

## 回帰モデルにおける比推定量の分布の近似について

河合 伸一 (独立行政法人 防災科学技術研究所)

Shinichi Kawai, National Research Institute  
for Earth Science and Disaster Prevention

### 1. はじめに

線形回帰モデル  $Y = \alpha + \beta X + U$  において, 比  $\rho = E(Y)/E(X)$  を推定する問題は多くの人により研究されてきた. 例えば, 標本を無作為にいくつかのグループに分割するという Quenoulli (1956) によるジャックナイフ法を用いた  $\rho$  の推定については Durbin (1959), Rao (1965), Rao and Webster (1966), Gray and Schucany (1972), Rao (1988), Akahira and Kawai (1990), Kawai and Akahira (1994) などによって論じられた. この中では, 最適な分割数や, ジャックナイフ推定量の最適性, ジャックナイフ推定量と他の  $\rho$  の推定量の比較などが行われた.

ここでは, 線形回帰モデルにおける  $\rho$  の比推定量の確率分布の高次近似を考える. 特に, 標本数が  $n$  のときに, Edgeworth 展開を用いて, 標本平均をもとにする通常の比推定量の分布の近似を  $o(1/n)$  の次数まで行う. 例として,  $X$  にガンマ分布, カイ 2 乗分布及び対数正規分布を仮定した場合に, この高次近似を正規近似及びモンテカルロシミュレーションによる経験分布関数と数値的に比較する. また, Cornish-Fisher 展開によるパーセント点の近似についても考える.

### 2. 比推定量の分布の高次近似

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  を同じ確率分布に従う大きさ  $n$  の無作為標本とする. ただし,  $P\{X_i > 0\} = 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ) である. いま, 比  $\rho = E(Y_i) / E(X_i)$  を推定する問題を考える.  $X_i$  と  $Y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の間に次のような線形回帰モデルを仮定する.

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

ここで,  $X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_n$  は互いに独立であるとする. また,  $k_0 := E(X_i) \neq 0$ ,  $k_1 := V(X_i)$ ,  $k_2 := E(X_i^3)$ ,  $k_3 := E(X_i^4)$ ,  $E(U_i) = 0$ ,  $\delta := V(U_i)$ ,  $\eta := E(U_i^3)$ ,  $\gamma := E(U_i^4)$  とする. ここで,  $\delta = O(1)$  である. さらに,  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ ,  $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ,  $\bar{U} = \sum_{i=1}^n U_i/n$  とする. 比  $\rho$  の推定量として一般によく考えられるのは比推定量

$$R := \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = \beta + \frac{\alpha + \bar{U}}{\bar{X}}$$

である。もし、 $P\{\bar{X} \leq 0\} = 0$  であれば、 $\sqrt{n}(R - \rho)$  の分布関数 (c.d.f.) は次のように与えられる。

$$(2.1) \quad F_R(r) := P\{\sqrt{n}(R - \rho) \leq r\} = P\left\{\bar{U} - \left(\frac{\alpha}{k_0} + \frac{r}{\sqrt{n}}\right)\bar{X} \leq -\alpha\right\}.$$

いま,

$$W := \bar{U} - \left(\frac{\alpha}{k_0} + \frac{r}{\sqrt{n}}\right)\bar{X}$$

とすると,

$$(2.2) \quad \mu_W := E(W) = -\alpha - \frac{1}{\sqrt{n}}(k_0 r),$$

$$(2.3) \quad \sigma_W^2 := V(W) = \frac{1}{n}A + \frac{1}{n\sqrt{n}}B + \frac{1}{n^2}C$$

となる。ここで,

$$A := \delta + \frac{k_1}{k_0^2}\alpha^2, \quad B := 2\frac{k_1}{k_0}r\alpha, \quad C := k_1 r^2$$

である。W を基準化したものを Z とすると,

$$Z := \frac{W - \mu_W}{\sigma_W}$$

であり、 $E(Z) = 0, V(Z) = 1$  である。Z の 3 次と 4 次のキュミュラントをそれぞれ  $\kappa_3$  と  $\kappa_4$  とする。Edgeworth 展開を用いると (2.1) より,

$$(2.4) \quad F_R(r) = P\{Z \leq z\} \\ = \Phi(z) - \phi(z) \left\{ \frac{\kappa_3}{6}(z^2 - 1) + \frac{\kappa_4}{24}(z^3 - 3z) + \frac{\kappa_3^2}{72}(z^5 - 10z^3 + 15z) \right\} \\ + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

である。ここで,

$$z = \frac{-\alpha - \mu_W}{\sigma_W},$$

$$(2.5) \quad \kappa_3 = E[(Z - E(Z))^3] = E(Z^3),$$

$$(2.6) \quad \kappa_4 = E[(Z - E(Z))^4] - 3\{V(Z)\}^2 = E(Z^4) - 3$$

であり、 $\Phi(z)$  と  $\phi(z)$  はそれぞれ標準正規分布の分布関数と密度関数をあらわす。このとき,

$$(2.7) \quad E(Z^3) = E\left(\frac{W - \mu_W}{\sigma_W}\right)^3 = \sigma_W^{-3} E(W - \mu_W)^3,$$

$$(2.8) \quad E(Z^4) = E\left(\frac{W - \mu_W}{\sigma_W}\right)^4 = \sigma_W^{-4} E(W - \mu_W)^4$$

である。Taylor 展開を用いて (2.3) より,

$$(2.9) \quad \sigma_W^{-3} = \frac{n\sqrt{n}}{A^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left( -\frac{3B}{2A} \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right\},$$

$$(2.10) \quad \sigma_W^{-4} = \frac{n^2}{A^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left( -2\frac{B}{A} \right) + \frac{1}{n} \left( -2\frac{C}{A} + 3\frac{B^2}{A^2} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

である。また,

$$(2.11) \quad E(W - \mu_W)^3 = E(W^3) - 3E(W^2)\mu_W + 2\mu_W^3,$$

$$(2.12) \quad E(W - \mu_W)^4 = E(W^4) - 4E(W^3)\mu_W + 6E(W^2)\mu_W^2 - 3\mu_W^4$$

の関係より,

$$c := \frac{\alpha}{k_0} + \frac{r}{\sqrt{n}},$$

$$E_{ij} := E(\bar{U}^i \bar{X}^j) = E(\bar{U}^i) E(\bar{X}^j) \quad (i, j = 0, 1, \dots, 4 \text{ and } 2 \leq i + j \leq 4)$$

とすると,  $W = \bar{U} - c\bar{X}$  であり, 次の関係が成り立つ.

$$(2.13) \quad E(W^2) = E_{20} - 2cE_{11} + c^2E_{02},$$

$$(2.14) \quad E(W^3) = E_{30} - 3cE_{21} + 3c^2E_{12} - c^3E_{03},$$

$$(2.15) \quad E(W^4) = E_{40} - 4cE_{31} + 6c^2E_{22} - 4c^3E_{13} + c^4E_{04}.$$

ここで,

$$E_{20} = E(\bar{U}^2) = \frac{1}{n}\delta, \quad E_{02} = E(\bar{X}^2) = k_0^2 + \frac{1}{n}k_1,$$

$$E_{30} = E(\bar{U}^3) = \frac{1}{n^2}\eta, \quad E_{21} = E(\bar{U}^2 \bar{X}) = \frac{1}{n}(k_0\delta),$$

$$E_{03} = E(\bar{X}^3) = k_0^3 + \frac{1}{n}(3k_0k_1) + \frac{1}{n^2}(k_2 - 3k_0k_1 - k_0^3),$$

$$E_{40} = E(\bar{U}^4) = \frac{1}{n^2}(3\delta^2) + \frac{1}{n^3}(-3\delta^2 + \gamma),$$

$$E_{31} = E(\bar{U}^3 \bar{X}) = \frac{1}{n^2}(k_0\eta), \quad E_{22} = E(\bar{U}^2 \bar{X}^2) = \frac{1}{n}(k_0^2\delta) + \frac{1}{n^2}(k_1\delta),$$

$$E_{04} = E(\bar{X}^4) = k_0^4 + \frac{1}{n}(6k_0^2k_1) + \frac{1}{n^2}(-4k_0^4 - 12k_0^2k_1 + 4k_0k_2 + 3k_1^2) \\ + \frac{1}{n^3}(3k_0^4 + 6k_0^2k_1 - 3k_1^2 - 4k_0k_2 + k_3),$$

$E_{1j} = E(\bar{U} \bar{X}^j) = 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) である。これらの  $E_{ij}$  の値を (2.13) - (2.15) に代入して,

$$(2.16) \quad E(W^2) = \alpha^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}(2k_0r\alpha) + \frac{1}{n} \left( \delta + \frac{k_1}{k_0^2}\alpha^2 + k_0^2r^2 \right) \\ + \frac{1}{n\sqrt{n}} \left( 2\frac{k_1}{k_0}r\alpha \right) + \frac{1}{n^2}(k_1r^2),$$

$$\begin{aligned}
(2.17) \quad E(W^3) &= -\alpha^3 + \frac{1}{\sqrt{n}} (-3k_0 r \alpha^2) \\
&+ \frac{1}{n} \left( -3\alpha\delta - 3\frac{k_1}{k_0^2} \alpha^3 - 3k_0^2 r^2 \alpha \right) \\
&+ \frac{1}{n\sqrt{n}} \left( -3k_0 r \delta - 9\frac{k_1}{k_0} r \alpha^2 - k_0^3 r^3 \right) \\
&+ \frac{1}{n^2} \left\{ \eta - \left( \frac{k_2}{k_0^3} - 3\frac{k_1}{k_0^2} - 1 \right) \alpha^3 - 9k_1 r^2 \alpha \right\} \\
&+ \frac{1}{n^2\sqrt{n}} \left\{ -3 \left( \frac{k_2}{k_0^2} - 3\frac{k_1}{k_0} - k_0 \right) r \alpha^2 - 3k_0 k_1 r^3 \right\} \\
&+ \frac{1}{n^3} \left\{ -3 \left( \frac{k_2}{k_0} - 3k_1 - k_0^2 \right) r^2 \alpha \right\} \\
&+ o\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.18) \quad E(W^4) &= \alpha^4 + \frac{1}{\sqrt{n}} (4k_0 r \alpha^3) \\
&+ \frac{1}{n} \left( 6\alpha^2 \delta + 6k_0^2 r^2 \alpha^2 + 6\frac{k_1}{k_0^2} \alpha^4 \right) \\
&+ \frac{1}{n\sqrt{n}} \left( 12k_0 r \alpha \delta + 4k_0^3 r^3 \alpha + 24\frac{k_1}{k_0} r \alpha^3 \right) \\
&+ \frac{1}{n^2} c_1 + \frac{1}{n^2\sqrt{n}} c_2 + \frac{1}{n^3} c_3 \\
&+ o\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
c_1 &:= -4\alpha^4 + 3\delta^2 - 4\alpha\eta + 6k_0^2 r^2 \delta + k_0^4 r^4 + 36k_1 r^2 \alpha^2 \\
&- 12\frac{k_1}{k_0^2} \alpha^4 + 6\frac{k_1}{k_0^2} \alpha^2 \delta + 4\frac{k_2}{k_0^3} \alpha^4 + 3\frac{k_1^2}{k_0^4} \alpha^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &:= -16k_0 r \alpha^3 - 4k_0 r \eta + 24k_0 k_1 r^3 \alpha \\
&- 48\frac{k_1}{k_0} r \alpha^3 + 12\frac{k_1}{k_0} r \alpha \delta + 16\frac{k_2}{k_0^2} r \alpha^3 + 12\frac{k_1^2}{k_0^3} r \alpha^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 &:= 3\alpha^4 + \gamma - 3\delta^2 - 24k_0^2 r^2 \alpha^2 - 72k_1 r^2 \alpha^2 + 6k_1 r^2 \delta + 6k_0^2 k_1 r^4 \\
&+ 24\frac{k_2}{k_0} r^2 \alpha^2 + 6\frac{k_1}{k_0^2} \alpha^4 + 18\frac{k_1^2}{k_0^2} r^2 \alpha^2 - 4\frac{k_2}{k_0^3} \alpha^4 - 3\frac{k_1^2}{k_0^4} \alpha^4 + \frac{k_3}{k_0^4} \alpha^4.
\end{aligned}$$

(2.2) と (2.16) - (2.18) を (2.11) と (2.12) に代入すると、

$$(2.19) \quad E(W - \mu_w)^3 = \frac{1}{n^2} D + \frac{1}{n^2\sqrt{n}} E + o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right),$$

$$(2.20) \quad E(W - \mu_W)^4 = \frac{1}{n^2} (3A^2) + \frac{1}{n^2\sqrt{n}} (6AB) + \frac{1}{n^3} F + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

となる。ここで、

$$D := \eta + \left(1 - \frac{k_2}{k_0^3} + 3\frac{k_1}{k_0^2}\right) \alpha^3,$$

$$E := 3 \left(k_0 + 3\frac{k_1}{k_0} - \frac{k_2}{k_0^2}\right) r \alpha^2,$$

$$F := 3\alpha^4 + \gamma - 3\delta^2 + 6k_1 r^2 \delta \\ + 6\frac{k_1}{k_0^2} \alpha^4 - 3\frac{k_1^2}{k_0^4} \alpha^4 + 18\frac{k_1^2}{k_0^2} r^2 \alpha^2 - 4\frac{k_2}{k_0^3} \alpha^4 + \frac{k_3}{k_0^4} \alpha^4$$

である。(2.9), (2.10), (2.19), (2.20) を (2.7) と (2.8) に代入すると, (2.5) と (2.6) より,

$$(2.21) \quad \kappa_3 = \frac{1}{A^{3/2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} D + \frac{1}{n} \left( E - \frac{3}{2} \frac{BD}{A} \right) \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(2.22) \quad \kappa_4 = \frac{1}{n} \frac{1}{A^2} (F - 3B^2 - 6AC) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる。また, (2.21) より,

$$(2.23) \quad \kappa_3^2 = \frac{1}{n} \frac{D^2}{A^3} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

である。したがって,  $F_R(r)$  の高次近似は上記の  $A, B, C, D, E, F$  を求めることによって, (2.21), (2.22), (2.23) を求め, これを (2.4) に代入することによって得られる。

一方, Cornish-Fisher 展開を用いて, 比推定量のパーセント点の高次近似を考えることもできる。いま,  $r$  の関数であるものは,  $z(r), \mu_W(r), \sigma_W(r), B(r), C(r), E(r), F(r), \kappa_3(r), \kappa_4(r)$  のように明記して, 上記と同じ記号を用いることにする。

$r_p$  を  $\sqrt{n}(R - \rho)$  の上側 100  $p$  パーセント点とする。すなわち,

$$F_R(r_p) = P\{\sqrt{n}(R - \rho) \leq r_p\} = 1 - p$$

である。このとき,  $F_R(r_p) = P\{Z \leq z(r_p)\}$  である。ここで,

$$(2.24) \quad z(r_p) = \frac{-\alpha - \mu_W(r_p)}{\sigma_W(r_p)} = \frac{k_0 r_p}{\sqrt{A + \frac{1}{\sqrt{n}} B(r_p) + \frac{1}{n} C(r_p)}}$$

である。Cornish-Fisher 展開を用いて,

$$(2.25) \quad z(r_p) = u_p + \frac{\kappa_3(r_p)}{6} (u_p^2 - 1) + \frac{\kappa_4(r_p)}{24} (u_p^3 - 3u_p) \\ + \frac{\kappa_3^2}{36} (-2u_p^3 + 5u_p) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

である。ここで,

$$(2.26) \quad \kappa_3(r_p) = \frac{1}{A^{3/2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} D + \frac{1}{n} \left( E(r_p) - \frac{3}{2} \frac{B(r_p) D}{A} \right) \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(2.27) \quad \kappa_4(r_p) = \frac{1}{n} \frac{1}{A^2} \left( F(r_p) - 3B(r_p)^2 - 6AC(r_p) \right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

である。また、 $u_p$  は標準正規分布の上側  $100p$  パーセント点、すなわち、 $\Phi(u_p) = 1 - p$  である。したがって、 $r_p$  は (2.25) に (2.24), (2.26), (2.27) を代入した式を解くことによって求めることができる。(2.25) を数値的に解くためには、Newton 法のような反復法が適用される。

### 3. 適用例

近似式の精度を確認するために、いくつかの例を示す。 $\sqrt{n}(R - \rho)$  の真の確率分布関数である  $F_R(r)$  を求めるのは容易ではないので、パラメータに適当な値を設定して、経験分布関数をモンテカルロシミュレーションで求める。これを真の確率分布関数とみなし、 $F_R(r)$  の近似式と比較を行う。 $\sqrt{n}(R - \rho)$  の経験分布関数を  $\hat{F}_R(r)$  とすると、 $\hat{F}_R(r)$  は次のように定義される。

$$\hat{F}_R(r) := \frac{\#\{\sqrt{n}(R - \rho) \leq r\}}{b}$$

ここで  $b$  はシミュレーションを行う回数、 $\#\{\sqrt{n}(R - \rho) \leq r\}$  はシミュレーションで得られる  $\sqrt{n}(R - \rho)$  の値が  $r$  を越えない回数をそれぞれ表す。 $F_R(r)$  の近似式としては、Edgeworth 展開によるものと、正規分布によるもの (Edgeworth 展開の第 1 項のみを使用することに相当) の 2 つを考える。

以下の例では、 $U_1, \dots, U_n$  が独立に平均 0、分散  $\sigma^2$  の正規分布に従っていると仮定する。このとき、 $E(U_i) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ )、 $\delta = \sigma^2$ 、 $\eta = 0$ 、 $\gamma = 3\sigma^4$  である。いま、 $\alpha = 2$ 、 $\beta = 1$ 、 $\sigma = 1$ 、そして、シミュレーションの繰り返し回数  $b$  を 10000 にする。

例 3.1 (Gamma case).  $X_1, \dots, X_n$  は独立にガンマ分布に従うとする。密度関数は、 $x > 0$  のとき、

$$\frac{1}{\Gamma(h)} e^{-x} x^{h-1},$$

その他のときは 0 である。また、 $h > 0$  である。このとき、 $k_0 = k_1 = h$ 、 $k_2 = (h + 2)(h + 1)h$ 、 $k_3 = h^4 + 6h^3 + 11h^2 + 6h$  である。

Figure 1 は  $n = 10$  のとき、 $h = 0.5, 1, 1.5, 2$  のそれぞれの場合の経験分布関数  $\hat{F}_R(r)$  と  $F_R(r)$  の近似の比較を表している。Figure 2 は Figure 1 で近似の度合いが一番悪い  $h = 0.5$  の場合について、 $n = 10, 15, 20, 25$  とした場合の近似の比較を表している。

この例でパーセント点の高次近似の適用を行う。確率の計算の場合と同様に、 $F_R(r)$  のパーセント点の真の値を計算するのは難しいので、経験分布関数  $\hat{F}_R(r)$  の上側  $100p$  パーセント点である  $b(1-p) + 1$  番目の順序統計量:  $r_p = r_{(b(1-p)+1)}$  を  $F_R(r)$  の真のパーセント点とみなす。

いま、 $\hat{F}_R(r)$  の上側 5 パーセント点  $r_{(9501)}$  と  $F_R(r)$  の上側 5 パーセント点  $r_{0.05}$  の近似の比較を行う。近似としては、Cornish-Fisher 展開 (2.25) によるものと正規分布によるものの 2 つを考える。正規分布による近似では  $z(r_p) = u_p$  の関係を満たす  $r_p$  を求

Table 1.  $X$  にガンマ分布を仮定した場合に  $n = 10, \alpha = 2, \beta = 1, \sigma^2 = 1, b = 10000$  としたときの  $h = 1(0.5)5$  における  $\hat{F}_R(r)$  の上側 5 パーセント点  $r_{(9501)}$  と  $r_{0.05}$  の近似の比較.

$h$	$r_{(9501)}$ of $\hat{F}_R(r)$	Cornish-Fisher Approximation		Normal Approximation	
		Approximation of $r_{0.05}$	Error from $r_{(9501)}$	Approximation of $r_{0.05}$	Error from $r_{(9501)}$
1	5.668303	5.60528	-0.063023	7.24965	1.581347
1.5	3.008991	2.93707	-0.071921	3.42589	0.416899
2	1.920881	1.89113	-0.029751	2.10446	0.183579
2.5	1.349946	1.35846	0.008514	1.47162	0.121674
3	1.030939	1.04394	0.013001	1.11154	0.080601
3.5	0.8527138	0.839629	-0.0130848	0.883396	0.0306822
4	0.6910905	0.697767	0.0066765	0.727797	0.0367065
4.5	0.6071027	0.594297	-0.0128057	0.615828	0.0087253
5	0.5126955	0.51592	0.0032245	0.531902	0.0192065

めることになる. Table 1 に  $n = 10$  のときに  $h = 1(0.5)5$  とした場合のそれぞれの値を表している.

例 3.2 ( $\chi^2$ -case).  $X_1, \dots, X_n$  は独立に自由度  $\nu$  のカイ 2 乗分布に従うとする. 密度関数は,  $x > 0$  のとき,

$$\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} e^{-x/2} x^{(\nu/2)-1}$$

その他のときは 0 である. このとき,  $k_0 = \nu, k_1 = 2\nu, k_2 = \nu(\nu + 2)(\nu + 4), k_3 = \nu(\nu + 2)(\nu + 4)(\nu + 6)$  である.

Figure 3 は  $n = 10$  のとき,  $\nu = 1, 2, 3, 4$  のそれぞれの場合の経験分布関数  $\hat{F}_R(r)$  と  $F_R(r)$  の近似の比較を表している. Figure 4 は Figure 3 で近似の度合いが一番悪い  $\nu = 1$  の場合について,  $n = 10, 15, 20, 25$  とした場合の近似の比較を表している.

例 3.3 (Lognormal case).  $X_1, \dots, X_n$  は独立に対数正規分布に従うとする. 密度関数は,  $x > 0$  のとき,

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma_{LN}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\log x - \zeta)^2}{\sigma_{LN}^2}}$$

その他のときは 0 である. ここで,  $\sigma_{LN} > 0$  である.  $X$  の  $r$  次のモーメントは  $E(X^r) = e^{r\zeta + r^2\sigma_{LN}^2/2}$  である. いま,  $\zeta = 0$  とする. このとき,  $k_0 = e^{\frac{1}{2}\sigma_{LN}^2}, k_1 = e^{2\sigma_{LN}^2} - e^{\sigma_{LN}^2}, k_2 = e^{\frac{9}{2}\sigma_{LN}^2}, k_3 = e^{8\sigma_{LN}^2}$  である.

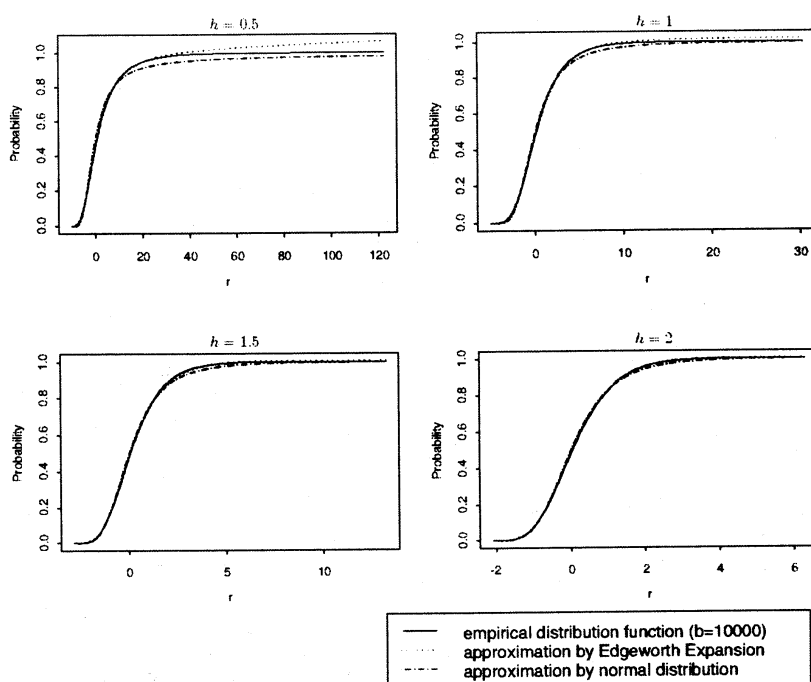


Figure 1.  $X$  にガンマ分布を仮定した場合に  $n = 10$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma^2 = 1$ ,  $b = 10000$  としたときの  $h = 0.5, 1, 1.5, 2$  における  $\hat{F}_R(r)$  と  $F_R(r)$  の近似の比較.

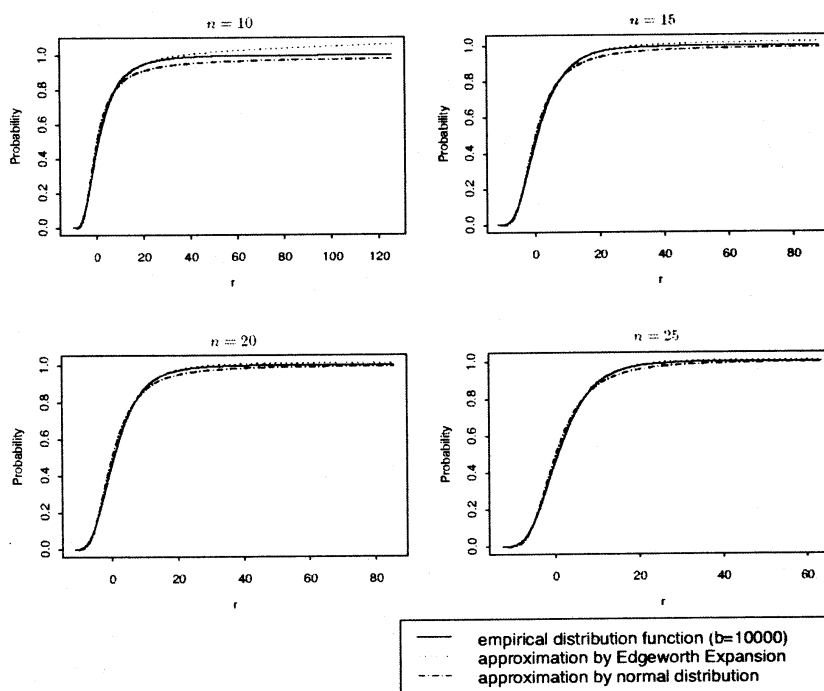


Figure 2.  $X$  にガンマ分布を仮定した場合に  $h = 0.5$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma^2 = 1$ ,  $b = 10000$  としたときの  $n = 10, 15, 20, 25$  における  $\hat{F}_R(r)$  と  $F_R(r)$  の近似の比較.



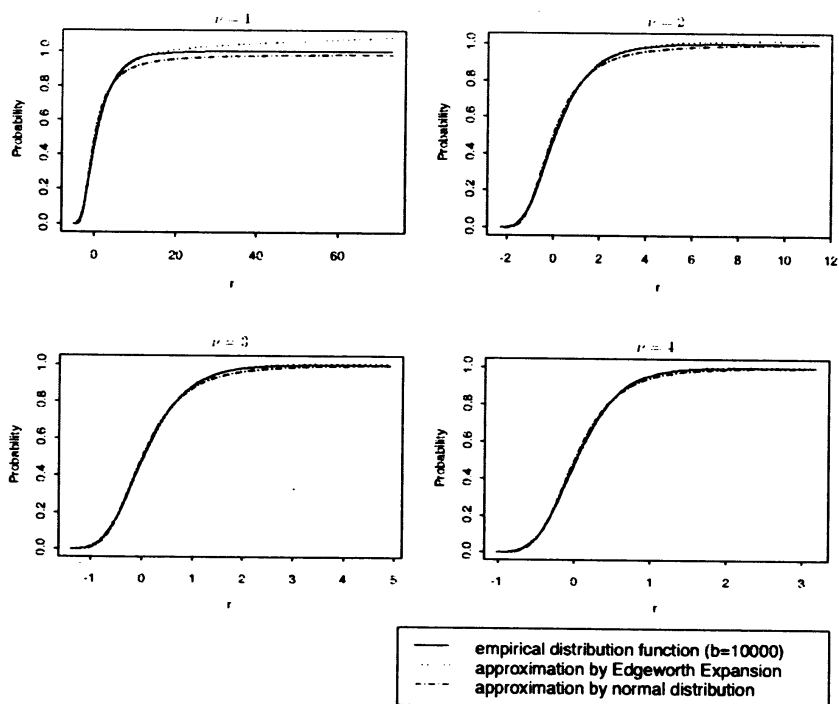


Figure 3.  $X$  に  $\chi^2$  分布を仮定した場合に  $n=10$ ,  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$ ,  $\sigma^2=1$ ,  $b=10000$  としたときの  $\nu=1, 2, 3, 4$  における  $\hat{F}_R(r)$  と  $F_R(r)$  の近似の比較.

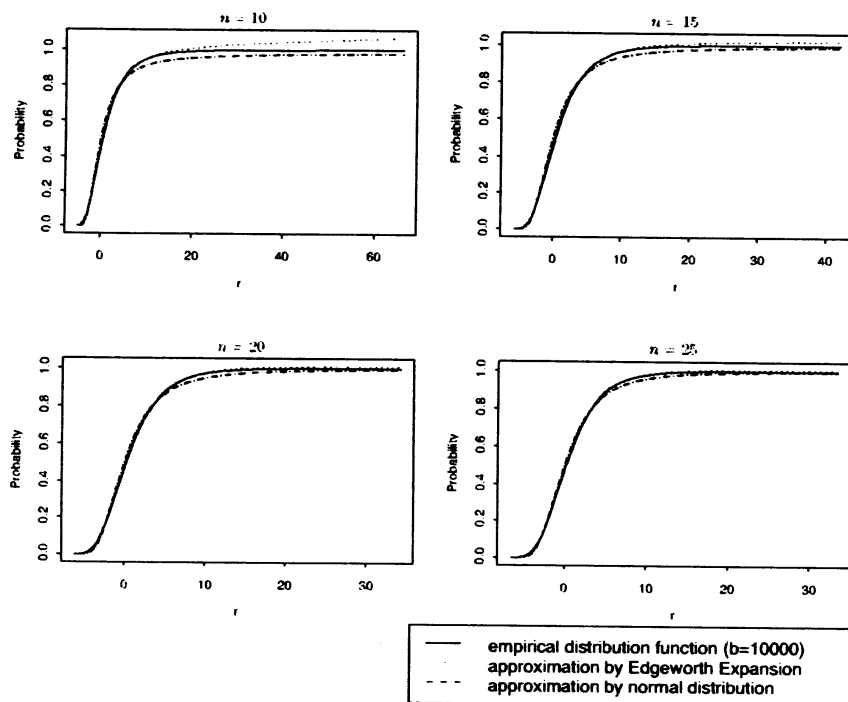


Figure 4.  $X$  に  $\chi^2$  分布を仮定した場合に  $\nu=1$ ,  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$ ,  $\sigma^2=1$ ,  $b=10000$  としたときの  $n=10, 15, 20, 25$  における  $\hat{F}_R(r)$  と  $F_R(r)$  の近似の比較.

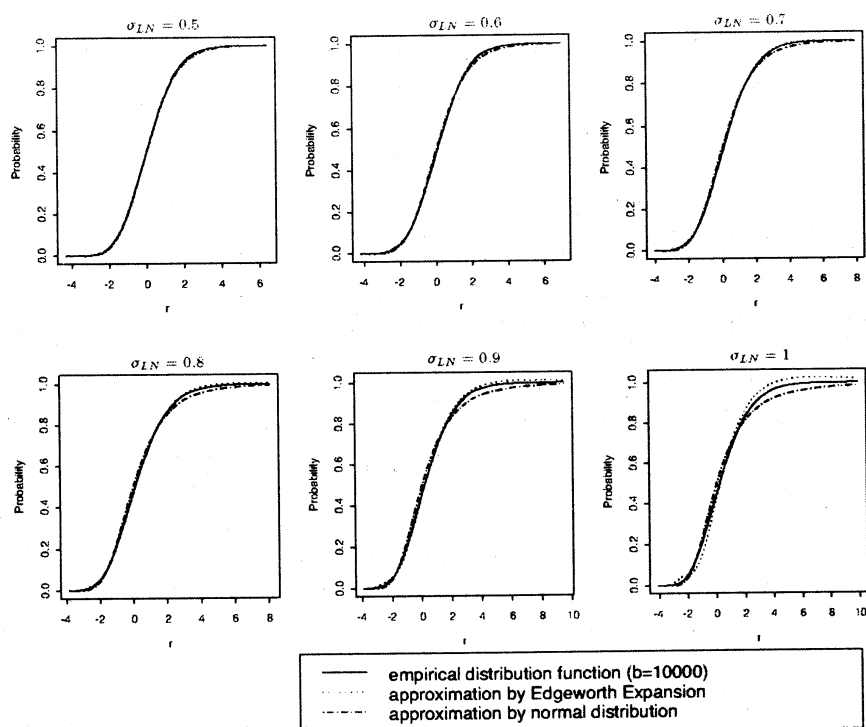


Figure 5.  $X$  に対数正規分布を仮定した場合に  $n = 20$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma^2 = 1$ ,  $b = 10000$  としたときの  $\sigma_{LN} = 0.5(0.1)1$  における  $\hat{F}_R(r)$  と  $F_R(r)$  の近似の比較.

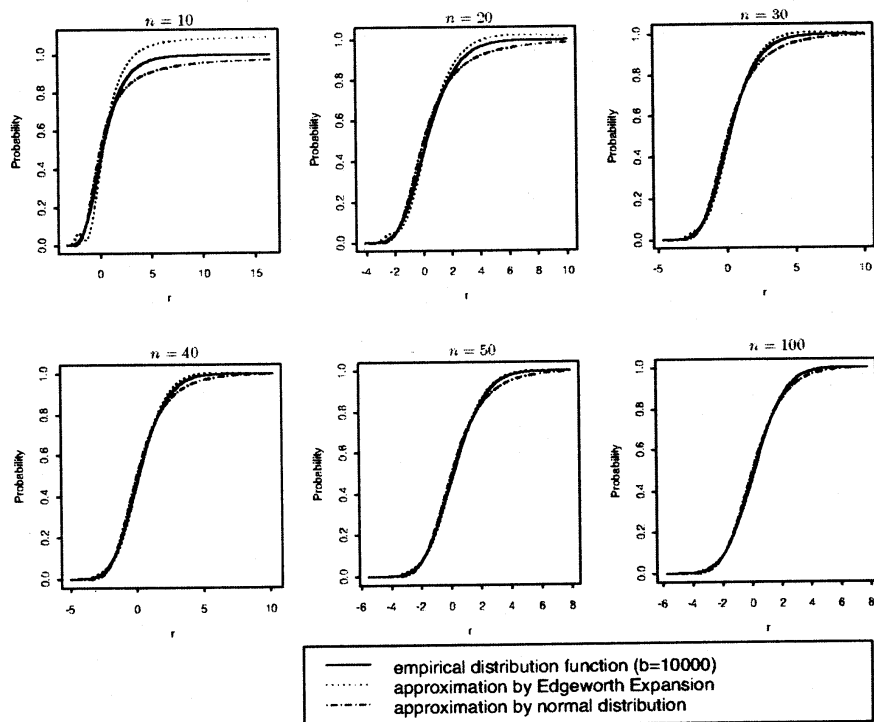


Figure 6.  $X$  に対数正規分布を仮定した場合に  $\sigma_{LN} = 1$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma^2 = 1$ ,  $b = 10000$  としたときの  $n = 10(10)50, 100$  における  $\hat{F}_R(r)$  と  $F_R(r)$  の近似の比較.

Figure 5 は  $n = 20$  のとき,  $\sigma_{LN} = 0.5(0.1)1$  のそれぞれの場合の経験分布関数  $\hat{F}_R(r)$  と  $F_R(r)$  の近似の比較を表している. Figure 6 は Figure 5 で近似の度合いが一番悪い  $\sigma_{LN} = 1$  の場合について,  $n = 10(10)50, 100$  とした場合の近似の比較を表している.

## 付録

付録として, 近似式の導出及び適用例の計算に用いたプログラムを示す.

プログラム 1-1 から 1-3 は, 式 (2.16)-(2.20) を導出するための Mathematica による数式処理の例である. なお, このプログラムにおける  $E_{w^2}$ ,  $E_{w^3}$ ,  $E_{w^4}$ ,  $EW3m$ ,  $EW4m$  は  $E(W^2)$ ,  $E(W^3)$ ,  $E(W^4)$ ,  $E(W - \mu_W)^3$ ,  $E(W - \mu_W)^4$  にそれぞれ対応する.

プログラム 2 は, 例 3.1 の  $\hat{F}_R(r)$  と  $F_R(r)$  の近似値の計算および図を描くための S-PLUS によるプログラムである. このプログラムは, 経験分布関数  $\hat{F}_R(r)$  作成のためのモンテカルロシミュレーションによるデータの生成,  $F_R(r)$  の近似値の計算, これら二つを用いた図の作成の3つの部分からなり, それぞれ ratio, pratio, PlotCDF の名前がついている. pratio において, a, b, c, d, e は近似式の導出における  $A, B, C, D, E$  に対応する. また, g は  $\kappa_4$  ((2.22) 式) の  $n^{-1}$  の項にある  $F - 3B^2 - 6AC$  を計算したものに对应する.

プログラム 3 は, 例 3.1 の上側5パーセント点  $r_{0.05}$  の近似値を計算するための Mathematica によるプログラムである. このプログラムは, 関数として作成し,  $h$  を与えることによって, 近似値が計算される.  $h = 1$  を与えたときの出力も示している. このプログラムにおける,  $f_0, f_1, f_2, f_3$  は  $z(r_p)$ ,  $\kappa_3(r_p)$ ,  $\kappa_4(r_p)$ ,  $\kappa_3^2$  の値にそれぞれ対応する.

$$\begin{aligned}
E_{20} &:= \frac{\delta}{n}; E_{11} := 0; E_{02} := \frac{k_1}{n} + k_0^2; \\
E_{30} &:= \frac{\eta}{n^2}; E_{21} := \frac{1}{n} (k_0 \delta); E_{12} := 0; \\
E_{03} &:= k_0^3 + \frac{1}{n} (3 k_0 k_1) + \frac{1}{n^2} (k_2 - 3 k_0 k_1 - k_0^3); \\
E_{40} &:= \frac{1}{n^2} (3 \delta^2) + \frac{1}{n^3} (-3 \delta^2 + \gamma); \\
E_{31} &:= \frac{1}{n^2} (k_0 \eta); E_{22} := \frac{1}{n} (k_0^2 \delta) + \frac{1}{n^2} (k_1 \delta); E_{13} := 0; \\
E_{04} &:= k_0^4 + \frac{6 k_0^2 k_1}{n} + \frac{-4 k_0^4 - 12 k_0^2 k_1 + 3 k_1^2 + 4 k_0 k_2}{n^2} + \frac{3 k_0^4 + 6 k_0^2 k_1 - 3 k_1^2 - 4 k_0 k_2 + k_3}{n^3}; \\
c &:= \frac{\alpha}{k_0} + \frac{r}{\sqrt{n}}; \\
\mu_W &:= -\alpha - \frac{1}{\sqrt{n}} (k_0 r); \\
E_{W^2} &:= E_{20} - 2 c E_{11} + c^2 E_{02}; \\
E_{W^3} &:= E_{30} - 3 c E_{21} + 3 c^2 E_{12} - c^3 E_{03}; \\
E_{W^4} &:= E_{40} - 4 c E_{31} + 6 c^2 E_{22} - 4 c^3 E_{13} + c^4 E_{04}; \\
EW3m &:= E_{W^3} - 3 E_{W^2} \mu_W + 2 \mu_W^3; \\
EW4m &:= E_{W^4} - 4 E_{W^3} \mu_W + 6 E_{W^2} \mu_W^2 - 3 \mu_W^4;
\end{aligned}$$

$E_{W^2}$

$$\frac{\delta}{n} + \left( \frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0} \right)^2 \left( k_0^2 + \frac{k_1}{n} \right)$$

**Simplify[%]**

$$\frac{\delta}{n} + \left( \frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0} \right)^2 \left( k_0^2 + \frac{k_1}{n} \right)$$

**Collect[%, n]**

$$\alpha^2 + \frac{2 r \alpha k_0}{\sqrt{n}} + \frac{r^2 k_1}{n^2} + \frac{2 r \alpha k_1}{n^{3/2} k_0} + \frac{\delta + r^2 k_0^2 + \frac{\alpha^2 k_1}{k_0^2}}{n}$$

$E_{W^3}$

$$\frac{\eta}{n^2} - \frac{3 \delta \left( \frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0} \right) k_0}{n} - \left( \frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0} \right)^3 \left( k_0^3 + \frac{3 k_0 k_1}{n} + \frac{-k_0^3 - 3 k_0 k_1 + k_2}{n^2} \right)$$

**Simplify[%]**

$$\frac{n^{3/2} \eta - 3 n^2 \delta (\sqrt{n} \alpha + r k_0) - \frac{(\sqrt{n} \alpha + r k_0)^3 ((-1+n^2) k_0^3 + 3(-1+n) k_0 k_1 + k_2)}{k_0^3}}{n^{7/2}}$$

**Collect[%, n]**

$$\begin{aligned}
& -\alpha^3 - \frac{3 r \alpha^2 k_0}{\sqrt{n}} + \frac{-3 \alpha \delta - 3 r^2 \alpha k_0^2 - \frac{3 \alpha^3 k_1}{k_0^2}}{n} + \frac{-3 r \delta k_0 - r^3 k_0^3 - \frac{9 r \alpha^2 k_1}{k_0}}{n^{3/2}} + \\
& \frac{r^3 k_0^3 + 3 r^3 k_0 k_1 - r^3 k_2}{n^{7/2}} + \frac{\alpha^3 + \eta - 9 r^2 \alpha k_1 + \frac{3 \alpha^3 k_1}{k_0^2} - \frac{\alpha^3 k_2}{k_0^3}}{n^2} + \\
& \frac{3 r \alpha^2 k_0 + \frac{9 r \alpha^2 k_1}{k_0} - 3 r^3 k_0 k_1 - \frac{3 r \alpha^2 k_2}{k_0^2}}{n^{5/2}} + \frac{3 r^2 \alpha k_0^2 + 9 r^2 \alpha k_1 - \frac{3 r^2 \alpha k_2}{k_0}}{n^3}
\end{aligned}$$

プログラム 1-1. Mathematica による数式処理の例.

$$\frac{3\delta^2}{n^2} + \frac{\gamma - 3\delta^2}{n^3} - \frac{4\eta\left(\frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0}\right)k_0}{n^2} + 6\left(\frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0}\right)^2\left(\frac{\delta k_0^2}{n} + \frac{\delta k_1}{n^2}\right) +$$

$$\left(\frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0}\right)^4\left(k_0^4 + \frac{6k_0^2 k_1}{n} + \frac{-4k_0^4 - 12k_0^2 k_1 + 3k_1^2 + 4k_0 k_2}{n^2} + \frac{3k_0^4 + 6k_0^2 k_1 - 3k_1^2 - 4k_0 k_2 + k_3}{n^3}\right)$$

**Simplify[ $\%$ ]**

$$\frac{1}{n^5}\left(3n^3\delta^2 + n^2(\gamma - 3\delta^2) - 4(n^3\alpha\eta + n^{5/2}r\eta k_0) + \frac{6\delta(n^{3/2}\alpha + nrk_0)^2(nk_0^2 + k_1)}{k_0^2} + \frac{(\sqrt{n}\alpha + rk_0)^4((3 - 4n + n^3)k_0^4 + 6(-1 + n)^2k_0^2k_1 + 3(-1 + n)k_1^2 + 4(-1 + n)k_0k_2 + k_3)}{k_0^4}\right)$$

**Collect[ $\%$ , n]**

$$\alpha^4 + \frac{4r\alpha^3 k_0}{\sqrt{n}} + \frac{6\alpha^2\delta + 6r^2\alpha^2 k_0^2 + \frac{6\alpha^4 k_1}{k_0^2}}{n} + \frac{12r\alpha\delta k_0 + 4r^3\alpha k_0^3 + \frac{24r\alpha^3 k_1}{k_0}}{n^{3/2}} +$$

$$\frac{-4\alpha^4 + 3\delta^2 - 4\alpha\eta + 6r^2\delta k_0^2 + r^4 k_0^4 + 36r^2\alpha^2 k_1 - \frac{12\alpha^4 k_1}{k_0^2} + \frac{6\alpha^2\delta k_1}{k_0^2} + \frac{3\alpha^4 k_1^2}{k_0^2} + \frac{4\alpha^4 k_2}{k_0^2}}{n^2} +$$

$$\frac{-16r\alpha^3 k_0 - 4r\eta k_0 - \frac{48r\alpha^3 k_1}{k_0} + \frac{12r\alpha\delta k_1}{k_0} + 24r^3\alpha k_0 k_1 + \frac{12r\alpha^3 k_1^2}{k_0^2} + \frac{16r\alpha^3 k_2}{k_0^2}}{n^{5/2}} +$$

$$\frac{3r^4 k_0^4 + 6r^4 k_0^2 k_1 - 3r^4 k_1^2 - 4r^4 k_0 k_2 + r^4 k_3}{n^3} +$$

$$\frac{1}{n^3}\left(3\alpha^4 + \gamma - 3\delta^2 - 24r^2\alpha^2 k_0^2 - 72r^2\alpha^2 k_1 + 6r^2\delta k_1 + \frac{6\alpha^4 k_1}{k_0^2} + \frac{6r^4 k_0^2 k_1 - 3\alpha^4 k_1^2 + \frac{18r^2\alpha^2 k_1^2}{k_0^2} - \frac{4\alpha^4 k_2}{k_0^2} + \frac{24r^2\alpha^2 k_2}{k_0} + \frac{\alpha^4 k_3}{k_0^4}\right) +$$

$$\frac{1}{n^{7/2}}\left(12r\alpha^3 k_0 - 16r^3\alpha k_0^3 + \frac{24r\alpha^3 k_1}{k_0} - 48r^3\alpha k_0 k_1 - \frac{12r\alpha^3 k_1^2}{k_0^2} + \frac{12r^3\alpha k_1^2}{k_0} + 16r^3\alpha k_2 - \frac{16r\alpha^3 k_2}{k_0^2} + \frac{4r\alpha^3 k_3}{k_0^3}\right) +$$

$$\frac{1}{n^4}\left(18r^2\alpha^2 k_0^2 - 4r^4 k_0^4 + 36r^2\alpha^2 k_1 - 12r^4 k_0^2 k_1 + 3r^4 k_1^2 - \frac{18r^2\alpha^2 k_1^2}{k_0^2} - \frac{24r^2\alpha^2 k_2}{k_0} + \frac{4r^4 k_0 k_2 + \frac{6r^2\alpha^2 k_3}{k_0^2}}{n^3}\right) + \frac{12r^3\alpha k_0^3 + 24r^3\alpha k_0 k_1 - \frac{12r^3\alpha k_1^2}{k_0} - 16r^3\alpha k_2 + \frac{4r^3\alpha k_3}{k_0}}{n^{9/2}}$$

**EW3m**

$$\frac{\eta}{n^2} - \frac{3\delta\left(\frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0}\right)k_0}{n} + 2\left(-\alpha - \frac{rk_0}{\sqrt{n}}\right)^3 -$$

$$3\left(-\alpha - \frac{rk_0}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{\delta}{n} + \left(\frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0}\right)^2\left(k_0^2 + \frac{k_1}{n}\right)\right) - \left(\frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0}\right)^3\left(k_0^3 + \frac{3k_0 k_1}{n} + \frac{-k_0^3 - 3k_0 k_1 + k_2}{n^2}\right)$$

**Simplify[ $\%$ ]**

$$\frac{1}{n^{7/2}k_0^3}\left(3\sqrt{n}r^2\alpha k_0^5 + r^3 k_0^6 + 3k_0^4(nr\alpha^2 + r^3 k_1) - n^{3/2}\alpha^3 k_2 + 3n\alpha^2 k_0(\sqrt{n}\alpha k_1 - rk_2) + k_0^3(n^{3/2}\alpha^3 + n^{3/2}\eta + 9\sqrt{n}r^2\alpha k_1 - r^3 k_2) + 3k_0^2(3nr\alpha^2 k_1 - \sqrt{n}r^2\alpha k_2)\right)$$

プログラム 1-2. Mathematica による数式処理の例 (つづき).

Collect[%, n]

$$\frac{r^3 k_0^3 + 3 r^3 k_0 k_1 - r^3 k_2}{n^{7/2}} + \frac{\alpha^3 + \eta + \frac{3\alpha^3 k_1}{k_0^2} - \frac{\alpha^3 k_2}{k_0^2}}{n^2} +$$

$$\frac{3 r \alpha^2 k_0 + \frac{9 r \alpha^2 k_1}{k_0} - \frac{3 r \alpha^2 k_2}{k_0^2}}{n^{5/2}} + \frac{3 r^2 \alpha k_0^2 + 9 r^2 \alpha k_1 - \frac{3 r^2 \alpha k_2}{k_0}}{n^3}$$

EW4m

$$\frac{3 \delta^2}{n^2} + \frac{\gamma - 3 \delta^2}{n^3} - \frac{4 \eta \left( \frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0} \right) k_0}{n^2} - 3 \left( -\alpha - \frac{r k_0}{\sqrt{n}} \right)^4 +$$

$$6 \left( \frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0} \right)^2 \left( \frac{\delta k_0^2}{n} + \frac{\delta k_1}{n^2} \right) + 6 \left( -\alpha - \frac{r k_0}{\sqrt{n}} \right)^2 \left( \frac{\delta}{n} + \left( \frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0} \right)^2 \left( k_0^2 + \frac{k_1}{n} \right) \right) -$$

$$4 \left( -\alpha - \frac{r k_0}{\sqrt{n}} \right) \left( \frac{\eta}{n^2} - \frac{3 \delta \left( \frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0} \right) k_0}{n} - \left( \frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0} \right)^3 \left( k_0^3 + \frac{3 k_0 k_1}{n} + \frac{-k_0^3 - 3 k_0 k_1 + k_2}{n^2} \right) \right) +$$

$$\left( \frac{r}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{k_0} \right)^4 \left( k_0^4 + \frac{6 k_0^2 k_1}{n} + \frac{-4 k_0^4 - 12 k_0^2 k_1 + 3 k_1^2 + 4 k_0 k_2}{n^2} + \frac{3 k_0^4 + 6 k_0^2 k_1 - 3 k_1^2 - 4 k_0 k_2 + k_3}{n^3} \right)$$

Simplify[%]

$$\frac{1}{n^5 k_0^4} (12 \sqrt{n} r^3 \alpha k_0^7 + 3 r^4 k_0^8 + 6 k_0^6 (3 n r^2 \alpha^2 + r^4 k_1) +$$

$$4 k_0^5 (3 n^{3/2} r \alpha^3 + 6 \sqrt{n} r^3 \alpha k_1 - r^4 k_2) + n^2 \alpha^4 (3 (-1+n) k_1^2 + k_3) +$$

$$4 n^{3/2} \alpha^3 k_0 (3 (-1+n) r k_1^2 - \sqrt{n} \alpha k_2 + r k_3) + k_0^4 (3 n^2 \alpha^4 + n^2 \gamma - 3 n^2 \delta^2 +$$

$$3 n^3 \delta^2 + 6 n r^2 (6 \alpha^2 + n \delta) k_1 + 3 (-1+n) r^4 k_1^2 - 16 \sqrt{n} r^3 \alpha k_2 + r^4 k_3) +$$

$$4 \sqrt{n} r \alpha k_0^3 (3 n (2 \alpha^2 + n \delta) k_1 + 3 (-1+n) r^2 k_1^2 + r (-6 \sqrt{n} \alpha k_2 + r k_3)) +$$

$$2 n \alpha^2 k_0^2 (3 n (\alpha^2 + n \delta) k_1 + 9 (-1+n) r^2 k_1^2 + r (-8 \sqrt{n} \alpha k_2 + 3 r k_3)))$$

Collect[%, n]

$$3 \delta^2 + \frac{6 \alpha^2 \delta k_1}{k_0^2} + \frac{3 \alpha^4 k_1^2}{k_0^4} + \frac{12 r \alpha \delta k_1}{k_0} + \frac{12 r \alpha^3 k_1^2}{k_0^3} + \frac{3 r^4 k_0^4 + 6 r^4 k_0^2 k_1 - 3 r^4 k_1^2 - 4 r^4 k_0 k_2 + r^4 k_3}{n^5} +$$

$$\frac{3 \alpha^4 + \gamma - 3 \delta^2 + 6 r^2 \delta k_1 + \frac{6 \alpha^4 k_1}{k_0^2} - \frac{3 \alpha^4 k_1^2}{k_0^3} + \frac{18 r^2 \alpha^2 k_1^2}{k_0^2} - \frac{4 \alpha^4 k_2}{k_0^2} + \frac{\alpha^4 k_3}{k_0^4}}{n^3} +$$

$$\frac{12 r \alpha^3 k_0 + \frac{24 r \alpha^3 k_1}{k_0} - \frac{12 r \alpha^2 k_1^2}{k_0^2} + \frac{12 r^3 \alpha k_1^2}{k_0} - \frac{16 r \alpha^3 k_2}{k_0^2} + \frac{4 r \alpha^3 k_3}{k_0^3}}{n^{7/2}} +$$

$$\frac{18 r^2 \alpha^2 k_0^2 + 36 r^2 \alpha^2 k_1 + 3 r^4 k_1^2 - \frac{18 r^2 \alpha^2 k_1^2}{k_0^2} - \frac{24 r^2 \alpha^2 k_2}{k_0} + \frac{6 r^2 \alpha^2 k_3}{k_0^3}}{n^4} +$$

$$\frac{12 r^3 \alpha k_0^3 + 24 r^3 \alpha k_0 k_1 - \frac{12 r^3 \alpha k_1^2}{k_0} - 16 r^3 \alpha k_2 + \frac{4 r^3 \alpha k_3}{k_0}}{n^{9/2}}$$

プログラム 1-3. Mathematica による数式処理の例 (つづき)。

```

function(B = 10000, n = 10, h = 2, alpha = 2, beta = 1, sigma = 1)
{
  w <- NULL
  delta <- sigma
  k0 <- h
  rho <- beta + alpha/k0
  for(i in 1:B) {
    x <- rgamma(n, h)
    u <- rnorm(n, 0, delta)
    y <- alpha + beta * x + u
    r <- sqrt(n) * (mean(y)/mean(x) - rho)
    w <- c(w, r)
  }
  return(w)
}

> pratio
function(alpha = 2, beta = 1, r = 0, n = 10, h = 2, sigma = 1, eta = 0)
{
  delta <- sigma^2; gamma <- 3 * sigma^4
  k0 <- h; k1 <- h; k2 <- (h + 2) * (h + 1) * h
  k3 <- h^4 + 6 * h^3 + 11 * h^2 + 6 * h
  a <- eta + (1 - k2/k0^3 + (3 * k1)/k0^2) * alpha^3
  b <- 3 * (k0 + (3 * k1)/k0 - k2/k0^2) * r * alpha^2
  c <- delta + k1/k0^2 * alpha^2
  d <- (2 * k1)/k0 * r * alpha
  e <- k1 * r^2
  g <- 3 * alpha^4 + gamma - 3 * delta^2 + (6 * alpha^4 * k1)/k0^2 - (4 *
    alpha^4 * k2)/k0^3 + (alpha^4 * (-3 * k1^2 + k3))/k0^4
  kappa3 <- (1/sqrt(c))^3 * ((1/sqrt(n)) * a + (1/n) * (b - (3/2 * a * d)/c))
  kappa4 <- g/(n * c^2)
  kappa32 <- a^2/(n * c^3)
  z <- (k0 * r)/sqrt(c + sqrt(1/n) * d + (1/n) * e)
  p <- pnorm(z) - dnorm(z) * (kappa3/6 * (z^2 - 1) + kappa4/24 * (z^3 - 3 * z)
+
  kappa32/72 * (z^5 - 10 * z^3 + 15 * z))
  pn <- pnorm(z)
  return(p, pn)
}

> PlotCDF
function(m1 = 1, m2 = 10000)
{
  par(mfrow = c(2, 2))
  y <- seq(0.0001, 1, 0.0001)
  for(h in c(0.5, 1, 1.5, 2)) {
    r <- ratio(h = h)
    r <- sort(r)
    z <- pratio(r = r, h = h) #
#
# for(n in c(10, 15, 20, 25)) {
#   r <- ratio(n = n, h = 0.5)
#   r <- sort(r)
#   z <- pratio(n = n, r = r, h = 0.5)
#   x <- c(y, z$p, z$pn)
#   x <- matrix(x, 10000, 3)
#   matplot(r[m1:m2], x[m1:m2, 1:3], type = "l")
#   title(xlab = "r", ylab = "Probability")
# }
}

```

プログラム 2. 例 3.1 の  $\hat{F}_R(r)$  と  $F_R(r)$  の近似値の計算および図を描くための S-PLUS によるプログラム.

```

PPGamma[h_] :=
(
<< Statistics`NormalDistribution`
ndist = NormalDistribution[0, 1];
u := 1.64485; n := 10; α := 2; β := 1; γ := 3; δ := 1; η := 0;
k0 := h; k1 := h; k2 := (h + 2) (h + 1) h;
k3 := h^4 + 6 h^3 + 11 h^2 + 6 h;
a := δ +  $\frac{k_1}{k_0^2} \alpha^2$ ; b[r_] := 2  $\frac{k_1}{k_0} r \alpha$ ; c[r_] := k1 r^2;
d := η +  $\left(1 - \frac{k_2}{k_0^3} + 3 \frac{k_1}{k_0^2}\right) \alpha^3$ ; e[r_] := 3  $\left(k_0 + 3 \frac{k_1}{k_0} - \frac{k_2}{k_0^2}\right) r \alpha^2$ ;
f[r_] := 3 α^4 + γ - 3 δ^2 + 6 k1 r^2 δ + 6  $\frac{k_1}{k_0^2} \alpha^4 - 3 \frac{k_1^2}{k_0^4} \alpha^4 + 18 \frac{k_1^2}{k_0^2} r^2 \alpha^2 - 4 \frac{k_2}{k_0^3} \alpha^4 + \frac{k_3}{k_0^4} \alpha^4$ 
f0[r_] :=  $\frac{k_0 r}{\sqrt{a + \frac{1}{\sqrt{n}} b[r] + \frac{1}{n} c[r]}}$ ; f1[r_] := a-3/2  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} d + \frac{1}{n} \left(e[r] - \frac{3}{2} \frac{b[r] d}{a}\right)\right)$ ;
f2[r_] :=  $\frac{a^{-2}}{n} (f[r] - 3 b[r]^2 - 6 a c[r])$ ; f3 :=  $\frac{d^2}{n a^3}$ ;
g[r_] := f0[r] - u -  $\frac{f_1[r]}{6} (u^2 - 1) - \frac{f_2[r]}{24} (u^3 - 3 u) - \frac{f_3}{36} (-2 u^3 + 5 u)$ ;
(* g[r_] := f0[r] - u; *)
FindRoot[g[r] == 0, {r, 0}]
)

PPGamma[1]
{r -> 5.60528}

```

プログラム 3. 例 3.1 の上側 5 パーセント点の近似値を計算するための  
Mathematica によるプログラムと実行例.



- [1] Akahira, M. and Kawai, S. (1990). The optimality of the grouped jackknife estimator of ratio in some regression model. *J. Japan Statist. Soc.*, **20** 149-157.
- [2] Durbin, J. (1959). A note on the application of Quenouille's method of bias reduction to estimation of ratios. *Biometrika* **46** 477-480.
- [3] Gray, H. L. and Schucany, W. R. (1972). *The Generalized Jackknife Statistic*. Marcel Dekker, New York.
- [4] Kawai, S. and Akahira, M. (1994). The comparison of estimators of ratio for a regression model. *J. Japan Statist. Soc.*, **24** 141-150.
- [5] Quenouille, M. H. (1956). Notes on bias in estimation. *Biometrika* **43** 353-360.
- [6] Rao, J. N. K. (1965). A note on estimation of ratios by Quenouille's method. *Biometrika* **52** 647-649.
- [7] Rao, J. N. K. and Webster, J. T. (1966). On two methods of bias reduction in the estimation of ratios. *Biometrika* **53** 571-577.
- [8] Rao, P. S. R. S. (1988). Ratio and regression estimators. *Handbook of Statistics*, Vol. 6, (P. R. Krishnaiah and C. R. Rao, eds.), North-Holland, Amsterdam, 449-468.