数理解析研究所講究録 1274 巻 2002 年 35-41

多重ゼータ値の線型関係式について

近畿大学理工学部　大野泰生 (Yasuo Ohno)

Abstract

多重ゼータ値の間の線型関係式の全体像を理解すること、延いては多重ゼータ値のなす Q-algebra の構造を詳しく把握することを追求する上で、sum formula は基本的かつ重要な位置を占めると考えられてきた。ここでは、sum formula の一般化と考えられる定理３つについて簡単にまとめる。

1 sum formula と３つの一般化

任意の index $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ $(k_i\in\mathbf{Z},\ k_i>0)$ に対して、$k=k_1+k_2+\cdots+k_n$ を *weight*、n を *depth*、$s=\#\{i|k_i>1\}$ を *height* と呼ぶ。index $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ が $k_n\geq 2$ を満たすとき *admissible* であるという。$S(k,n)$ で weight k, depth n の index の全体を、$S_0(k,n,s)$ でそのうちの admissible index のなす部分集合を表す。また、$I(k,n,s)$ で weight k, depth n, height s の index の全体を、$I_0(k,n,s)$ でそのうちの admissible index のなす部分集合を表す。

任意の admissible index $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in I_0(k,n,s)$ に対して、多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ とは、

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_n}\frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}\cdots{m_n}^{k_n}}.$$

で定義される実数である。

はじめに sum formula を復習しておく。

Theorem 1 (sum formula [1],[8]) $0<n<k$ を満たす任意の整数 k, n に対し次が成立する。

$$\sum_{\mathbf{k}\in S_0(k,n)}\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k).$$

この定理の３つの拡張を本稿で取り扱う。sum formula は 1990年ごろに sum conjecture という名で予想され、Granville と Zagier それぞれの証明を得て定理となった。多重ゼータ値の構造を把握する上で weight と depth というふたつのインデックスが重要であることを示唆していると考えられる定理である。

拡張を述べるまえに、sum formula と並んで重要視される公式duality formula を復習しておく。

2つの admissible index $\mathbf{k} \in I_0(k,n,s)$ と $\mathbf{k}' \in I_0(k,k-n,s)$ が互いに *dual* であるとは、整数 $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_s, b_s \geq 1$ を用いて、

$$\mathbf{k} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1}, b_1+1, \underbrace{1,\ldots,1}_{a_2-1}, b_2+1, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{a_s-1}, b_s+1)$$

かつ

$$\mathbf{k}' = (\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s-1}, a_s+1, \underbrace{1,\ldots,1}_{b_{s-1}-1}, a_{s-1}+1, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1}, a_1+1)$$

と書けることを言う。この時、duality formula とは以下の等式である。

Theorem 2 (duality formula (cf.[7])) 任意の *admissible index* $\mathbf{k}$ とその *dual* $\mathbf{k}'$ に対して、以下が成立する。

$$\zeta(\mathbf{k}') = \zeta(\mathbf{k}).$$

duality formula も sum formula と同時期から予想されていたが、sum formula より早く、多重ゼータ値の反復積分表示が知られるようになった時点で反復積分表示における変数変換として証明された。

では、sum formula の3つの一般化を挙げることにする。

1.1 一般化1

まずはじめは、sum formula と duality formula, Hoffman's relation の3公式を含む形の拡張である。最近になってこの関係式は、井原, 金子, Zagier の仕事により Hoffman の *harmonic algebra* における derivation relation の言葉に翻訳され (cf.[9])、また、上野, 奥田 の仕事 ([6]) により別証明を与えられた。

Theorem 3 任意の *admissible index* $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ と整数 $l \geq 0$ に対して $Z(\mathbf{k}; l)$ を

$$Z(\mathbf{k}; l) = \sum_{\substack{c_1+c_2+\cdots+c_n=l \\ \forall c_j \geq 0}} \zeta(k_1+c_1, k_2+c_2, \ldots, k_n+c_n),$$

とし、$\mathbf{k}'$ を $\mathbf{k}$ の *dual index* とする。この時、次が成り立つ。

$$Z(\mathbf{k}'; l) = Z(\mathbf{k}; l).$$

この定理を特殊化して sum formula を得るには、$\mathbf{k} = (n+1)$, $\mathbf{k}' = (1,1,\ldots,1,2)$, $l = k-n-1$ と置けばよい。証明は [4], [10] 参照。大部分が Zagier の sum formula の証明の拡張になっているので、sum formula の別証明にはなっていない。

1.2 一般化2

次に挙げるのが、Hoffman との共同研究で得た cyclic sum formula なる公式である。

n と k を $0 < n \leq k$ を満たす整数とする。$S(k,n)$ のふたつの元が巡回同値であるとは、互いに n 文字の巡回置換（の冪）で移り合うこと、すなわち、$\sigma = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ と $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し、$(k_1, k_2, \ldots, k_n) \equiv (\sigma^j(k_1), \sigma^j(k_2), \ldots, \sigma^j(k_n))$ と定義する。$\Pi(k,n)$ を $S(k,n)$ の巡回同値類の集合とする。

次に巡回同値類の dual class を定義する。$0 < n < k$ かつ $\alpha \in \Pi(k,n)$ ならば、α に含まれる admissible indices の dual 達はすべて互いに巡回同値である。従って $\beta \in \Pi(k, k-n)$ が $\alpha \in \Pi(k,n)$ の任意の admissible な元の dual を含むとき、β を α の *dual class* と呼ぶことにする。

このとき cyclic sum formula は以下のように述べることができる。

Theorem 4 任意の $0 < n < k$, $\alpha \in \Pi(k,n)$ とその *dual* $\beta \in \Pi(k, k-n)$ に対して, 以下が成立する。

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\alpha} \zeta(k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n + 1) = \sum_{(h_1,\ldots,h_{k-n})\in\beta} \zeta(h_1, \ldots, h_{k-n-1}, h_{k-n} + 1).$$

ここでは cyclic sum formula に duality を含めた形のステートメントを採用した。もともと Hoffman が予想したのは、この右辺を duality で書き換えた形の式であったが、上記の方が対称的で理解しやすい。

この定理から sum formula を得るには、公式の左辺の α に $\Pi(k,n)$ に含まれる全ての同値類を走らせて和を取ることを行なう。すると、左辺は weight $k+1$, depth n の多重ゼータ値の総和になり、このとき右辺はやはり β が $\Pi(k, k-n)$ に含まれる同値類全部を走るため weight $k+1$, depth $k-n$ の多重ゼータ値の総和になる。このことと duality formula とを用いることにより、weight $k+1$ の多重ゼータ値の各 depth ごとの総和が一定であることが導かれ、depth 1 の場合が Rimeann ゼータ値そのものであることを考え合わせると、sum formula が得られる。

一般化1でも述べたが、最近の多重ゼータ値の研究のひとつの方向として、Hoffman の harmonic algebra の言葉で解釈するというものがある。この cyclic sum formula は harmonic algebra における cyclic derivation に対応している ([3], [9])。証明については、[3], [11] 参照。この証明を用いて sum formula の再証明ができる。

問題 この Theorem 4 と Theorem 3 を統合して拡張できないか。

1.3 一般化3

次に挙げるのは、Zagier との共同研究で得た母関数型の公式である。

$G_0(k,n,s)$ で

$$G_0(k,n,s) \;=\; \sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,n,s)} \zeta(\mathbf{k})$$

なる和を記すことにする。$I_0(k,n,s)$ は k, n, s が $s \geq 1$, $n \geq s$, $k \geq n+s$ を満たす時以外は空なので $G_0(k,n,s)$ の母関数を次で定義する。

$$\Phi_0(x,y,z) \;=\; \sum_{k,n,s} G_0(k,n,s)\, x^{k-n-s}\, y^{n-s}\, z^{s-1} \quad \in \mathbf{R}[[x,y,z]]\,.$$

この時、sum formula の第３の一般化は次の定理である。

Theorem 5 母関数 $\Phi_0(x,y,z)$ は次のように書ける。

$$\Phi_0(x,y,z) \;=\; \frac{1}{xy-z}\Bigl(1 \;-\; \exp\Bigl(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n}\, S_n(x,y,z)\Bigr)\Bigr)\,.$$

ここで多項式 $S_n(x,y,z) \in \mathbf{Z}[x,y,z]$ は

$$S_n(x,y,z) \;=\; x^n + y^n - \alpha^n - \beta^n\,, \qquad \alpha,\,\beta \;=\; \frac{x+y \pm \sqrt{(x+y)^2-4z}}{2}$$

もしくは

$$\log\Bigl(1 \;-\; \frac{xy-z}{(1-x)(1-y)}\Bigr) \;=\; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n(x,y,z)}{n}$$

で定義されるものである。特に $G_0(k,n,s)$ は Riemann ゼータ関数の特殊値 $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, $\cdots$ の有理数係数の多項式として書ける。

注意点として上記の公式の場合、見かけ上線型関係式になっていない。つまり母関数の各係数を取り出して眺めると、右辺は Riemann ゼータ関数の多項式になっているわけで、線型とは限らない。しかし、このような積はすべて多重ゼータ値の線型和として書き下すことができる。

この定理から sum formula を取り出すには、$z = xy$ と特殊化するとよい。そうすれば、$G_0(k,n) = \sum_s G_0(k,n,s)$ と書くとき、定義から

$$\Phi_0(x,y,xy) = \sum_{k>n>0} G_0(k,n) x^{k-n-1} y^{n-1}$$

となる。一方、定理の右辺は、

$$1 \;-\; (xy-z)\,\Phi_0(x,y,z) \;=\; \prod_{m=1}^{\infty}\Bigl(1 \;-\; \frac{xy-z}{(m-x)(m-y)}\Bigr),$$

と書き換えることができ、ここで $z \to xy$ とすることにより、

$$\Phi_0(x, y, xy) \;=\; \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(m-x)(m-y)} \;=\; \sum_{k>n>0} \zeta(k)\, x^{k-n-1} y^{n-1},$$

となって係数比較により $G_0(k,n) = \zeta(k)$ すなわち sum formula を得ることになる。

Theorem 5 からは、sum formula の他にもいくつかの既知の関係式を取り出すことができ、中でも結び目の不変量からの証明しか知られていなかった Le-Murakami の公式が再証明されることは興味深いことと思う。また、$s=1$ に特殊化した場合の母関数は、$\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ の基本群のガロア作用の研究の中でも対応物が知られているとのことであるが、一般の s についてのこの定理の母関数の対応物は未知のようである。

2 Theorem 5 の証明

Proof 多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ を

$$L_{\mathbf{k}}(t) \;=\; L_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \;=\; \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_n} \frac{t^{m_n}}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}\cdots{m_n}^{k_n}} \qquad (|t|<1).$$

の $t = 1$ における極限値として取り扱う。$\mathbf{k}$ が空集合の場合は $L_{\mathbf{k}}(t)$ は 1 とする。非負整数 k, n, s に対し

$$G(k,n,s;t) \;=\; \sum_{\mathbf{k}\in I(k,n,s)} L_{\mathbf{k}}(t)$$

とする (従って $G(0,0,0;t) = 1$、また $k \geq n+s$ かつ $n \geq s \geq 0$ なる時以外は $G(k,n,s;t) = 0$)。同様に

$$G_0(k,n,s;t) \;=\; \sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,n,s)} L_{\mathbf{k}}(t)$$

とする。$\Phi = \Phi(x,y,z;t)$ と $\Phi_0 = \Phi_0(x,y,z;t)$ で、対応する母関数すなわち、

$$\Phi = \sum_{k,n,s\geq 0} G(k,n,s;t) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{s} = 1 + L_1(t)y + L_{1,1}(t)y^2 + \cdots$$

と

$$\Phi_0 = \sum_{k,n,s\geq 0} G_0(k,n,s;t) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{s-1} = L_2(t) + L_{1,2}(t)y + L_3(t)x + \cdots.$$

をそれぞれ表す。

$L_{\mathbf{k}}(t)$ の微分についての式

$$\frac{d}{dt}L_{k_1,\dots,k_n}(t) \;=\; t^{-1}\,L_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n-1}(t) \quad \text{if} \quad k_n \geq 2,$$

$$= \;(1-t)^{-1}\,L_{k_1,\dots,k_{n-1}}(t) \quad \text{if} \quad k_n = 1$$

を用いることによって、ふたつの関係式

$$\frac{d}{dt}G_0(k,n,s;t) = \frac{1}{t}\Big(G(k-1,n,s-1;t) - G_0(k-1,n,s-1;t) + G_0(k-1,n,s;t)\Big)\,,$$

$$\frac{d}{dt}\Big(G(k,n,s;t) - G_0(k,n,s;t)\Big) = \frac{1}{1-t}G(k-1,n-1,s;t)\,,$$

が得られる。母関数を用いてこの式を書くと

$$\frac{d\Phi_0}{dt} = \frac{1}{yt}\Big(\Phi - 1 - z\Phi_0\Big) + \frac{x}{t}\Phi_0\,, \qquad \frac{d}{dt}\Big(\Phi - z\Phi_0\Big) = \frac{y}{1-t}\Phi\,.$$

となる。Φ を消去して Φ_0 についての微分方程式

$$t(1-t)\,\frac{d^2\Phi_0}{dt^2} + \Big((1-x)(1-t) - yt\Big)\,\frac{d\Phi_0}{dt} + (xy-z)\,\Phi_0 = 1$$

が得られる。この $t=0$ における解は、Gauss の超幾何関数 $F(a,b;c;x)$ を用いて

$$\Phi_0(x,y,z;1) \;=\; \frac{1}{xy-z}\Big(1 - F(\alpha-x,\beta-x;1-x;t)\Big)\,,$$

(ここで $\alpha+\beta = x+y$, $\alpha\beta = z$) と書ける。$t=1$ として Gauss の $F(a,b;c;1)$ についての公式を用いて

$$1 - (xy-z)\Phi_0(x,y,z;1) \;=\; F(\alpha-x,\beta-x;1-x;1) = \frac{\Gamma(1-x)\Gamma(1-y)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\,,$$

が得られ、更に公式 $\Gamma(1-x) = \exp\Big(\gamma x + \sum_{n\geq 2}\zeta(n)\dfrac{x^n}{n}\Big)$ を用いることによって定理の式が得られる.

参考文献

[1] A. Granville, A decomposition of Riemann's zeta-function, in London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge, 1997, pp. 95-101.

[2] M. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.*, **152** (1992), 275-290.

[3] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *preprint* .

[4] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, **74** (1999), 39-43.

[5] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, to appear in *Indag. Math.*.

[6] J. Okuda and K. Ueno, New approach to Ohno relation for multiple zeta values, *preprint* .

[7] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in Proceedings of ECM, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497-512.

[8] D. Zagier, Multiple zeta values. Unpublished preprint, Bonn, 1995.

[9] 金子昌信 大野泰生, 多重ゼータ値の関係式について, 第４５回 代数学シンポジウム報告集 (2000), 48-64.

[10] 大野泰生, 多重ゼータ値と、多重ベルヌーイ数に関連するゼータ関数について, 津田塾大学数学・計算機科学研究所報第３回津田塾大学整数論シンポジウム報告集 (1998) 98-107.

[11] 大野泰生, A proof of the cyclic sum conjecture for multiple zeta values, 京都大学数理解析研究所講究録 **1173** (2000) 192-199.

Department of Mathematics
Kinki University
Higashi-Osaka, Osaka 577-8502, Japan
e-mail: ohno@math.kindai.ac.jp