数理解析研究所講究録 1274 巻 2002 年 109-114

不定方程式 $X^3-(c^3-1)Y^3=N$ と $\sqrt[3]{c^3-1}$ の連分数展開

橋本 竜太 (名古屋大学 大学院人間情報学研究科 研究生)

Diophantine Equation $X^3-(c^3-1)Y^3=N$ and Continued Fraction Expansion of $\sqrt[3]{c^3-1}$

HASHIMOTO, Ryūta
(Graduate School of Human Informatics, Nagoya Univ.)

概 要

Thue 方程式の整数解はその方程式に付随する代数的数の連分数展開と密接な関連を持つ. そこで, 代数的数の連分数展開の部分商について詳しく調べる手始めとして, $\sqrt[3]{c^3-1}$ の連分数展開について調べてみた. すると, 部分商に正整数の他に 0 および -1 を認めることにすれば, 連分数展開にある種の規則性が見出されることが判明した.

1 不定方程式の整数解と連分数展開

l は 3 以上の整数, D は l 乗数ではない正整数とする. N を 0 ではない整数として, 不定方程式

$$X^l - DY^l = N \tag{1}$$

を考えることにしよう.

不定方程式 (1) に付随する定数 A を次で定義する:

$$A = \begin{cases} 1 & (N>0); \\ 1-\left(1+\left(\dfrac{-N}{l^l\varepsilon^l}\right)^{1/(l-1)}\right)^{-1} & (N<0). \end{cases}$$

$$\varepsilon = \min\left\{\sqrt[l]{D} - a_0, a_0 + 1 - \sqrt[l]{D}\right\}, \quad a_0 = \left\lfloor\sqrt[l]{D}\right\rfloor.$$

$\sqrt[l]{D}$ の単純連分数展開を

$$\sqrt[l]{D} = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

とし, $\{p_k\}_{k\geq -1}$, $\{q_k\}_{k\geq -1}$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} &p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0, \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ &q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad\ \ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned}$$

このとき p_k/q_k は $\sqrt[l]{D}$ の近似分数となることはよく知られている. さらに, 次の 2 つの補題が成り立つ.

補題 1 (Lagrange). $\left|\sqrt[l]{D} - x/y\right| < 1/(2y^2)$ ならば, $x/y = p_n/q_n$ なる n が存在する. □

補題 2. 任意の $n \geq 0$ について $\left|p_n - \sqrt[l]{D}\, q_n\right| > 1/(q_{n+1} + q_n)$ が成り立つ. □

これらの補題を組み合わせることで, 次のことを容易に証明することができる.

定理 1. (x, y) は不定方程式 (1) の整数解であり, x と y は互いに素であるとする. もしも

$$y^{l-2} > \frac{2\,|N|}{lD^{1-1/l}A^{1-1/l}}$$

ならば, $x = p_n$, $y = q_n$ を満たす n が一意に存在する.

さらに, $N > 0$ ならば n は奇数であり, $N < 0$ ならば n は偶数である. しかも, 次が成り立つ:

$$\frac{{q_n}^{l-2}}{a_{n+1} + 2} < \frac{|N|}{lD^{1-1/l}A^{1-1/l}}. \tag{2}$$

□

ところで, $\{q_k\}$ の定義を思い起こせば, 講演者のみならず多くの人は次の予想が成り立つと信じたいのではなかろうか.

予想 1. ${q_n}^{l-2}/(a_{n+1}+2)$ は n に対してほとんど単調に増加する．より正確には，単調増加列 $L_1 \leq L_2 \leq \cdots$, $L_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ が存在し，$n' \geq n$ ならば ${q_{n'}}^{l-2}/(a_{n'+1}+2) > L_n$ が成り立つ． □

この予想が正しいのであれば，不等式 (2) により解の上界を得ることができる．

たとえば，$l=3$, $D=c^3-1$, c は 3 以上の整数の場合を考えてみよう．この場合は具体的な数値計算により，次のことが予想される．

予想 2. $\sqrt[3]{c^3-1}$ の連分数展開に関して，$n>5$ ならば $q_n/(a_{n+1}+2) > c^3$ である． □

この予想が正しいとして，$0<N<3c^3(c^3-1)^{2/3}$ のときの不定方程式 (1) の整数解 (x,y) について考えてみよう．定理1より，$y > 2N/\bigl(3(c^3-1)^{2/3}\bigr)$ ならば，$y=q_n$ なる n が存在する．さらに，n は奇数でしかも

$$\frac{q_n}{a_{n+1}+2} < \frac{N}{3(c^3-1)^{2/3}} < c^3$$

を満たしている．ゆえに予想2より $n=1,3,5$ である．このように，初等的な計算だけで解の候補を絞ることができる．

さて，予想1を確かめるのは難しいと思われる．${q_n}^{l-1}$ と比べて a_{n+1} が非常に大きいような n の存在の是非をどのようにして確かめられるのだろうか．そこで，$\sqrt[l]{D}$ の連分数展開の部分商の振る舞いに関心を向けることにしよう．とはいっても，一般の場合は手に負えないので，今回は $\sqrt[3]{c^3-1}$ なる形のものについて考察することにしよう．

2 $\sqrt[3]{c^3-1}$ の連分数展開

c は十分大きな正整数とする．$\sqrt[3]{c^3-1}$ の連分数展開を計算してみよう．

$$\sqrt[3]{c^3-1} = [c-1,\ 1,\ 3c^2-2,\ 1,\ c-2,\ 1,\ \beta_3]$$

β_3 の整数部分は $c \bmod 2$ によって決まる．

$$\beta_3 = \begin{cases} \left[\dfrac{9c^2-4}{2},\ 1,\ \beta_4\right] & (c \equiv 0 \bmod 2) \\ \left[\dfrac{9c^2-3}{2},\ 2,\ \beta_4'\right] & (c \equiv 1 \bmod 2) \end{cases}$$

以下, $c \equiv 1 \bmod 2$ としよう. β_4 の整数部分は $c \bmod 5$ によって決まる. たとえば, $c \equiv 4 \bmod 5$ の場合は,

$$\beta_4 = \left[\frac{c-4}{5},\ 3,\ 2,\ 1,\ \beta_5\right]$$

さらに β_5 の整数部分を決めるには, $c \bmod 7$ がわかればよい. たとえば, $c \equiv 3 \bmod 7$ ならば,

$$\beta_5 = \left[\frac{3c^2-13}{14},\ 4,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ \frac{c-59}{70},\ 4,\ 1,\ 2,\ \frac{3c^2-1}{2},\ 7,\ \beta_8\right]$$

さらに β_8 の整数部分を決めるには, $c \bmod 11$ がわかればよい.

ひとまずここで計算を止めることにする.

ここまでの計算を見てみると, $\sqrt[3]{c^3-1}$ の連分数展開は次の形で表されるように見える:

$$\sqrt[3]{c^3-1} = \left[b_0,\ \mathrm{seq}_0,\ b_1,\ \mathrm{seq}_1,\ \ldots\right]. \tag{3}$$

ここで, k を非負整数として, b_k, seq_k は次を満たしている.

- b_{2k} は c の 1 次式. $c \equiv 59 \bmod 70$ の場合は,

$$b_0 = c-1, \quad b_2 = c-2, \quad b_4 = \frac{1}{5}c - \frac{4}{5}, \quad b_6 = \frac{1}{70}c - \frac{59}{70}.$$

- b_{2k+1} は c の 2 次式. $c \equiv 59 \bmod 70$ の場合は,

$$b_1 = 3c^2-2, \quad b_3 = \frac{9}{2}c^2 - 3, \quad b_5 = \frac{3}{14}c^2 - \frac{13}{14}, \quad b_7 = \frac{3}{2}c^2 - \frac{1}{2}.$$

- seq_k は正整数の列で, その長さは奇数. $c \equiv 59 \bmod 70$ の場合は,

$$\mathrm{seq}_0 = \mathrm{seq}_1 = \mathrm{seq}_2 = \mathrm{seq}_3 = \langle 1\rangle, \quad \mathrm{seq}_4 = \langle 3,2,1\rangle,$$
$$\mathrm{seq}_5 = \langle 4,2,1,1,1\rangle, \quad \mathrm{seq}_6 = \langle 4,1,2\rangle, \quad \mathrm{seq}_7 = \langle 7\rangle.$$

しかしこの形では, c が十分大きくない場合に部分商が非正となる不都合が起こる. たとえば $c \equiv 59 \bmod 70$ の場合, $c = 59$ ならば $b_6 = 0$ である. 別の場合には部分商が -1 になる場合もある.

ところが, 部分商が非正でないとしても -2 以下になることはないことを確かめることができるのである. 言い換えれば, 部分商として正整数のみならず 0 および -1 を認めるならば (もちろん連分数展開の一意性は失われるが), $\sqrt[3]{c^3-1}$ はある種の規則性を持つ連分数展開により表されるのである. より正確には, 次の通り:

定理 2. c を 2 以上の整数とすると, 次の性質を満たす $\{v_k\}_{k\geq 0}$, $\{w_k\}_{k\geq 0}$, $\{\mathrm{seq}_k\}_{k\geq 0}$, $\{M_k\}_{k\geq 0}$ が存在する.

- $\{v_k\}, \{w_k\}$ は有理数の列であり,
$$b_{2k} := v_{2k}c - w_{2k}, \quad b_{2k+1} := v_{2k+1}c^2 - w_{2k+1}$$
とすると, 任意の $k \geq 0$ について $b_k \geq -1$ である.
- 任意の $k \geq 0$ について, seq_k は正整数の列であり, その長さは奇数.
- $\{M_k\}$ は正整数の列であり, 任意の $k \geq 0$ について $M_k \mid M_{k+1}$ を満たす. そして, v_k, w_k, seq_k は $c \mod M_k$ により決まる.
- $\sqrt[3]{c^3-1}$ の連分数展開は次のように書くことができる:
$$\sqrt[3]{c^3-1} = \lim_{k\to\infty} [b_0,\ \mathrm{seq}_0,\ b_1,\ \mathrm{seq}_1,\ \ldots,\ b_k,\ \mathrm{seq}_k].$$

定理 2 における $\{M_k\}$ としては具体的に次のように採ることができる:
$$M_0 = M_1 = M_2 = 1, \quad M_3 = 2, \quad M_4 = 2 \times 5,$$
$$M_5 = M_6 = M_7 = 2 \times 5 \times 7, \quad M_8 = 2 \times 5 \times 7 \times 11,$$
$$M_9 = M_{10} = M_{11} = 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13, \quad \ldots.$$

ところで, 前節で掲げた予想について, 定理 2 がその解決するヒントになるか否かは, 講演者には残念ながら今のところはわからない.

3 定理の証明

定理 2 は次の 2 つの補題を組み合わせることで得られる.

ひとつは, 超幾何級数の一般論から得られるものである (たとえば [1, §5.3] を参照されたい).

補題 3. $\sqrt[3]{c^3-1}$ は次のように有理数を部分商とする連分数に展開される:
$$\sqrt[3]{c^3-1} = [c,\ u_1c^2,\ u_2c,\ u_3c^2,\ u_4c,\ \ldots].$$
ただし,
$$u_1 = -3, \quad u_{2k+1} = \frac{(3k-1)(2k+1)}{(3k+1)(2k-1)}u_{2k-1},$$
$$u_2 = 1, \quad u_{2k+2} = \frac{3k+1}{3k+2}u_{2k}.$$

もうひとつは, 連分数展開の初等的な変形である.

補題 4. $\varepsilon \neq 0$ に対して, 次が成り立つ:

$$[a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots] = \left[a_0 - \varepsilon,\ \frac{1}{\varepsilon},\ -\varepsilon^2 a_1 - \varepsilon,\ -\frac{1}{\varepsilon^2}a_2,\ -\varepsilon^2 a_3,\ -\frac{1}{\varepsilon^2}a_4,\ \ldots\right].$$

□

なお, 同様の議論により, $\sqrt[3]{c^3+1}$, $\sqrt[5]{c^5-c^2}$ などの形の代数的無理数についても定理 2 に相当する結果を得ることができる.

謝辞

講演後, 若林功先生より, 定理 1 に関して Pethő 氏による研究があることなどを教えていただいた. 同じく, 塩川宇賢先生より, 定理 2 の定式化に関して助言をいただいた. 両氏に感謝するとともに, 今回の研究集会にて講演の機会をいただけたことついて, とくに谷川好男先生に感謝する.

参考文献

[1] 一松 信, 特殊関数入門, 森北出版, 1999.

e-mail: ryuuta@math.human.nagoya-u.ac.jp
URL: http://www2.math.human.nagoya-u.ac.jp/~ryuuta/