数理解析研究所講究録 1273 巻 2002 年 115-123

An Extension of the Borovkov-Sakhanenko Bound for the Bayes Risk

筑波大・数学 小池 健一 (Ken-ichi Koike)
筑波大・数学 田中 秀和 (Hidekazu Tanaka)

1 はじめに

適当な正則条件の下で, 未知母数の関数の不偏推定量の分散に対する下界を与える情報不等式の 1 つとして Cramér-Rao の不等式があり (Cramér(1946)), その下界を達成する分布族は指数型に限るということはよく知られている. しかし, 指数型分布族においてであっても Cramér-Rao の不等式の下界を達成しないことは多い. そこで, Cramér-Rao の不等式を精密化した情報不等式として Bhattacharyya の不等式がある (Bhattacharyya(1946), Zacks(1971)).

一方, Bayes リスク に対する下界を与える式として Borovkov-Sakhanenko の不等式による下界が知られている (Borovkov and Sakhanenko(1980), Rao(1992), Rao(2001)). しかしながら, Bayes リスク が Borovkov-Sakhanenko の下界を達成する状況は, 分散が Cramér-Rao の不等式の下界を達成する状況より起こり難いように見える.

そこで, 本論では Borovkov-Sakhanenko の下界を Bhattacharyya 型に精密化し, さらに下界の漸近的評価式を与える.

なお, Brown and Gajek(1990), Sato and Akahira(1996) は推定量の偏りを考慮に入れた下界について考察している. 偏りを考慮した方が優れた下界を得られるが, 本論では偏りに依存しない下界について述べる. また, Ghosh, Sinha and Joshi(1982) は Bayes リスクを漸近的に求めているが, 本論の下界との関係については, まだ必ずしも良くわかっていない (Ghosh(1994)).

2 準備

確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立に, ある σ-有限測度 ν に対する確率密度関数 $f(x|\theta)$ $(x \in \mathcal{X} \subset \mathbf{R}^1)$ をもつ分布に従っているとする. 但し, $\theta \in \Theta = (\underline{\theta}, \overline{\theta}) \subset \mathbf{R}^1$ は未知とする. θ が与えられたときの $\boldsymbol{X} := (X_1, \ldots, X_n)$ の同時確率密度関数を $f(\boldsymbol{x}|\theta)(= \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta))$ で表す. 損失関数は 2 乗誤差 $L(\theta, d) := (d-\theta)^2$ とし, θ の Lebesgue 測度に対する事前密度を $q(\theta)$, $(\boldsymbol{X}, \theta)$ の同時分布に関する期

待値を $E_q[\cdot]$, θ が与えられたときの $\boldsymbol{X}$ の条件付分布に関する期待値を $E_\theta[\cdot]$, 事後分布に関する期待値を $E_q[\cdot|\boldsymbol{X}]$ で表す.

また, $\hat{\theta}=\hat{\theta}(\boldsymbol{X})$ を $\boldsymbol{X}$ に基づく θ の推定量, $R(\theta,\hat{\theta}):=E_\theta[L(\theta,\hat{\theta})]$ を推定量 $\hat{\theta}$ のリスク, $B(q,\hat{\theta}):=E_q[R(\theta,\hat{\theta})]$ を推定量 $\hat{\theta}$ の平均リスク, $B(q)=\inf_{\hat{\theta}}B(q,\hat{\theta})$ を事前密度 q の下での Bayes リスク (ここでは Bayes 推定量の平均リスクの意味) とする.

まず, 次の正則条件を仮定する.

(A1) $f(x|\theta)$ の台 $\mathrm{supp}(f):=\{x\in\mathcal{X}|f(x|\theta)>0\}$ は θ に依存しない.
(A2) $f(x|\theta)$ は θ について 2 階連続微分可能.
(A3) $\mu_{ij}(\theta):=E_\theta[(\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(X|\theta)}{f(X|\theta)})^i(\frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f(X|\theta)}{f(X|\theta)})^j]$ $(i,j,=0,1,\ldots)$ が有限確定.
特に, Fisher 情報量を $I(\theta):=\mu_{20}(\theta)$ で表す.

さらに, 関数 $h(\cdot)$ に対して, 次の正則条件 (A4)〜(A7) を仮定する.

(A4) $h(\theta)$ は 2 階連続微分可能.
(A5) $\mathrm{supp}(h)$, $\mathrm{supp}(h')$, $\mathrm{supp}(h'')\subset\Theta$.
(A6) $\lim_{\theta\to\underline{\theta},\overline{\theta}}\ f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta)=0,\ \lim_{\theta\to\underline{\theta},\overline{\theta}}\ \theta f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta)=0.$
(A7) $\lim_{\theta\to\underline{\theta},\overline{\theta}}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\{f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta)\}=0,\ \lim_{\theta\to\underline{\theta},\overline{\theta}}\ \theta\frac{\partial}{\partial\theta}\{f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta)\}=0.$

このとき

$$S_i:=S_i(\boldsymbol{x},\theta)=\frac{\frac{\partial^i}{\partial\theta^i}\{f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta)\}}{f(\boldsymbol{x}|\theta)q(\theta)}\quad(i=1,2)$$

とおき, 2×2 行列 V_n を $V_n:=(E[S_iS_j])$ とし, 次の (A8) を仮定する.

(A8) $E[S_iS_j]$ $(i,j=1,2)$ が有限確定.

3 本論

Borovkov-Sakhanenko の下界は Bayes リスクに対する Cramér-Rao 型の下界であり, 本節ではこの下界を Bhattacharyya 型に改良する. また, 下界の漸近的評価も与える.

補題 1. 条件 (A1),(A2),(A4)〜(A7) を仮定する. このとき

$$E_q[(\hat{\theta}-\theta)S_1]=E_q\left[\frac{h}{q}\right],$$

$$E_q[(\hat{\theta}-\theta)S_2]=0$$

が成り立つ.

証明. 部分積分法と条件 (A6), (A7) から

$$\begin{aligned}
E_q\left[(\hat{\theta}-\theta)S_1\right] &= \iint_{\Theta}(\hat{\theta}(\boldsymbol{x})-\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}(f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta))d\theta d\boldsymbol{x}\\
&= \int\left\{\left[(\hat{\theta}(\boldsymbol{x})-\theta)f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta)\right]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}+\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta)d\theta\right\}d\boldsymbol{x}\\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}h(\theta)\int f(\boldsymbol{x}|\theta)d\boldsymbol{x}d\theta = E_q\left[\frac{h(\theta)}{q(\theta)}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_q\left[(\hat{\theta}-\theta)S_2\right] &= \iint_{\Theta}(\hat{\theta}(\boldsymbol{x})-\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta))d\theta d\boldsymbol{x}\\
&= \int\left\{\left[(\hat{\theta}(\boldsymbol{x})-\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}(f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta))\right]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}+\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta}(f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta))\,d\theta\right\}d\boldsymbol{x}\\
&= \int[f(\boldsymbol{x}|\theta)h(\theta)]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}d\boldsymbol{x}=0
\end{aligned}$$

となる. ■

以下, $\boldsymbol{x}$, θ を省略し, さらに $f' := \frac{\partial}{\partial\theta}f(\boldsymbol{x}|\theta)$, $f'' := \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f(\boldsymbol{x}|\theta)$ と表す.

補題 2. 条件 (A1)〜(A8) を仮定すると

$$\begin{aligned}
E_q[S_1^2] &= nE_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 I\right]+E_q\left[\left(\frac{h'}{q}\right)^2\right],\\
E_q[S_1S_2] &= nE_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2\mu_{11}\right]+2nE_q\left[\frac{hh'}{q^2}I\right]+E_q\left[\frac{h'h''}{q^2}\right],\\
E_q[S_2^2] &= nE_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2\mu_{02}\right]+2n(n-1)E_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 I^2\right]\\
&\qquad +4nE_q\left[\left(\frac{h'}{q}\right)^2 I\right]+E_q\left[\left(\frac{h''}{q}\right)^2\right]+4nE_q\left[\frac{hh'}{q^2}\mu_{11}\right]
\end{aligned}$$

である.

証明. まず, $E_\theta[(f'/f)^2]=nI$ より

$$E_q[S_1^2]=E_q\left[\left(\frac{(fh)'}{fq}\right)^2\right]=E_q\left[\left(\frac{f'}{f}\frac{h}{q}+\frac{h'}{q}\right)^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= E_q\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2\left(\frac{h}{q}\right)^2\right] + 2E_q\left[\frac{f'}{f}\frac{hh'}{q^2}\right] + E_q\left[\left(\frac{h'}{q}\right)^2\right] \\
&= E_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 E_\theta\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right]\right] + 2E_q\left[\frac{hh'}{q^2}E_\theta\left[\frac{f'}{f}\right]\right] + E_q\left[\left(\frac{h'}{q}\right)^2\right] \\
&= nE_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 I\right] + E_q\left[\left(\frac{h'}{q}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

となる．また，$E_\theta[(f'/f)(f''/f)] = n\mu_{11}$ より

$$
\begin{aligned}
E_q[S_1S_2] &= E_q\left[\frac{(fh)'}{fq}\frac{(fh)''}{fq}\right] \\
&= E_q\left[\left(\frac{f'}{f}\frac{h}{q} + \frac{h'}{q}\right)\left(\frac{f''}{f}\frac{h}{q} + 2\frac{f'}{f}\frac{h'}{q} + \frac{h''}{q}\right)\right] \\
&= E_q\left[\frac{f'}{f}\frac{f''}{f}\left(\frac{h}{q}\right)^2\right] + 2E_q\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2\frac{hh'}{q^2}\right] + E_q\left[\frac{f'}{f}\frac{hh''}{q^2}\right] \\
&\quad + E_q\left[\frac{f''}{f}\frac{hh'}{q^2}\right] + 2E_q\left[\frac{f'}{f}\left(\frac{h'}{q}\right)^2\right] + E_q\left[\frac{h'h''}{q^2}\right] \\
&= E_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 E_\theta\left[\frac{f'}{f}\frac{f''}{f}\right]\right] + 2E_q\left[\frac{hh'}{q^2}E_\theta\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right]\right] + E_q\left[\frac{hh''}{q^2}E_\theta\left[\frac{f'}{f}\right]\right] \\
&\quad + E_q\left[\frac{hh'}{q^2}E_\theta\left[\frac{f''}{f}\right]\right] + 2E_q\left[\left(\frac{h'}{q}\right)^2 E_\theta\left[\frac{f'}{f}\right]\right] + E_q\left[\frac{h'h''}{q^2}\right] \\
&= nE_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2\mu_{11}\right] + 2nE_q\left[\frac{hh'}{q^2}I\right] + E_q\left[\frac{h'h''}{q^2}\right]
\end{aligned}
$$

となる．同様に，$E_\theta[(f''/f)^2] = n\mu_{40} + 2n(n-1)I^2$ より

$$
\begin{aligned}
E_q[S_2^2] &= E_q\left[\left(\frac{(fh)''}{fq}\right)^2\right] = E_q\left[\left(\frac{f''}{f}\frac{h}{q} + 2\frac{f'}{f}\frac{h'}{q} + \frac{h''}{q}\right)^2\right] \\
&= E_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2\left(\frac{f''}{f}\right)^2\right] + 4E_q\left[\left(\frac{h'}{q}\right)^2\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right] + E_q\left[\left(\frac{h''}{q}\right)^2\right] \\
&\quad + 4E_q\left[\frac{hh'}{q^2}\frac{f'f''}{f^2}\right] + 4E_q\left[\frac{h'h''}{q^2}\frac{f'}{f}\right] + 2E_q\left[\frac{hh''}{q^2}\frac{f''}{f}\right] \\
&= E_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 E_\theta\left[\left(\frac{f''}{f}\right)^2\right]\right] + 4E_q\left[\left(\frac{h'}{q}\right)^2 E_\theta\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right]\right] + E_q\left[\left(\frac{h''}{q}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

$$+4E_q\left[\frac{hh'}{q^2}E_\theta\left[\frac{f'f''}{f^2}\right]\right]+4E_q\left[\frac{h'h''}{q^2}E_\theta\left[\frac{f'}{f}\right]\right]+2E_q\left[\frac{hh''}{q^2}E_\theta\left[\frac{f''}{f}\right]\right]$$
$$=nE_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2\mu_{02}\right]+2n(n-1)E_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2I^2\right]$$
$$+4nE_q\left[\left(\frac{h'}{q}\right)^2I\right]+E_q\left[\left(\frac{h''}{q}\right)^2\right]+4nE_q\left[\frac{hh'}{q^2}\mu_{11}\right]$$

となる. ■

定理. 条件 (A1)〜(A8) を仮定する. このとき V_n が正定値であれば, Bayes リスクに関して, 不等式

$$B(q)\geq\left(E_q\left[\frac{h}{q}\right]\right)^2\frac{E_q[S_2^2]}{|V_n|}=:K_{2n,h} \tag{3.1}$$

が成り立つ. ここで, 等号は, θ の Bayes 推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{B}}$ について

$$\hat{\theta}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{x})-\theta=a_{1n}S_1(\boldsymbol{x},\theta)+a_{2n}S_2(\boldsymbol{x},\theta)\quad \text{a.e.}(\boldsymbol{x},\theta) \tag{3.2}$$

が成り立つときに限る. ただし, a_{1n}, a_{2n} は

$$\begin{pmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\end{pmatrix}=\frac{E_q\left[\frac{h}{q}\right]}{|V_n|}\begin{pmatrix}E_q[S_2^2]\\ -E_q[S_1S_2]\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

とする.

証明. まず, Σ_n を $(\hat{\theta}_{\mathrm{B}}-\theta,S_1,S_2)$ の分散共分散行列, $\boldsymbol{g}:={}^t\left(E_q\left[\frac{h}{q}\right],0\right)$ とする. ただし ^{t} は転置を表す. このとき, 補題1より

$$\Sigma_n=\begin{pmatrix}E_q[(\hat{\theta}_{\mathrm{B}}-\theta)^2] & & \\ E_q[(\hat{\theta}_{\mathrm{B}}-\theta)S_1] & E_q[S_1^2] & \\ E_q[(\hat{\theta}_{\mathrm{B}}-\theta)S_2] & E_q[S_1S_2] & E_q[S_2^2]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_q[(\hat{\theta}_{\mathrm{B}}-\theta)^2] & {}^t\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{g} & V_n\end{pmatrix}$$

となり, そして

$$|\Sigma_n|=|V_n|\left\{E_q[(\hat{\theta}_{\mathrm{B}}-\theta)^2]-{}^t\boldsymbol{g}V_n^{-1}\boldsymbol{g}\right\}\geq 0$$

となるから, $V_n>0$ より (3.1) を得る. また, 等号を達成するのは $|\Sigma_n|=0$ のときであり, $|V_n|\neq 0$ より, これは Σ_n の第1列が第2列と第3列の線型結合で表されるときに限るから

$$E_q\left[\left(\hat{\theta}_{\mathrm{B}}-\theta-a_{1n}S_1-a_{2n}S_2\right)^2\right]=0$$

となり (3.2) を得る. また, 補題 1 と (3.2) より

$$V_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_q\left[\frac{h}{q}\right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり (3.3) を得る. ■

以下, 定理の下界 $K_{2n,h}$ に対して, Borovkov-Sakhanenko の下界を 1 次の下界と呼び,

$$K_{1n,h} := \left(E_q\left[\frac{h}{q}\right]\right)^2 \Big/ E_q[S_1^2]$$

で表す.

系. 条件 (A1)〜(A8) の下で

$$K_{1n,h} = \frac{\left(E_q\left[\frac{h}{q}\right]\right)^2}{nE_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 I\right]}\left[1 - \frac{E_q\left[\left(\frac{h'}{q}\right)^2\right]}{nE_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 I\right]}\right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$K_{2n,h} = \frac{\left(E_q\left[\frac{h}{q}\right]\right)^2}{nE_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 I\right]}\left[1 - \frac{E_q\left[\left(\frac{h'}{q}\right)^2\right]}{nE_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 I\right]} + \frac{\left\{E_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 \mu_{11}\right] + 2E_q\left[\frac{hh'}{q^2} I\right]\right\}^2}{2nE_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 I\right] E_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 I^2\right]}\right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

である.

証明は補題 2 の値を用いて漸近的に $o(1/n^2)$ のオーダーまで求めればよい.

注意 1. 関数 $h(\cdot)$ は $K_{1n,h}$ (または $K_{2n,h}$) を最大にする h を選ぶのが妥当である. n が十分大きいと仮定すれば $1/n$ の係数

$$\left(E_q\left[\frac{h}{q}\right]\right)^2 \Big/ E_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 I\right]$$

を最大にする h を選べばよいことになる. このような h は Cauchy-Schwarz の不等式から $h = h_1 := q/I$ となる. ただし, 条件 (A4)〜(A8) をみたしているものとする. 一方, Cramér-Rao 及び Bhattacharyya 型の不等式を導いたのと同様にすれば $h = h_2 := q$ となる.

注意 2. 簡単な計算から, 下界 $K_{2n,h}$ が下界 $K_{1n,h}$ を改良, つまり $K_{2n,h} > K_{1n,h}$ となるための必要十分条件は $E[S_1S_2] \neq 0$ であることがわかる. また

$$\eta_h := E_q\left[\left(\frac{h}{q}\right)^2 \mu_{11}\right] + 2E_q\left[\frac{hh'}{q^2}I\right]$$

とおくと, 系より $K_{2n,h}$ が $K_{1n,h}$ を改良するための十分条件として $\eta_h \neq 0$ が得られる. 特に $h = h_1$ のときは

$$\eta_{h_1} = E_q\left[\frac{\mu_{11}}{I^2}\right]$$

であり, $h = h_2$ のときは

$$\eta_{h_2} = E_q[\mu_{11}] + 2E_q\left[\frac{q'}{q}I\right]$$

である.

4 例

本節では, 定理で与えた下界 $K_{2n,h}$ が Borovkov-Sakhanenko の下界 $K_{1n,h}$ を改良している例を挙げる.

例 (2 項分布). 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ が互いに独立に 2 項分布 $B(1, p(\theta))$ に従っているとする. ただし, $p(\theta) = e^\theta/(1+e^\theta)$ $(-\infty < \theta < \infty)$ とする. また $p(\theta)$ は事前分布がベータ分布 $Be(\alpha, \beta)$ に従っていると仮定する. つまり, θ の事前密度関数は

$$q(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p(\theta)^\alpha (1-p(\theta))^\beta$$

である. ただし, α, β は条件 (A8) をみたすように十分大きくとる. このとき

$$\eta_{h_1} = E_q\left[\frac{\mu_{11}}{I^2}\right] = -\frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha-\beta)}{(\alpha-1)(\beta-1)},$$
$$\eta_{h_2} = E_q[\mu_{11}] + 2E_q\left[\frac{q'}{q}I\right] = \frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

となり, 注意 2 より $\alpha \neq \beta$ であれば $K_{2n,h}$ が $K_{1n,h}$ を改良していることがわかる. 正確には, $h = h_1$ のときには, 条件 (A8) を考慮すると, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta > 2$ であれば改良している.

5　まとめ

本論では, Borovkov-Sakhanenko の下界の改良を試みたが, その有用性について, まだ必ずしも納得のいく説明が出来ていない. つまり, 確かに改良しているが, 下界を達成する例を与えていない. かろうじて改良している例を紹介できた. その原因は色々考えられるが, 主な原因は Bayes リスクが陽に求められる場合はそう多くはないという点が挙げられる. よく知られているように, 理論的に扱い易いのは指数型分布族からの無作為標本で, 未知母数 θ の事前分布が共役分布の場合である. しかし, 母数 θ が期待値母数の場合, Brown and Gajek(1990) において (証明無しで) 述べているが, Bayes リスクは Borovkov-Sakhanenko の下界を達成する. (実はこの主張については疑問が残る.) つまり, この場合は Borokov-Sakhanenko の下界を改良する必要はないわけである. 第 4 節で紹介した例はこのような理由から期待値母数にならないよう $B(1,p(\theta))$ からの無作為標本とした.

また第 1 節で触れたように, 推定量の偏りを考慮に入れた下界が考えられ, この下界の方が優れていることが予想される. (1 次の下界については Brown and Gajek(1990) で証明済. 2 次の下界についての証明は未完成である.) しかし, この下界は Bayes 推定量の偏りについての情報が必要である. 本来, (Bayes) リスクを評価する不等式, およびその下界は (Bayes) リスクが計算出来ない場合にこそ意味があると考えられる. 偏りについても計算出来ないときにも通用する下界は, その意味で有用だと思われる.

参考文献

[1] Bhattacharyya, A. (1946). On some analogues of the information and their use in statistical estimation. *Sankhyā*, **8**, 1–14.

[2] Borovkov, A. A. and Sakhanenko, A. I. (1980). On estimates for average quadratic risk. (In Russian). *Probab. Math. Statist.* **1**, 185–195.

[3] Brown, L. D. and Gajek, L. (1990). Information inequalities for the Bayes risk. *Ann. Statist.* **18**, 1578–1594.

[4] Cramér, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton Univ. Press.

[5] Ghosh, J. K. (1994). *Higher Order Asymptotics*. NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics **4**, Institute of Mathematical Statistics Hayward, California.

[6] Ghosh, J. K., Sinha, B. K. and Joshi, S. N. (1982). Expansions for posterior probability and integrated Bayes risk. *Statistical Decision Theory and Related Topics III*, **1**, 403–456. Academic, New York.

[7] Prakasa, Rao, B. L. S. (1992). Cramer-Rao type integral inequalities for estimators of functions of multidimensional parameter. *Sankhyā*, Ser. A, **54**, 53–73.

[8] Prakasa, Rao, B. L. S. (2001). Cramer-Rao type integral inequalities for general loss functions. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Test*, **10**, 105–120.

[9] Sato, M. and Akahira, M. (1996). An information inequality for the Bayes risk. *Ann, Statist.*, **24**, 2288–2295.

[10] Zacks, S. (1971). *The Theory of Statistical Inference*. Wiley, New York.