

H^∞ 上の合成作用素について

新潟大学大学院 自然科学研究科 細川 卓也

Department of Mathematics, Niigata University Takuya Hosokawa

単位開円板 D 上の正則関数全体を $H(D)$ とし, D の正則自己写像全体を $S(D)$ とする. $\varphi \in S(D)$ に対し, 合成作用素 $C_\varphi : f \rightarrow f \circ \varphi$ は $H(D)$ からそれ自身への線形作用素である. Banach 空間 $X \subset H(D)$ に対して $\mathcal{C}(X)$ を X 上の合成作用素全体に作用素ノルムで位相を定めた位相空間とする.

2つの合成作用素 C_φ, C_ψ が同じ連結成分に属するとき, $C_\varphi \sim C_\psi$ と表す.

1 $\mathcal{C}(H^2)$ の位相構造に関する諸結果

$\mathcal{C}(H^2)$ の位相構造に関する一連の結果を紹介する. まず, H^2 を含む関数空間の族を導入する. $\alpha > -1$ に対して, weighted Bergman space A_α^2 は,

$$\|f\| = \left(\int_D |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{2\pi} \right)^{1/2}$$

により $A_\alpha^2 = \{f \in H(D) : \|f\| < \infty\}$ で定義される.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A_\alpha^2 \iff \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1-\alpha} |a_n|^2 < \infty$$

であるので, $A_{-1}^2 = H^2$ と対応させる.

$\mathcal{C}(A_\alpha^2)$ の compact 合成作用素に関して次の2つの結果がある.

Proposition 1. $\alpha \geq -1$ に対して, $C_\varphi, C_\psi \in \mathcal{C}(A_\alpha^2)$ が compact であるならば, $C_\varphi \sim C_\psi$ である.

Theorem (MacCluer, [9]). $\alpha > -1$ に対して, $\mathcal{C}(A_\alpha^2)$ において compact 合成作用素の全体はそれ自身で連結成分を成す.

次に $\mathcal{C}(H^2)$ の孤立点に関する E. Berkson の結果 ([1]) を見る. より一般には essential norm: $\|T\|_e = \inf\{\|T - K\| : K \text{ は compact 作用素}\}$ に関する次の評価が得られている.

Proposition 2. $\varphi \in S(D)$ に対して $E(\varphi) = \{\zeta \in \partial D : |\varphi(\zeta)| = 1\}$ とする. このとき, $\varphi, \psi \in S(D), \varphi \neq \psi$ に対して, $|E(\varphi)| + |E(\psi)| \leq \|C_\varphi - C_\psi\|_e^2$.

Corollary (Berkson, [1]). $\varphi \in S(D), |E(\varphi)| > 0$ とすると、 C_φ は $\mathcal{C}(H^2)$ の孤立点である。

Shapiro-Sundberg は C_φ が $\mathcal{C}(H^2)$ の孤立点となる為の、シンボル φ の関数論的な必要条件を示した。

Theorem (Shapiro-Sundberg, [12]). C_φ が $\mathcal{C}(H^2)$ の孤立点であるならば、 φ は H^∞ の閉単位球面の *extreme point* である。すなわち、

$$\int_0^{2\pi} \log(1 - |\varphi(e^{i\theta})|) d\theta = -\infty$$

Theorem(MacCluer) の主張の $\alpha = -1$ のとき、すなわち $\mathcal{C}(H^2)$ の場合や、Theorem(Shapiro-Sundberg) の逆に関しては未解決である。が、Shapiro-Sundberg は次のような予想をしている。

Conjecture (Shapiro-Sundberg). $\mathcal{C}(H^2)$ において $C_\varphi \sim C_\psi$ となる為の必要十分条件は、 $C_\varphi - C_\psi$ が compact 合成作用素であることである。

2 $\mathcal{C}(H^\infty)$ について

MacCluer-Ohno-Zhao は [10] で $\mathcal{C}(H^\infty)$ について次を示した。

- (i) C_φ と C_ψ が同じ連結成分に属するための必要十分条件は $\|C_\varphi - C_\psi\| < 2$.
- (ii) C_φ が $\mathcal{C}(H^\infty)$ の孤立点であるための必要十分条件は任意の $\psi \in S(D), \psi \neq \varphi$ に対して $\|C_\varphi - C_\psi\| = 2$.
- (iii) C_φ が $\mathcal{C}(H^\infty)$ の孤立点であるならば、 φ は H^∞ の閉単位球面の *extreme point* である。
- (iv) $\mathcal{C}(H^\infty)$ において compact 合成作用素の全体はそれ自身で連結成分を成す。
- (v) $C_\varphi - C_\psi$ が compact ならば、 C_φ と C_ψ が同じ連結成分に属する。

(iii) については逆が成り立つ。

Theorem 1 ([8]). 次の2つは同値。

- (i) C_φ は $\mathcal{C}(H^\infty)$ の孤立点である。
- (ii) φ は H^∞ の閉単位球面の *extreme point* である。

また、(iv) と (v) から Shapiro-Sundberg の Conjecture が $\mathcal{C}(H^\infty)$ に対して成り立つことが期待されるが、compact 合成作用素からなる連結成分以外のすべての連結成分で (v) の逆は成り立たない。([10], [8])

次に $\mathcal{C}(H^\infty)$ に essential norm で定まる位相を入れる。

この位相に関する孤立点と連結成分をそれぞれ本質的孤立点、本質的連結成分と言うことにすると次が成り立つ。

Theorem 2 ([8]). (i) C_φ と C_ψ が $\mathcal{C}(H^\infty)$ の同じ連結成分に属することと同じ本質的連結成分に属することは同値.
(ii) C_φ が $\mathcal{C}(H^\infty)$ の孤立点であることと本質的孤立点であることは同値.

参考文献

- [1] E. Berkson, *Composition operators isolated in the uniform operator topology*. Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 230–232.
- [2] C. Cowen and B. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions*. CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [3] K. deLeeuw and W. Rudin, *Extreme points and extremum problems in H^1* . Pacific J. Math. **8** (1958), 467–485.
- [4] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*. Academic Press, New York, 1981.
- [5] P. Gorkin, *Decompositions of the maximal ideal space of L^∞* . Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), no.1, 33–44.
- [6] P. Gorkin, H.-M. Lingenberg, and R. Mortini, *Homeomorphic disks in the spectrum of H^∞* . Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), 961–983.
- [7] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- [8] T. Hosokawa, K. Izuchi, D. Zheng, *Isolated points and essential components of composition operators on H^∞* . to appear.
- [9] B. MacCluer, *Components in the space of composition operators*. Integral Equation Operator Theory, **12** (1989), 725–738.
- [10] B. MacCluer, S. Ohno, R. Zhao, *Topological structure of the space of composition operators on H^∞* . Integral Equation Operator Theory, **40** (2001), 481–494.
- [11] J. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [12] J. Shapiro and C. Sundberg, *Isolation amongst the composition operators*. Pacific J. Math. **145** (1990), 117–152.
- [13] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*. Marcel Dekker, New York, 1990.