt{n}(p_1-p_2)}{\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right) \\ \cdot \Phi\left(\frac{x+\sqrt{n}(p_1-p_3)}{\sqrt{p_3(1-p_3)}}\right) \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right) dx\end{aligned}$$

と近似できる．ただし，$\Phi(\cdot), \varphi(\cdot)$ は $N(0,1)$ の c.d.f., p.d.f. とする．

証明 各 $j=1,2,3$ に対して，

$$W_j := \frac{Y_j - np_j}{\sqrt{n}}$$

とおくと，n が大きいとき，W_j は漸近的に $N(0, p_j(1-p_j))$ に従う．これより，$Y_j = \sqrt{n}W_j + np_j$ なので，n が大きいとき

$$\begin{aligned}\rho_1 &\approx Pr\{Y_2 \geq Y_1,\ Y_2 \geq Y_3\} \\ &= Pr\left\{\sqrt{n}W_1 + np_1 \geq \sqrt{n}W_2 + np_2,\ \sqrt{n}W_1 + np_1 \geq \sqrt{n}W_3 + np_3\right\} \\ &= Pr\left\{W_2 \leq W_1 + \sqrt{n}(p_1-p_2),\ W_3 \leq W_1 + \sqrt{n}(p_1-p_3)\right\} \\ &= E^{W_1}\left[Pr\{W_2 \leq W_1 + \sqrt{n}(p_1-p_2),\ W_3 \leq W_1 + \sqrt{n}(p_1-p_3) | W_1\}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{W_2}\left(w_1 + \sqrt{n}(p_1-p_2)\right) F_{W_3}\left(w_1 + \sqrt{n}(p_1-p_3)\right) f_{W_1}(w_1)\, dw_1 \qquad (3.2)\end{aligned}$$

になる．ただし，各 $j=1,2,3$ について，F_{W_j}, f_{W_j} はそれぞれ $N(0, p_j(1-p_j))$ の c.d.f. と p.d.f. とする．ここで，

$$F_{W_2}\left(w_1+\sqrt{n}(p_1-p_2)\right)=\Phi\left(\frac{w_1+\sqrt{n}(p_1-p_2)}{\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right)$$
$$F_{W_3}\left(w_1+\sqrt{n}(p_1-p_3)\right)=\Phi\left(\frac{w_1+\sqrt{n}(p_1-p_3)}{\sqrt{p_3(1-p_3)}}\right)$$
$$f_{W_1}(w_1)=\frac{1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\varphi\left(\frac{w_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right)$$

なので，n が大きいとき

$$\rho_1 \approx \frac{1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{x+\sqrt{n}(p_1-p_2)}{\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right) \cdot \Phi\left(\frac{x+\sqrt{n}(p_1-p_3)}{\sqrt{p_3(1-p_3)}}\right)\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right)dx$$

になる．

定理 3.1 より，2 処理のときと同様に p_1,p_2,p_3 が既知のときには，各 n に対する選択確率 ρ_1,ρ_2,ρ_3 が計算できる．以下の表7，表8と図5，図6は p_1,p_2,p_3 がさまざまな値のときの選択確率を表している．

表 7　$p_1=0.52, p_2=0.50, p_3=0.48$ のときの選択確率

n	1	3	5	10	20	30	50	100
ρ_1	0.3484	0.3617	0.3707	0.3871	0.4101	0.4278	0.4558	0.5065
ρ_2	0.3332	0.3327	0.3323	0.3312	0.3290	0.3269	0.3226	0.3122
ρ_3	0.3184	0.3055	0.2970	0.2817	0.2608	0.2453	0.2216	0.1813

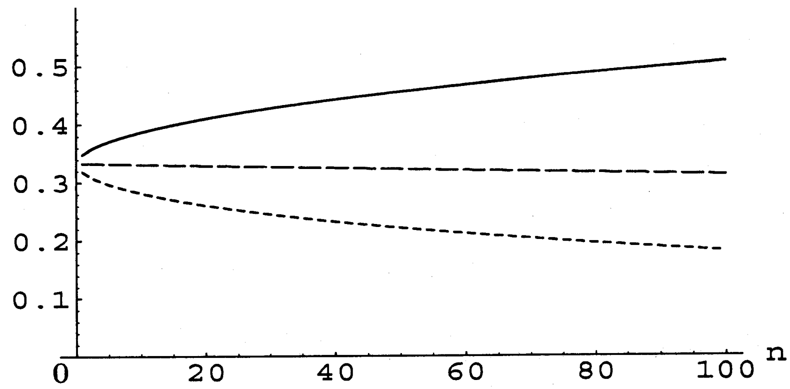

図 5　$p_1=0.52, p_2=0.50, p_3=0.48$ のときの選択確率

——— ρ_1 - - - - - ρ_2 --------- ρ_3

表 8 $p_1 = 0.60, p_2 = 0.50, p_3 = 0.40$ のときの選択確率

n	1	3	5	10	20	30	50	100
ρ_1	0.4100	0.4786	0.5235	0.6008	0.6963	0.7573	0.8334	0.9217
ρ_2	0.3300	0.3188	0.3084	0.2841	0.2421	0.2072	0.1538	0.0771
ρ_3	0.2600	0.2026	0.1681	0.1151	0.0616	0.0354	0.0128	0.0012

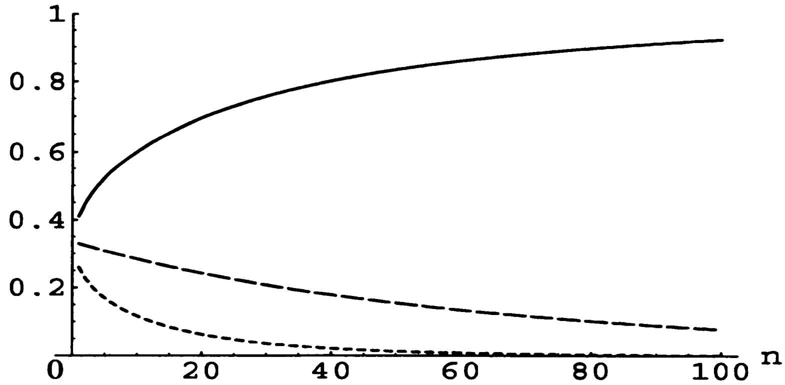

図 6 $p_1 = 0.60, p_2 = 0.50, p_3 = 0.40$ のときの選択確率

——— ρ_1 ------ ρ_2 --------- ρ_3

2 処理の場合と同様に，図 5，図 6 より p_1, p_2, p_3 が既知の場合には最良の処理を選択する確率 (今の場合では ρ_1) をある一定以上にするために n を決定することはできる．例えば，表 8，図 6 において $\rho_1 \leq 0.8$ とする最小の n の値は $n = 40$ である．2 処理の場合同様，割り当てる n の数を多くすればそれだけ ρ_1, ρ_2, ρ_3 の差は明確に現れるが，最良ではない処理にも数多くの n を割り当ててしまうので好ましくない．そこで 2 処理の場合と同様に，次のようなリグレット R_n を定義し，R_n のミニマックス解を求める．

定義 3.1 (リグレット) ルール II に対するリグレット R_n を

$$R_n := n\{3p^* - (p_1 + p_2 + p_3)\} \\ + (N - 3n)\{(p^* - p_1)\rho_1 + (p^* - p_2)\rho_2 + (p^* - p_3)\rho_3\} \tag{3.3}$$

によって定義する．ただし，$p^* = \max_{j=1,2,3} p_j$ とする．

このとき，リグレット R_n のミニマックス

$$\inf_n \sup_{p_1,p_2,p_3} R_n \tag{3.4}$$

について考える．まず，R_n は p_1, p_2, p_3 に関して対称なので，$p_1 \geq p_2 \geq p_3$ と仮定してもよい．このとき，

$$R_n = n(2p_1 - p_2 - p_3) + (N - 3n)\{(p_1 - p_2)\rho_2 + (p_1 - p_3)\rho_3\}$$

となるので，$r_1 := 2p_1 - p_2 - p_3, r_2 := (p_1 - p_2)\rho_2 + (p_1 - p_3)\rho_3$ とおくと

$$R_n = nr_1 + (N - 3n)r_2$$

となる．ここで，$r_1 = 2\delta$ と固定して考える．すなわち

$$\begin{cases} p_1 = \alpha, \\ p_2 = \alpha - \delta + t, \\ p_3 = \alpha - \delta - t \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} 0 < \alpha < 1, \\ 0 \leq \delta < \alpha/2, \\ 0 \leq t < \delta \end{array} \right)$$

とするとき，(3.4) は

$$\inf_n \sup_{\alpha,\delta,t} [2n\delta + (N-3n)\{(\delta - t)\rho_2 + (\delta + t)\rho_3\}] \tag{3.5}$$

となるので，$r_2 = (\delta - t)\rho_2 + (\delta + t)\rho_3$ を最大にする t の値を求める．

補題 3.1 r_2 は $t = 0$ で極値をもつ．

証明 まず，ρ_2, ρ_3 を t の関数とみて $\rho_2 = \rho_2(t), \rho_3 = \rho_3(t)$ とおく．このとき

$$\begin{aligned} r_2 &= (\delta - t)\rho_2(t) + (\delta + t)\rho_3(t) \\ &= \delta(\rho_2(t) + \rho_3(t)) - t(\rho_2(t) - \rho_3(t)) \end{aligned}$$

なので，t で微分すると

$$r_2' = \delta(\rho_2'(t) + \rho_3'(t)) - (\rho_2(t) - \rho_3(t)) - t(\rho_2'(t) - \rho_3'(t))$$

となり，$\rho_3(t) = \rho_2(-t)$ なので

$$\begin{aligned} \rho_2'(t) + \rho_3'(t) &= \rho_2'(t) - \rho_2'(-t) \\ \rho_2(t) - \rho_3(t) &= \rho_2(t) - \rho_2(-t) \end{aligned}$$

となる．よって

$$\left.\frac{\partial r_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(\rho_2'(0) + \rho_3'(0)) - (\rho_2(0) - \rho_3(0)) = 0$$

なので，r_2 は $t = 0$ で極値をもつ．

ここで，r_2 は $t = 0$ で極値をもつが最大値をとるとは限らない．しかし，実際，数値的に計算すると，δ が小さい場合には，ほとんど $t = 0$ で最大値になっていることがわかるので，r_2 は $t = 0$ で最大値となることを仮定する．すなわち $0 \leq t < \delta$ において $\partial r_2/\partial t < 0$ をみたすと仮定する．このとき，(3.5) は

$$\inf_n \sup_{\alpha,\delta} \{2n\delta + 2(N-3n)\delta\rho_2(0)\} \tag{3.6}$$

となり，α, δ に対する sup をとればよいのだが，理論的に計算が困難なので，今回は δ を与えたときの R_n のミニマックス解 n とそのときの α の値を表 9 に示した．

、表9 δを与えたときのミニマックス解n

$\delta = 0.01$

N	50	100	200	300	500	700	1000
n	6	11	23	34	56	79	113
R	0.3290	0.6542	1.2976	1.9340	3.1901	4.4285	6.2582
α	0.5327	0.5231	0.5167	0.5143	0.5121	0.5109	0.5098

$\delta = 0.02$

N	50	100	200	300	500	700	1000
n	6	11	23	34	57	79	114
R	0.6491	1.2828	2.5217	3.7318	6.0831	8.3612	11.6635
α	0.5372	0.5277	0.5213	0.5190	0.5167	0.5155	0.5144

$\delta = 0.04$

N	50	100	200	300	500	700	1000
n	6	12	23	34	57	79	111
R	1.2621	2.4611	4.7415	6.9034	10.9464	14.6985	19.8839
α	0.5463	0.5360	0.5305	0.5283	0.5260	0.5248	0.5239

$\delta = 0.06$

N	50	100	200	300	500	700	1000
n	6	12	23	34	55	75	104
R	1.8379	3.5311	6.6505	9.5046	14.6034	19.1036	24.9965
α	0.5554	0.5452	0.5398	0.5376	0.5355	0.5344	0.5334

$\delta = 0.08$

N	50	100	200	300	500	700	1000
n	6	11	23	33	53	71	95
R	2.3756	4.4914	8.2526	11.5598	17.1780	21.8882	27.7459
α	0.5645	0.5554	0.5491	0.5471	0.5450	0.5440	0.5431

$\delta = 0.10$

N	50	100	200	300	500	700	1000
n	6	11	22	32	49	65	85
R	2.8747	5.3422	9.5621	13.1209	18.8591	23.4487	28.9132
α	0.5736	0.5646	0.5587	0.5566	0.5547	0.5537	0.5529

表9より，$\delta \leq 0.10$では，ミニマックス解nは1割強となっていることがわかる．すなわち，実験に割り当てる対象はNの約3分の1でよいことがわかる．例えば，3つの薬の比較実験などを行う場合に治験者が300人いたときは，まず初めに各処理に32〜34人の治験者を割り当てて実験を行い，その後残りの治験者を最良と判定された薬に割り当てるのがよいと言える．

4. 正規試行に基づく3処理割り当て実験

これまでの2項試行に基づく3処理割り当て実験では，リグレットに関してミニマックス解を理論的に得ることは難しい．そこで，本節では，Akahira, Takeuchi and Ohwada [ATO02] に従って，2変量正規分布の上側確率の近似式を導出して，従来の近似式と比較した上で，その応用として3処理割り当ての問題を考える．

4.1. 2変量正規分布の上側確率の近似

一般に，2変量正規分布の上側確率の真値を得ることは難しいので，その近似式の導出について考える．まず，確率変数 (X,Y) は2変量正規分布 $N_2(0,0,1,1,\rho)$ に従っているとする．すなわち (X,Y) の同時密度関数 $\phi(x,y;\rho)$ を

$$\phi(x,y;\rho)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)\right\}$$

とする．ただし，$x,y\in\mathbf{R}^1, |\rho|<1$ とする．このとき

$$G(x,y;\rho):=\int_x^\infty\int_y^\infty\phi(u,v;\rho)dvdu \tag{4.1}$$

として，$x=at, y=bt$ $(a,b\in\mathbf{R}^1)$ とおき，$t\to\infty$ のときの G の漸近展開を考える．(4.1) より

$$\begin{aligned}
G(at,bt;\rho)&=\int_{at}^\infty\int_{bt}^\infty\phi(u,v;\rho)dvdu\\
&=\int_0^\infty\int_0^\infty\phi(u+at,v+bt;\rho)dudv\\
&=\phi(at,bt;\rho)\int_0^\infty\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(2atu+2btv\right.\\
&\qquad\left.-2\rho btu-2\rho atv+u^2+v^2-2\rho uv)\right\}dudv\\
&=\phi(at,bt;\rho)\int_0^\infty\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{t}{1-\rho^2}((a-b\rho)u+(b-a\rho)v)\right\}\\
&\qquad\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)\right\}dudv.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

となる．

(i) $c:=a-b\rho>0,\ d:=b-a\rho>0$ のとき

$$\begin{aligned}
G(at,bt;\rho)=\phi(at,bt;\rho)&\int_0^\infty\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{t}{1-\rho^2}(cu+dv)\right\}\\
&\cdot\left\{1-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{8(1-\rho^2)^2}(u^2+v^2-2\rho uv)^2+\cdots\right\}dudv
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2(1-\rho^2)}(a^2+b^2-2\rho ab)\right\}$$
$$\cdot\left\{\frac{(1-\rho^2)^2}{cdt^2} - \frac{(1-\rho^2)^3}{cdt^4}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}-\frac{\rho}{cd}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{(1-\rho^2)^4}{cdt^6}\left(\frac{3}{c^4}+\frac{3}{d^4}-\frac{3\rho}{c^3d}-\frac{3\rho}{cd^3}+\frac{1+2\rho^2}{c^2d^2}\right)+O\left(\frac{1}{t^8}\right)\right\}. \tag{4.3}$$

となる．

(ii) $c = a - b\rho > 0,\ d = b - a\rho < 0$ のとき

$$G(at, bt; \rho) = \int_{at}^{\infty} \varphi(u)du - \int_{at}^{\infty}\int_{-\infty}^{bt} \phi(u, v; \rho)dvdu$$
$$= \int_{at}^{\infty} \varphi(u)du - \int_{at}^{\infty}\int_{-bt}^{\infty} \phi(u, v; -\rho)dvdu$$
$$= \int_{at}^{\infty} \varphi(u)du - \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \phi(u+at, v-bt; -\rho)dudv$$
$$= \int_{at}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du - \phi(at, -bt; -\rho)\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t}{1-\rho^2}(cu-dv)\right\}$$
$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2+2\rho uv)\right\}dudv$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a^2t^2/2}\left(\frac{1}{at}-\frac{1}{a^3t^3}+\frac{3}{a^5t^5}-\frac{15}{a^7t^7}+O\left(\frac{1}{t^9}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{t^2}{2(1-\rho^2)}(a^2+b^2-2\rho ab)\right\}$$
$$\cdot\left\{-\frac{(1-\rho^2)^2}{cdt^2}+\frac{(1-\rho^2)^3}{cdt^4}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}-\frac{\rho}{cd}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{(1-\rho^2)^4}{cdt^6}\left(\frac{3}{c^4}+\frac{3}{d^4}-\frac{3\rho}{c^3d}-\frac{3\rho}{cd^3}+\frac{1+2\rho^2}{c^2d^2}\right)+O\left(\frac{1}{t^8}\right)\right\} \tag{4.4}$$

となる．ただし，$\varphi(u) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-u^2/2}$ ($u \in \mathbf{R}^1$) とする．

(iii) $c = a - b\rho > 0,\ d = b - a\rho = 0$ のとき，(4.1) から

$$G(at, bt; \rho) = \phi(at, bt; \rho)\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t}{1-\rho^2}(au-\rho bu)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)\right\}dudv$$
$$= \phi(at, bt; \rho)\int_{0}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{ct}{1-\rho^2}u-\frac{1}{2}u^2\right)\int_{0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dv\right]du$$
$$= \sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\phi(at, bt; \rho)\int_{0}^{\infty}\left\{\exp\left(-\frac{ct}{1-\rho^2}u-\frac{1}{2}u^2\right)\right\}\Phi\left(\frac{\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)du$$
$$= \sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\phi(at, bt; \rho)\int_{0}^{\infty}\left\{\exp\left(-\frac{ct}{1-\rho^2}u\right)\right\}\left(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{8}-\frac{u^6}{48}+\cdots\right)$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}+\frac{\rho u}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\frac{\rho^3u^3}{(\sqrt{1-\rho^2})^3}+\cdots\right\}du$$

$$=\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\phi(at,bt;\rho)\int_0^\infty\left\{\exp\left(-\frac{ct}{1-\rho^2}u\right)\right\}\cdot\left\{\frac{1}{2}+\frac{\rho u}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\right.$$

$$\left.-\frac{u^2}{4}-\frac{\rho}{6\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\left(\frac{\rho^2}{1-\rho^2}+3\right)u^3+\frac{u^4}{16}+\cdots\right\}du \tag{4.5}$$

となり，$A:=ct/(1-\rho^2)\ (>0)$ とおくと

$$\int_0^\infty u^k e^{-Au}du=\frac{k!}{A^{k+1}}\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

なので，(4.5) は

$$G(at,bt;\rho)=\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\phi(at,bt;\rho)\left\{\frac{1}{2A}+\frac{\rho}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}A^2}-\frac{1}{2A^3}\right.$$

$$\left.-\frac{\rho}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\left(\frac{\rho^2}{1-\rho^2}+3\right)\frac{1}{A^4}+\frac{3}{2A^5}+\cdots\right\}$$

$$=\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\phi(at,bt;\rho)\cdot\frac{1}{2ct}\left\{1-\rho^2+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\rho}{ct}(1-\rho^2)^{3/2}\right.$$

$$-\frac{(1-\rho^2)^3}{c^2t^2}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\rho^2(1-\rho^2)^{5/2}}{c^3t^3}-3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\rho(1-\rho^2)^{7/2}}{c^3t^3}$$

$$\left.+\frac{3(1-\rho^2)^5}{c^4t^4}+O\left(\frac{1}{t^5}\right)\right\} \tag{4.6}$$

となる．また，上記と同様にして $c=a-b\rho\le 0,\ d=b-a\rho>0$ の場合も求めることができる．

4.2. 上側確率の近似の数値比較

2 変量正規分布の上側確率の近似については，柴田 [S81]，Takeuchi and Takemura[TT79]，Cox and Wermuth[CW91] 等によって論じられているので，彼らの結果と第 4.1 節での結果との数値比較を行い，後者のものの精確性を確認する．

いま，柴田 [S81]，Takeuchi and Takemura[TT79]，Cox and Wermuth[CW91] の近似を紹介する．

柴田 [S81] の近似は $a=\rho/\sqrt{1-\rho^2},\ \theta_0=\tan^{-1}a$ として，

$$\rho_1=\frac{\rho a-b}{\sqrt{a^2-2\rho ab+b^2}},\quad \rho_2=\frac{\rho b-a}{\sqrt{a^2-2\rho ab+b^2}}$$

とおくとき，

$$(S)\ :\ G(at,bt;\rho)=G(at,0;\rho_1)+G(0,bt;\rho_2) \tag{4.7}$$

である．また，

$$c_i = \int_0^{\theta_0} \tan^{2i}\theta d\theta \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおけば，

$$G(h, 0; \rho) = G(0, h; \rho) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-h^2)^i}{i!}\frac{c_i}{2^i} + \frac{1}{2}(1 - \Phi(h))$$

と表せ，そして

$$c_i = \frac{a^{2i-1}}{2i-1} - c_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots), \quad c_0 = \tan^{-1} a$$

となるから，(4.7) の右辺の計算が可能になる．ただし，$\Phi(\cdot)$ は $N(0,1)$ の c.d.f. とする．また，Takeuchi and Takemura[TT79] の近似は $a \leq b$ について

$$(TT)\ :\ G(at, bt; \rho) = 1 - \Phi(bt) - \int_\rho^1 \phi(at, bt; w)dw \tag{4.8}$$

となる．ここで，$u = \sqrt{(1+w)/(1-w)}$, $\tau = \sqrt{(1+\rho)/(1-\rho)}$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_\rho^1 \phi(h, k; w)dw =& \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{h^2+k^2}{4}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{l!}\left\{-\frac{(h+k)^2}{8}\right\}^l\right.\\ &\left.\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\tau^{-2(l+m)-1}\tilde{m}_{l+m+1}\left(\frac{k-h}{2}\tau\right)\right]\end{aligned} \tag{4.9}$$

と表せ，

$$\tilde{m}_l(v) = \frac{1}{(2l-1)\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{(2l-1)}\tilde{m}_{l-1}(v) \quad (l = 0, 1, 2, \cdots), \quad \tilde{m}_0(v) = \frac{1-\Phi(v)}{v}$$

となるから，(4.9) の右辺の計算が可能になるので，(4.8) から $G(at, bt; \rho)$ の近似値が求まる．さらに，Cox and Wermuth[CW91] の近似は

$$\xi = \xi(a, b, t, \rho) := \frac{\rho\mu(at) - bt}{\sqrt{1-\rho^2}},\ \mu(at) := \frac{\varphi(at)}{\Phi(-at)},\ \sigma^2(at) = 1 + at\mu(at) - \mu^2(at)$$

とするとき，

$$\begin{aligned}(CW1)\ &:\ G(at, bt; \rho) \approx \Phi(-at)\Phi(\xi)\\ (CW2)\ &:\ G(at, bt; \rho) \approx \Phi(-at)\left[\Phi(\xi) - \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\xi\varphi(\xi)\sigma^2(at)\right]\end{aligned}$$

となる．

ここで，$G(at, bt; \rho)/\phi(at, bt; \rho)$ を用いて近似の比較を行う．表 10 は $a = 0.3, \rho = 1/2$ とし，$b = 0.2,\ 0.15,\ 0.1$ としたときの 2 変量正規分布の上側確率の比較である．第 4.1 節の近似において $b = 0.2$ のときは (4.3)，$b = 0.15$ のときは (4.6)，$b = 0.1$ のときは (4.4) を用いている．これより，$|ct| > 1,\ |dt| > 1$ については，第 4.1 節の近似は精確であると認められる．

表 10 2変量正規分布の上側確率の比較

$a = 0.3,\ b = 0.2,\ \rho = 1/2$ のとき

t	(S)	(TT)	$(CW1)$	$(CW2)$	第 4.1 節	(ct, dt)
5	0.5665	0.5665	0.5672	0.5676	854.01	$(1, 0.25)$
10	0.2663	0.2663	0.2652	0.2666	12.685	$(2, 0.5)$
15	0.1535	0.1535	0.1526	0.1535	1.1406	$(3, 0.75)$
20	0.0994	0.0994	0.0988	0.0994	0.2559	$(4, 1)$
25	0.0690	0.0711	0.0690	0.0694	0.1056	$(5, 1.25)$
30	499.72	—	0.0508	0.0511	0.0618	$(6, 1.5)$
35	—	—	0.0388	0.0391	0.0428	$(7, 1.75)$
40	—	—	0.0306	0.0308	0.0323	$(8, 2)$
45	—	—	0.0248	0.0249	0.0256	$(9, 2.25)$
50	—	—	0.0204	0.0205	0.0208	$(10, 2.5)$

$a = 0.1,\ b = 0.05,\ \rho = 1/2$ のとき

t	(S)	(TT)	$(CW1)$	$(CW2)$	第 4.1 節	(ct, dt)
5	1.2122	1.2122	1.2258	1.2141	70.353	$(1.125, 0)$
10	0.8745	0.8745	0.8812	0.8758	1.9229	$(2.25, 0)$
15	0.6683	0.6683	0.6718	0.6691	0.6909	$(3.375, 0)$
20	0.5334	0.5334	0.5354	0.5339	0.5192	$(4.5, 0)$
25	0.4402	0.44002	0.4414	0.4405	0.4311	$(5.625, 0)$
30	0.3728	0.3728	0.3735	0.3730	0.3679	$(6.75, 0)$
35	0.3223	0.3223	0.3227	0.3224	0.3196	$(7.875, 0)$
40	0.2832	0.2832	0.2835	0.2833	0.2817	$(9, 0)$
45	0.2522	0.2522	0.2524	0.2523	0.2513	$(10.125, 0)$
50	0.2271	0.2271	0.2272	0.2271	0.2265	$(11.25, 0)$

$a = 0.3,\ b = 0.1,\ \rho = 1/2$ のとき

t	(S)	(TT)	$(CW1)$	$(CW2)$	第 4.1 節	(ct, dt)
5	0.8184	0.8184	0.8243	0.8188	—	$(1.25, -0.25)$
10	0.5998	0.5998	0.6019	0.5999	—	$(2.5, -0.5)$
15	0.5612	0.5612	0.5623	0.5612	—	$(3.75, -0.75)$
20	0.6132	0.6129	0.6135	0.6129	0.4565	$(5, -1)$
25	—	0.7556	0.7544	0.7539	0.7178	$(6.25, -1.25)$
30	—	—	1.0293	1.0290	1.0183	$(7.5, -1.5)$
35	—	—	1.5486	1.5484	1.5446	$(8.75, -1.75)$
40	—	—	2.5620	2.5618	2.5603	$(10, -2)$
45	—	—	4.6546	4.6544	4.6538	$(11.25, -2.25)$
50	—	—	9.2775	9.2774	9.2771	$(12.5, -2.5)$

4.3. 3処理割り当て実験

2項試行に基づくの場合と同じ設定とするが，各処理$j = 1, 2, 3$について，អ
が正規分布$N(\mu_j, 1)$に従う確率変数とする，すなわち

$$X_{j1}, \cdots, X_{jn} \overset{i.i.d}{\sim} N(\mu_j, 1) \qquad (j = 1, 2, 3)$$

とする．また，$\bar{X}_j := (1/n) \sum_{i=1}^{n} X_{ji}$ $(j = 1, 2, 3)$とおく．

いま，$\mu_1 > \mu_2, \mu_1 > \mu_3$であると仮定し，$\delta_1 := \mu_1 - \mu_2, \delta_2 := \mu_1 - \mu_3$と
レットを

$$R_n := n(\delta_1 + \delta_2) + (N - 3n)\left[\delta_1 P\left\{\bar{X}_2 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_2 > \bar{X}_3\right\} + \delta_2 P\left\{\bar{X}_3 > \right.\right.$$

と定義する．そこで，nが大きいとき，R_nの近似を行う．まず，

$$U := \sqrt{\frac{n}{2}}\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_1\right) + \sqrt{\frac{n}{2}}\delta_1,$$
$$V := \sqrt{\frac{n}{2}}\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_3\right) + \sqrt{\frac{n}{2}}(\delta_1 - \delta_2)$$

とおくと，$E(U) = E(V) = 0$となり，

$$Var(U) = Var(V) = 1,\ Cov(U, V) = Var\left(\bar{X}_1\right) = \frac{1}{2}$$

になり，U, Vはいずれも$N(0, 1)$に従い，また，(U, V)は2変量正規分布N
うことがわかる．よって

$$P\left\{\bar{X}_2 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_2 > \bar{X}_3\right\} = P\left\{U > \sqrt{\frac{n}{2}}\delta_1,\ V > \sqrt{\frac{n}{2}}(\delta_1 - \delta\right.$$
$$= G\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\delta_1, \sqrt{\frac{n}{2}}(\delta_1 - \delta_2); \frac{1}{2}\right)$$

になる．ここで，第4.1節において，$a = \delta_1,\ b = \delta_1 - \delta_2,\ t = \sqrt{n/2},\ \rho = 1$

$$c = \delta_1 - \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2) = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2),\ d = \delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 -$$

となり，$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$より$c > 0$となる．$d$については，次のように場合分

(i) $\delta_1 > 2\delta_2$の場合．すなわち，$d > 0$の場合となり，(4.3), (4.10)より

$$a^2 + b^2 - 2\rho ab = \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1\delta_2$$

に注意すれば

$$G\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\delta_1, \sqrt{\frac{n}{2}}(\delta_1 - \delta_2); \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[\exp\left\{-\frac{n}{3}(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1\delta_2)\right\}\right]$$
$$\cdot\left\{\frac{9}{2n(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 - 2\delta_2)} + O\left(\frac{1}{n}\right.\right.$$

(ii) $\delta_1 < 2\delta_2$ の場合．すなわち，$d < 0$ の場合となり，(4.4), (4.10) より

$$G\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\delta_1, \sqrt{\frac{n}{2}}(\delta_1 - \delta_2); \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\delta_1^2 n/4} \left\{\frac{1}{\delta_1\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[\exp\left\{-\frac{n}{3}(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1\delta_2)\right\}\right]\left\{\frac{9}{2n(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 - 2\delta_2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \tag{4.12}$$

になる．

(iii) $\delta_1 = 2\delta_2$ の場合．すなわち，$d = 0$ の場合となり，(4.6), (4.10) より

$$G\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\delta_1, \sqrt{\frac{n}{2}}\delta_2; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left[\exp\left\{-\frac{n}{3}(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_1\delta_2)\right\}\right]$$
$$\cdot\left\{\frac{3}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{\pi n}} - \frac{1}{(\delta_1 + \delta_2)^2\pi n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right\} \tag{4.13}$$

になる．

上記の (i),(ii),(iii) と同様に，$P\left\{\bar{X}_3 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_3 > \bar{X}_2\right\}$ の漸近評価を行う．まず

$$P\left\{\bar{X}_3 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_3 > \bar{X}_2\right\} = G\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\delta_2, \sqrt{\frac{n}{2}}(\delta_2 - \delta_1); \frac{1}{2}\right) \tag{4.14}$$

になる．よって，(4.14) の値は (i),(ii),(iii) において δ_1 と δ_2 を入れかえたものになる．

次に，$\delta := \delta_1 + \delta_2$ とし，$\delta_1 = \lambda\delta$ $(0 < \lambda < 1)$ とする．このとき，λ について場合分けして考える．まず，$P\left\{\bar{X}_2 > \bar{X}_1, \bar{X}_2 > \bar{X}_3\right\}$ の漸近評価を行う．

(イ) $0 < \lambda < 2/3$ の場合．このとき，$c = \delta/2 > 0,\ d = (3\lambda - 2)\delta/2 < 0$ となるから，(4.10), (4.12) より

$$P\left\{\bar{X}_2 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_2 > \bar{X}_3\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-n\lambda^2\delta^2/4}\left\{\frac{1}{\lambda\delta\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[\exp\left\{-\frac{n}{3}(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\delta^2\right\}\right]\left\{\frac{9}{2(3\lambda - 2)\delta^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \tag{4.15}$$

になる．

(ロ) $2/3 < \lambda < 1$ の場合. このとき，$c > 0,\ d > 0$ となるから，(4.10), (4.11) より

$$P\left\{\bar{X}_2 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_2 > \bar{X}_3\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[\exp\left\{-\frac{n}{3}(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\delta^2\right\}\right]\left\{\frac{9}{2(3\lambda - 2)\delta^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \tag{4.16}$$

になる．

(ハ) $\lambda = 2/3$ の場合．このとき，$c > 0,\ d = 0$ となるから，(4.10), (4.13) より

$$P\left\{\bar{X}_2 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_2 > \bar{X}_3\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\exp\left\{-\frac{n}{3}(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\delta^2\right\}\right]\left\{\frac{3}{\delta\sqrt{\pi n}} - \frac{1}{\delta^2\pi n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right\} \tag{4.17}$$

次に，$P\{\bar{X}_3 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_3 > \bar{X}_2\}$ の漸近評価を λ によって場合分けして行う.
(イ)$'$ $0 < \lambda < 1/3$ の場合．このとき，$c = \delta/2 > 0,\ d = (1-3\lambda)\delta/2 > 0$ とな
δ_1 と δ_2 を入れかえて考えて

$$P\{\bar{X}_3 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_3 > \bar{X}_2\}$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[\exp\left\{-\frac{n}{3}(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\delta^2\right\}\right]\left\{\frac{9}{2(1-3\lambda)\delta^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right.\right.$$

になる．
(ロ)$'$ $1/3 < \lambda < 1$ の場合．このとき，$c > 0,\ d < 0$ となるから，(4.12) で δ_1
て考えて

$$P\{\bar{X}_3 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_3 > \bar{X}_2\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-n(1-\lambda)^2\delta^2/4}\left\{\frac{1}{(1-\lambda)\delta\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[\exp\left\{-\frac{n}{3}(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\delta^2\right\}\right]\left\{\frac{9}{2(1-3\lambda)\delta^2 n} + O\left(\right.\right.$$

になる．
(ハ)$'$ $\lambda = 1/3$ の場合．このとき，$c > 0,\ d = 0$ となるから，(4.13) で δ_1 と δ
えて

$$P\{\bar{X}_3 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_3 > \bar{X}_2\}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\exp\left\{-\frac{n}{3}(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\delta^2\right\}\right]\left\{\frac{3}{\delta\sqrt{\pi n}} - \frac{1}{\delta^2\pi n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right.\right.$$

になる．
上記のことから

$$A := \delta_1 P\{\bar{X}_2 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_2 > \bar{X}_3\} + \delta_2 P\{\bar{X}_3 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_3 > \bar{X}_2\}$$

とおいて，$\delta = \delta_1 + \delta_2,\ \delta_1 = \lambda\delta\ (0 < \lambda < 1)$ のときに，A を評価する．ここ
に注意して，λ について場合分けして考える．
(a) $0 < \lambda < 1/3$ のとき，(4.15), (4.18) より

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}e^{-n\lambda^2\delta^2/4} + \frac{3\sqrt{3}}{\pi(2-3\lambda)\delta n}\exp\left\{-\frac{n}{3}(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\delta^2\right\} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{\ }}\right.$$

になる．
(b) $\lambda = 1/3$ のとき，(4.15), (4.20) より

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}e^{-n\delta^2/36} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}e^{-n\delta^2/9} - \frac{\sqrt{3}(9+\sqrt{3})}{18\pi\delta n}e^{-n\delta^2/9} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

になる．
(c) $1/3 < \lambda < 2/3$ のとき，(4.15), (4.19) より

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(e^{-n\lambda^2\delta^2/4} + e^{-n(1-\lambda)^2\delta^2/4}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{\pi(2-3\lambda)\delta n}\exp\left\{-\frac{n}{3}(3\lambda^2 - 3\lambda\right.$$

(d) $\lambda = 2/3$ のとき，(4.17), (4.19) より

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-n\delta^2/36} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} e^{-n\delta^2/9} - \frac{\sqrt{3}(9+\sqrt{3})}{18\pi\delta n} e^{-n\delta^2/9} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

になる．
(e) $2/3 < \lambda < 1$ のとき，(4.16), (4.19) より

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-n(1-\lambda)^2\delta^2/4} + \frac{3\sqrt{3}}{\pi(2-3\lambda)\delta n} \exp\left\{-\frac{n}{3}(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\delta^2\right\} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

になる．
よって，(a)~(e) より A の $1/\sqrt{n}$ のオーダーの項だけを考えると

$$A = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-n\lambda^2\delta^2/4} + O\left(\frac{1}{n}\right) & (0 < \lambda < \frac{1}{3}\text{のとき}), \\ O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-n\delta^2/36}\right) & (\lambda = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\text{のとき}), \\ \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(e^{-n\lambda^2\delta^2/4} + e^{-n(1-\lambda)^2\delta^2/4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) & (\frac{1}{3} < \lambda < \frac{2}{3}\text{のとき}), \\ \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-n(1-\lambda)^2\delta^2/4} + O\left(\frac{1}{n}\right) & (\frac{2}{3} < \lambda < 1\text{のとき}) \end{cases}$$

になる．いま，δ を一定にすると A は $\lambda \to 0$ および $\lambda \to 1$ のときに最大となる．しかし，$\lambda = 0, 1$ では上記の関係式は成り立たない．そこで，元に戻って，n が大きいとき

$$\begin{aligned} &\max_{\delta_1+\delta_2=\delta} \left[\delta_1 P\left\{\bar{X}_2 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_2 > \bar{X}_3\right\} + \delta_2 P\left\{\bar{X}_3 > \bar{X}_1,\ \bar{X}_3 > \bar{X}_2\right\}\right] \\ &\approx \max_{\delta_1 < \delta/3} \delta_1 P\left\{\bar{X}_2 > \bar{X}_1\right\} \\ &= \max_{\delta_1 < \delta/3} \delta_1 P\left\{U > \sqrt{\frac{n}{2}}\delta_1\right\} \\ &= \max_{\delta_1 < \delta/3} \delta_1 \left\{1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\delta_1\right)\right\} \\ &\approx \sqrt{\frac{2}{n}} \max_{\delta}\ \delta\{1 - \Phi(\delta)\} =: \sqrt{\frac{2}{n}} c^* \end{aligned}$$

になる．ただし，Φ は $N(0,1)$ の累積分布関数で，$c^* \fallingdotseq 0.17$ とする．よって，n が大きいとき，リグレットについては

$$\max_{\delta_1+\delta_2=\delta} R_n \approx n\delta + c^*(N - 3n)\sqrt{\frac{2}{n}}$$

になる．ここで，

$$g(n) := n\delta + c^*(N - 3n)\sqrt{\frac{2}{n}}$$

とおいて，n を正数と見なして

$$g'(n) = \delta - c^*\sqrt{2}\frac{N + 3n}{2n\sqrt{n}} = 0$$

となる．そこで

$$c^*\sqrt{2}(N+3n) = 2\delta n\sqrt{n}$$

より，n が大きいとき

$$c^*\sqrt{2}N \approx 2\delta n\sqrt{n} = 2\delta n^{3/2}$$

となり

$$n \approx \left(\frac{c^*\sqrt{2}N}{2\delta}\right)^{2/3} \fallingdotseq \left(\frac{0.12N}{\delta}\right)^{2/3} =: n_\delta$$

になる．よって，$g(n)$ は $n = n_\delta$ で漸近的に最小値をとるから

$$\min_n \max_{\delta_1+\delta_2=\delta} R_n \approx \max_{\delta_1+\delta_2=\delta} R_{n_\delta}$$

となり，n_δ は漸近的なミニマックス解になる．表 11 は $\delta = 0.20$ としたときの漸近的なミニマックス解である．

表 11　$\delta = 0.20$ の漸近的なミニマックス解

N	100	200	300	500	700	1000
n	15	24	32	45	56	71

5.　おわりに

本論において，2 項試行における 2 処理および 3 処理割り当て実験において，適当なルールの下でミニマックス割り当て方式について考察し，その数値的解析も試みた．その結果，一定の成果を得ることができた．また，3 処理割り当て実験においては，理論的なミニマックス解を得ることができていないが，正規試行の場合には漸近的なミニマックス解を理論的に得ることができたので，その導出過程を 2 項試行の場合に適用することによって，漸近的なミニマックス解を得ることが可能になるであろう．ともあれ，この研究は現実問題への幅広い応用をもっているので，今後もこの研究をさらに発展させたい．

参考文献

[A75]　Armitage, P. (1975). *Sequential Medical Trials*, (2nd ed). Wiley, New York.

[ATO02]　Akahira, M., Takeuchi, K. and Ohwada, S (2002). The allocation of three treatments in normal trials. *In preparation.*

[B81]　Bather, J. A. (1981). Randomized allocation of treatments in sequential experiments. *J. R. Statist. Soc.*, B**43**, 265-292.

[B85]　Bather, J. A. (1985). On the allocation of treatments in sequential medical trials. *Internat. Statist. Rev.*, **53**, 1-13.

[OAT01] 大和田章一, 赤平昌文, 竹内啓 (2001). On the allocation of three treatments in binomial trials. 日本数学会秋季総合分科会 統計数学分科会アブストラクト 167-168.

[CW91] Cox, D. R. & Wermuth, N. (1991). A simple approximation for bivariate and trivariate normal integrals. *Internat. Statist. Rev.*, **59**, 263-269.

[S81] 柴田 義貞 (1981). 正規分布 特性と応用. 東京大学出版会.

[TT79] Takeuchi, K and Takemura, A (1979). Calculation of bivariate normal integrals by the use of incomplete negative-order moments. *Technical Report No.*294. *Economics Series*, Stanford University.